As geometrias não-euclidianas e a verdade matemática

Ana Paula Bispo
Roberto de Andrade Martins

A matemática foi considerada desde a Antigüidade como o padrão de conhecimento verdadeiro, seguro, servindo de modelo para outros estudos. No entanto, essa visão mudou, no século XIX. Desde essa época, os matemáticos sabem que a geometria de Euclides, que foi aceita durante dois mil anos, não é verdadeira e não descreve a realidade. Ela é uma simples construção humana, tão boa quanto muitas outras geometrias diferentes que foram criadas dois séculos atrás, mas totalmente arbitrária. É um romance imponente, lógico, difícil – mas não passa de ficção.

O início da geometria grega

A matemática já estava muito desenvolvida no Egito e na Mesopotâmia mais de mil anos antes da era cristã. Ela era útil para fins práticos e religiosos. Em documentos egípcios e babilônicos encontramos a solução de muitos problemas geométricos. Quanto vinho cabe em um tonel cilíndrico? Como se pode medir a altura de uma pirâmide?

Para resolver esses e outros problemas foram sendo elaboradas diversas técnicas geométricas. Os textos babilônicos e egípcios de geometria que conhecemos dão verdadeiras "receitas de bolo", mostrando através de exemplos numéricos como se pode chegar ao resultado. No entanto, não apresentam nem regras gerais, nem qualquer tipo de justificativa.

Os gregos aprenderam inicialmente a geometria com outros povos, especialmente com os egípcios. Porém, após algum tempo, começaram a dar contribuições originais. Afirma-se muitas vezes que Thales (aproximadamente 625-550 a.C.) e Pitágoras (aprox. 560-480 a.C.) foram os matemáticos gregos que fizeram as primeiras demonstrações geométricas. Não conhecemos, no entanto, demonstrações geométricas que tenham sido feitas antes do século IV a.C. É relevante o testemunho de Archytas de Tarentum (aprox. 428-347 a.C.) que afirmou, um século depois de Pitágoras, que a geometria não conseguia proporcionar provas tão boas quanto a aritmética.

Vários historiadores acreditam que um método rigoroso de demonstração, passo a passo, a partir de certas definições e postulados, inicia-se no século IV a.C., sendo sua criação atribuída a Eudoxo, de Cnidos (408-355 a.C.) e a Theeteto (aprox. 417-369 a.C.). Archytas, Eudoxo e Theeteto conviveram com Platão (aprox. 427-347 a.C.). Este famoso filósofo foi fortemente pela visão de que a matemática é o tipo de pensamento mais preciso e definido de que somos capazes.

No pensamento de Platão aparece claramente a distinção entre as entidades matemáticas e os objetos naturais. Uma linha matemática, por exemplo, é uma entidade que tem comprimento, mas não tem largura. No mundo material, no entanto, por mais fina que seja um cordão ou um risco, ele sempre terá uma largura. As entidades matemáticas, que pertencem ao mundo das idéias, possuem uma perfeição que não pode ser atingida pelos corpos naturais. Por isso, o conhecimento geométrico exato não pode ser justificado pela experiência, que é grosseira. Segundo Platão, apenas o próprio pensamento pode provar as verdades matemáticas.

Os *Elementos* de Euclides

Além de tentar provar os resultados da geometria, os matemáticos gregos procuraram sistematizar toda a geometria como uma teoria unificada, em que cada resultado pode ser provado a partir de um pequeno número de suposições básicas. O mais antigo exemplo desse formalismo que chegou até nós é um “clássico” da ciência: *Os elementos*, de Euclides (aprox. 325-265 a.C.). De sua elaboração, 300 anos antes da era cristã, até o século XIX, essa obra serviu de livro texto para milhões de estudantes em todo o mundo.

Euclides procurou apresentar a matemática de uma forma dedutiva, partindo de definições e certos princípios básicos (axiomas e postulados) e construindo gradualmente, a partir deles, as provas de todos os outros conhecimentos geométricos. Ele considerava que algumas afirmações (como “Se adicionarmos iguais a iguais, os resultados serão iguais”) podiam ser aplicadas a todos os campos do conhecimento e que podiam ser aceitas como verdades evidentes. Esses eram seus axiomas, ou “noções comuns”. Os cinco postulados, de natureza geométrica, são:

1. [É possível] traçar uma linha reta de qualquer ponto até qualquer outro ponto.
2. [É possível] prolongar indefinidamente uma linha reta finita.
3. [É possível] descrever um círculo com qualquer centro e raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma linha reta que corta duas linhas retas forma ângulos internos de um dos lados cuja soma é menor do que dois retos, essas duas retas, se forem prolongadas indefinidamente, se encontrarão no lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Os elementos tiveram um enorme impacto não apenas no desenvolvimento da matemática, mas de toda a ciência ocidental. Foi um trabalho considerado exemplar, que devia ser imitado em outros campos, pois parecia poder proporcionar a certeza a que todos queriam chegar. Sua influência atingiu grandes pensadores do século XVII, como Newton, em seus *Princípios matemáticos da filosofia natural*, e Spinoza, em sua *Ética*: ambos utilizaram um método axiomático dedutivo que recorda a estrutura dos *Elementos*.

Não se pode provar tudo

Antes de Euclides já eram conhecidas as limitações do método que ele utilizou. Aristóteles (384-322 a.C.), de Estagira, a quem atribuímos a primeira sistematização da lógica clássica, considerava as demonstrações extremamente importantes, mas enfatizava que mesmo a prova mais rigorosa apenas permite concluir que uma conclusão é verdadeira se soubermos que as premissas da demonstração também são verdadeiras.

Seria possível construir uma teoria em que *tudo* fosse provado? Segundo Aristóteles, quando se quer provar (deduzir) as proposições de uma teoria, cai-se necessariamente em um de três casos:

a) em uma regressão infinita;
b) em um círculo vicioso; ou
c) em proposições indemonstráveis.

Uma teoria é constituída por um sistema de proposições (afirmações ou negações). Para poder provar uma proposição, ela deve ser deduzida a partir de outras proposições (as premissas). Se quisermos basear uma teoria em premissas que não pertencem à própria teoria, cairemos em uma *regressão infinita*: será sempre preciso procurar novas premissas e depois provar essas premissas, e assim por diante. Desse modo, nunca se poderá chegar ao fim.

Por outro lado, pode-se pensar em construir uma teoria em que todas as afirmações sejam provadas a partir de outras proposições que já estão dentro da própria teoria. Sob o ponto de vista lógico, isso é possível. No entanto, se isso for feito, teremos apenas um sistema *coerente* de proposições, mas sem nenhuma garantia de que as proposições são verdadeiras, porque a teoria se apóia sobre si mesma. Teremos um *círculo vicioso*.

Para se tentar provar *tudo*, portanto, ou se cai em um círculo vicioso, ou em uma regressão infinita. Pode-se também desistir de demonstrar *tudo*, ou seja, tomar como base da demonstração algumas premissas indemonstráveis. Essa é a terceira possibilidade do “trilema”.

Aristóteles rejeitou a regressão infinita e o círculo vicioso. Ele defendeu a possibilidade de se construir um sistema de conhecimento a partir de certas verdades que não seriam demonstradas logicamente, mas que sabemos serem verdadeiras. Essa base poderia ser constituída por definições, postulados (específicos de cada ciência) e axiomas (comuns a todas as ciências). Esse foi o modelo seguido por Euclides.

Os axiomas e os postulados não são *demonstrados*. Que confiança podemos ter neles? Se não tivermos certeza de que são corretos, todo o sistema dedutivo cai por terra, mesmo se as demonstrações forem rigorosamente válidas.

Esse era o ponto vulnerável da geometria de Euclides – e de qualquer teoria que se venha a construir. De um modo geral, os postulados e axiomas dos *Elementos* pareciam corretos e bastante óbvios, mas havia uma exceção. O quinto postulado, referente às paralelas, incomodou muitos matemáticos antigos e modernos. E foi o seu estudo que levou à derrubada da geometria euclidiana.

O postulado das paralelas

O quinto postulado de Euclides despertou, desde a Antigüidade, um desconforto. Sua descrição era mais longa, e seu significado era menos óbvio do que os demais postulados.

Ele é bastante importante, no sistema dedutivo de Euclides, que o utilizou para provar, entre outros teoremas: se duas linhas retas são paralelas a uma terceira, elas são paralelas entre si; por um ponto passa uma, e somente uma, paralela a uma linha reta dada; e as retas que unem as extremidades de duas linhas retas iguais e paralelas, são também iguais e paralelas.

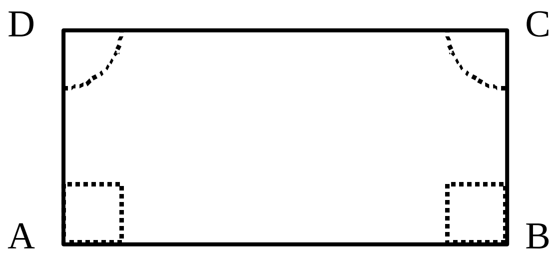
O quinto postulado é usado também para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, para demonstrar o teorema de Pitágoras e para estabelecer as propriedades de figuras semelhantes.

Ao longo dos séculos posteriores houve outras tentativas de substituir, provar ou eliminar o quinto postulado. Durante a Idade Média, o postulado foi mais estudado pelos árabes do que na Europa. Com as traduções que surgiam dos livros de Euclides entre os árabes, alguns trabalhos escritos nos séculos IX e X tentavam demonstrar o quinto postulado. Um deles foi o de Thabit ibn Qurra, que fez uso da hipótese inicial de que *se duas linha divergem de um lado então necessariamente elas convergem do outro*. Essa hipótese nada mais é do que uma das interpretações do quinto postulado.

As hipóteses de Saccheri

Entre os europeus, as críticas ao quinto postulado foram aparecer com maior freqüência após as primeiras traduções do livro, principalmente a partir do século XVII. O padre jesuíta italiano Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) teve um importante papel nesse desenvolvimento. Logo após seu falecimento foi publicado seu livro *Euclides liberto de qualquer mancha*, onde ele procurava provar o quinto postulado por redução ao absurdo: ele assume a hipótese de que a proposição a ser provada é falsa, chegando a contradições; assim conclui, por negação da negação, que a proposição inicial é verdadeira.

Primeiramente ele mostrou que utilizando apenas os outros postulados era possível formular uma boa parte da geometria. Analisou então as propriedades de uma figura com quatro lados, adotando a hipótese de que os lados AB e CD são paralelos e que os ângulos dos vértices A e B são retos.



Saccheri provou que os ângulos *C* e *D* deveriam ser iguais entre si, mas não conseguia provar que eram também retos – a menos que utilizasse o quinto postulado. Inversamente, se ele supusesse que *C* e *D* eram ângulos retos, ele conseguia provar o quinto postulado.

Saccheri tentou demonstrar que seu quadrilátero era um retângulo por redução ao absurdo. Analisou as duas outras possibilidades: *C* e *D* poderiam ser ângulos agudos; ou *C* e *D* poderiam ser ângulos obtusos. Se fosse possível deduzir algum absurdo dessas suposições, essas duas possibilidades poderiam ser excluídas, e ficaria provado que os ângulos são retos.

Saccheri conseguiu deduzir o quinto postulado a partir da hipótese do ângulo obtuso (e supondo que as linhas retas são infinitas), obtendo assim uma contradição e rejeitando essa hipótese.

No caso da hipótese do ângulo agudo, conseguiu deduzir conseqüências estranhas, mas nenhuma contradição. Essa hipótese tinha como conseqüência uma negação da teoria das paralelas. Dado um ponto *P* fora de uma reta *r*, as infinitas retas que passam por *P* podem ser divididas em três famílias:

a) uma família infinita de linhas que se encontram com *r*;
b) uma família infinita de linhas que nunca se encontram com *r*;
c) duas linhas que são assintóticas a *r* e que separam as duas primeiras famílias.

Na geometria de Euclides, apenas existe a primeira dessas famílias de retas. Todas as infinitas retas que passam por *P* cortam a reta *r*, exceto uma (a paralela).

Essas conseqüências da hipótese do ângulo agudo podem parecer absurdas do nosso ponto de vista euclidiano, mas não possuem nada de contraditório, sob o ponto de vista lógico, nem entravam em conflito com os outros postulados de Euclides. No entanto, Saccheri rejeitou esses resultados, afirmando que a hipótese do ângulo agudo conduzia a uma conseqüência que seria "*contrária à natureza da linha reta*".

Rejeitando as hipóteses do ângulo obtuso e do ângulo agudo, Saccheri acreditou ter demonstrado a hipótese do ângulo reto e, a partir dele, o quinto postulado de Euclides.

Vários outros matemáticos, depois dele (mas provavelmente sem conhecer seu livro) seguiram procedimentos semelhantes, como Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Durante o século XVIII e no início do XIX vários outros importantes matemáticos, como Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833), também se debruçaram sobre esse problema, sem sucesso.

Nascimento da geometria não-euclidiana

Em torno de 1820, dois matemáticos desenvolveram, independentemente um do outro, suas teorias envolvendo o postulado das paralelas.

János (ou Johann) Bolyai (1802-1860), húngaro, era filho de Farkas (ou Wolfgang) Bolyai (1775-1856), um professor de matemática. Envolveu-se com o assunto quando era estudante de engenharia militar. János seguiu o método axiomático dos gregos, sem decidir, *a priori*, sobre a validade ou não do quinto postulado. Negando o 5º postulado, assumiu que era possível traçar mais de uma paralela a uma reta, por um ponto e começou a deduzir as conseqüências dessa negação.

Em 1823, aos 21 anos de idade, deduziu – como Saccheri – conseqüências pouco usuais, como a de que a soma dos ângulos internos de um triângulo poderia ser menor do que 180^o.

Isso contrariava a geometria de Euclides, mas não parecia absurdo. János Bolyai percebeu que estava inventando uma geometria nova, estranha, mas que parecia coerente. Essa foi a principal diferença entre ele e alguns de seus predecessores, como Saccheri e Lambert: a crença de que a nova geometria era uma alternativa possível.

Numa carta enviada a seu pai em 3 de novembro de 1823, János escreveu que estava prestes a terminar um trabalho sobre a teoria das paralelas em que havia feito grandes descobertas e afirmou: “A partir do nada, eu criei um mundo totalmente novo”. Ele denominou sua teoria de “ciência absoluta do espaço”, considerando que a antiga geometria era um caso especial da nova.

O seu trabalho foi sendo aperfeiçoado nos anos seguintes, em meio a viagens que realizou como engenheiro militar. Completou seu manuscrito em 1829, enviando-o a seu pai, que o publicou como apêndice de seu próprio livro, em 1831.

No mesmo período em que János pesquisava o postulado das paralelas, o professor de matemática russo Nicolai Ivanovich Lobatchevsky (1792-1856) fazia, sem conhecimento do trabalho de Bolyai, investigações sobre o postulado das paralelas, na Universidade de Kazan.

A principal motivação de Lobatchevsky para desenvolver sua teoria foi a crença na impossibilidade de demonstração desse postulado. Como Bolyai, procurou desenvolver uma geometria na qual este não fosse necessariamente válido. Lobachevsky considerou que a geometria de Euclides era um caso especial de sua geometria mais geral. Ele notou que, quando considerava figuras geométricas cujo tamanho diminuía, as diferenças entre sua nova geometria e a de Euclides tendiam a desaparecer. Para figuras geométricas grandes, comparadas com um certo comprimento característico do espaço, as diferenças entre as geometrias se tornavam importantes. Os resultados de Lobatchevsky eram bastante semelhantes aos de Bolyai.

Euclides	**Bolyai e Lobatchevsky**
A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois retos, ou seja, 180^o	A soma é sempre menor do que 180^o e vai diminuindo à medida que o tamanho do triângulo aumenta.
Duas retas paralelas possuem a mesma distância entre si, em todos os pontos.	Retas paralelas vão se aproximando sempre, sem se tocarem; mas existe uma *curva* cujos pontos são eqüidistantes de uma reta.
Uma circunferência cujo raio vai aumentando se aproxima progressivamente de uma reta.	Uma circunferência cujo raio vai aumentando se aproxima progressivamente de uma curva especial e não de uma reta.
Se três ângulos de um quadrilátero forem retos, o quarto ângulo também será reto e a figura será um retângulo.	Se três ângulos de um quadrilátero forem retos, o quarto ângulo será agudo; não existem retângulos.
Duas retas perpendiculares a uma terceira reta são paralelas e eqüidistantes.	Duas retas perpendiculares a uma terceira reta vão se distanciando.
A razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é sempre a mesma, que representamos por π.	A razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é maior do que π e vai aumentando, para círculos maiores.
Pode-se criar figuras de qualquer tamanho que sejam semelhantes entre si (ângulos correspondentes iguais e lados proporcionais).	Não existem figuras geométricas semelhantes de tamanhos diferentes.

Lobatchevsky publicou seu primeiro trabalho em russo, numa revista obscura, da própria Universidade de Kazan, não tendo por isso repercussão imediata. Em 1837 publicou um artigo em francês, *Géométrie imaginaire*, e em 1840 uma versão em alemão de sua geometria, para tentar atingir um público mais amplo. Bolyai escreveu seu trabalho em húngaro, mas publicou-o em latim, um idioma que era lido pelos matemáticos na época. No entanto, as duas teorias praticamente não despertaram atenção.

O terceiro matemático que deu uma grande contribuição para o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas foi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Em 1854, sem conhecer os trabalhos de Bolyai e de Lobatchevsky, Riemann propôs uma generalização da geometria que não apenas apresentava um conjunto de alternativas à de Euclides, mas também introduzia a possibilidade de espaços com mais de 3 dimensões. Ele utilizou a geometria diferencial, que Gauss havia criado para o estudo de superfícies curvas – um formalismo muito diferente do empregado por Bolyai e Lobatchevsky. Sem levar em consideração a validade ou não do quinto postulado, a geometria diferencial possibilita a descrição de diferentes tipos de espaço, em que a métrica envolve apenas as propriedades intrínsecas. Hoje em dia, quando estudamos geometria não-euclidiana, utilizamos a abordagem analítica de Riemann, e não os trabalhos de Bolyai e Lobatchevsky.

A aceitação de uma geometria não-euclidiana, seja ela na forma diferencial de Riemann ou na forma axiomática de Lobatchevsky e Bolyai, envolvia muito mais do que novos formalismos matemáticos. Estava implícita aí uma nova forma de "entender" o espaço, que envolvia concepções filosóficas e metafísicas.

No final da década de 1860 e início da de 1870 as geometrias não-euclidianas começaram a ganhar reconhecimento, surgindo traduções dos trabalhos de Bolyai, Lobatchevsky e Riemann para vários idiomas. Em 1868 o matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) publicou um importante artigo, "Ensaio de interpretação da geometria não-euclidiana", descrevendo e defendendo a coerência da geometria de Lobatchevsky. Foi graças à influência de Beltrami que o nome "geometria não-euclidiana" passou a ser adotado.

A natureza da geometria

As últimas dúvidas sobre a coerência interna das novas geometrias foram dissipadas pelos trabalhos do matemático francês Henri Poincaré (1854–1912), na década de 1880. Ele estabeleceu uma correspondência entre termos da geometria não-euclidiana e termos da geometria de Euclides, de tal modo que, tomando-se uma proposição da geometria de Lobatchevsky e fazendo sua "tradução", ela se torna uma proposição válida da geometria de Euclides. Essa possibilidade de tradução mostra que a geometria de Lobatchevsky é tão coerente quanto a geometria de Euclides.

Para o próprio Lobatchevsky, apenas uma geometria podia ser *verdadeira*, no sentido de corresponder à realidade em que vivemos. Essa atitude é do tipo *empirista.* A geometria é considerada como sendo da mesma natureza que a física, sujeita portanto a testes experimentais. É uma interpretação da matemática completamente diferente da que foi adotada desde Platão até o século XVIII. A filosofia de Immanuel Kant (1724-1804), que teve enorme influência no pensamento científico do início do século XIX, afirmava pelo contrário que a geometria estabelecida por Euclides era verdadeira, e que sua verdade era independente de conhecimentos empíricos.

Para Poincaré, a própria pergunta "Qual das geometrias é verdadeira?" não tem sentido. Seria a mesma coisa que perguntar se o sistema métrico decimal é verdadeiro e o antigo sistema inglês de medidas é falso. Um sistema de medidas ou uma geometria não podem ser falsos ou verdadeiros. Deve ser possível desenvolver teorias físicas igualmente válidas utilizando tanto uma geometria quanto a outra. Porém, em um dado contexto, pode ser mais *conveniente* utilizar geometria euclidiana ou não-euclidiana.

De acordo com Morris Kline, a geometria não-euclidiana arrancou brutalmente a matemática do pedestal da verdade, mas em compensação deixou-a livre para vaguear. A partir do momento em que a revolução de Bolyai e Lobatchevsky se completou, a matemática passou a ser caracterizada por sua liberdade para explorar novas construções do pensamento. Atualmente temos não apenas várias geometrias, mas também várias teorias dos conjuntos, e até mesmo várias lógicas.

O reconhecimento de que a geometria de Euclides era apenas uma de muitas possíveis, e que não era "verdadeira", mudou completamente nossa compreensão sobre a natureza da ciência – e não apenas na matemática. Já não existe um modelo de "certeza" que as outras ciências possam imitar. O trilema de Aristóteles surge de novo, com uma força muito mais assustadora do que no passado. Não podemos construir uma teoria em que tudo possa ser provado, sem cairmos em um círculo vicioso ou um regresso infinito. E a terceira alternativa – partir de pressupostos não demonstrados – não deu certo. Não temos nenhum conhecimento seguro, sobre o qual seja possível construir uma ciência verdadeira e imutável.

Para conhecer mais

BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean geometry: a critical and historical study of its development*. Trad. H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

POINCARÉ, Henri. *A ciência e a hipótese* [1901]. Trad. Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

ROSENFELD, B. A. *A history of non-Euclidean geometry: evolution of the concept of a geometric space*. Trad. Abe Shenitzer. New York: Springer-Verlag, 1988.