

Silvia Petean

O PROBLEMA DA RELAÇÃO MASSA-ENERGIA POTENCIAL
PARA INTERAÇÕES ELETROMAGNÉTICAS

Este exemplar corresponde à versão final
da tese de mestrado defendida pela srta. Silvia
Petean e aprovada pela Comissão Examinadora.

de Alberto

Tese de Mestrado

Instituto de Física "Gleb Wataghin"

Universidade Estadual de Campinas

Agradeço muito ao meu orientador, Roberto de Andrade Martins, pela brilhante companhia como profissional e também como ser humano, nesses anos em que trabalhamos juntos.

Também agradeço a muitas pessoas que não participaram da parte científica da tese, mas das quais a presença, apoio e amizade me proporcionaram a força e o equilíbrio necessários para me dedicar ao trabalho: minha família, meus colegas de turma na universidade, os funcionários do Instituto de Física, o pessoal do taekwondô, o pessoal do Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia, os amigos que me ajudaram com a edição desse trabalho. E também aos amigos queridos que não são de nenhum desses grupos.

Agradeço o apoio financeiro das entidades que possibilitaram a realização desse trabalho: a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (bolsa de iniciação científica, 1987) e o Conselho Nacional de Desenvolvimento e Pesquisa (bolsa de mestrado, 1988-90).

RESUMO

Adotando a abordagem sincrônica da relatividade restrita, este trabalho analisa a questão da atribuição de massa à energia potencial de acordo com a equação de Einstein ($E = mc^2$). Isso é feito através da análise de casos onde há interação entre sistemas eletromagnéticos extensos. São computados o momento ($\vec{p}$) e energia ($\vec{W}$) eletromagnéticos do sistema através da integração de suas densidades ($\vec{g} = \vec{S}/c^2$ e $\rho = (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu_0)/2$); também são computados efeitos relativísticos mecânicos que alteram a energia e momento mecânicos dos sistemas. Estes são calculados através de relações fundamentais entre grandezas dinâmicas.

Foram estudados apenas objetos com velocidade constante, e, neste caso, somando-se todos os efeitos (eletromagnéticos e mecânicos), conclui-se que não se deve associar uma massa à energia potencial.

Outra conclusão obtida é que para sistemas extensos em interação as grandezas dinâmicas não obedecem sempre às relações quadrivetoriais da dinâmica relativística de partículas. E também que a relação entre densidade de momento $\vec{g}$ e fluxo de energia $\vec{O}$, $\vec{g} = \vec{O}/c^2$, não é geral.

SUMÁRIO

Agradecimentos	II
Resumo	III
Prólogo (por R. A. Martins)	VII
<u>Capítulo 1</u> - INTRODUÇÃO	01
1.1 - Massa e energia potencial	01
1.2 - Metodologia do trabalho	11
<u>Capítulo 2</u> - DINÂMICA DE PARTÍCULAS LIVRES	15
2.1 - Notação utilizada	15
2.2 - Monopolo elétrico clássico no espaço livre de cargas e campos	18
2.3 - Monopolo magnético "clássico" no espaço livre de cargas e campos	32
<u>Capítulo 3</u> - MONOPOLO ELÉTRICO CLÁSSICO EM INTERAÇÃO COM UM CAPACITOR PLANO PARALELO INFINITO	38
3.1 - Técnica geral de cálculo para sistemas em interação	38
3.2 - Monopolo elétrico em movimento paralelo em relação às	

placas de um capacitor plano	43
3.3 - Monopolo elétrico em movimento perpendicular às placas de um capacitor plano	49
3.4 - Tensões de interação entre monopolo e capacitor	52
3.5 - Onda de tensão em um sólido rígido	57
3.6 - Monopolo elétrico em movimento oblíquo em relação às placas de um capacitor plano	68

Capítulo 4 - OUTRAS SITUAÇÕES DE INTERAÇÃO 77

4.1 - Monopolo magnético clássico em interação com um capacitor plano paralelo infinito	77
4.2 - Monopolo elétrico clássico em interação com um capacitor cilíndrico	85

Capítulo 5 - CONCLUSÃO 94

Apêndices

A - Monopolos elétrico e magnético livres	105
B - Monopolos em interação com o capacitor plano paralelo	

infinito	110
B1 - Movimento paralelo	110
B2 - Movimento perpendicular	115
B3 - Movimento oblíquo	117
C - Monopolo elétrico em interação com o capacitor cilíndrico	129
C1 - Caso paralelo	129
C2 - Caso perpendicular	139
D - Relações entre ângulos e distâncias no capacitor paralelo	144
E - Cálculo do momento associado à tensão para uma barra	146
<u>Referências</u>	148

PRÓLOGO

1. OBJETIVO

A fim de suplementar a presente dissertação, este prólogo apresenta um histórico que elucida ao leitor as origens das questões abordadas no trabalho, como também a problemática e os métodos empregados em seu desenvolvimento, situando-o em seu contexto. Leitores que não se interessem ou que já estejam familiarizados com o assunto poderão deixar de lado este Prólogo e passar diretamente ao Capítulo 1.

O problema central desta monografia é a relação entre massa e energia potencial para sistemas eletrodinâmicos extensos. Primeiramente, as seções 2 e 3 mostrarão a origem do conceito de massa eletromagnética, do período pré-relativístico até o desenvolvimento da formulação de Einstein. As seções 4 e 5 discutem os problemas específicos associados a sistemas extensos, em relatividade restrita; e a seção 6 dá um apanhado de problemas ainda em aberto na teoria da relatividade.

Este Prólogo estará repleto de referências a trabalhos antigos, pois a técnica adotada na tese leva à busca das fontes históricas para a compreensão e solução de problemas físicos. Há também trabalhos mais recentes relevantes citados, mas são os antigos que esclarecem e indicam um caminho para resolver a

questão.

2. HISTÓRICO DA RELAÇÃO MASSA-ENERGIA

No desenvolvimento da Teoria da Relatividade, ocorreram dois tipos de desenvolvimentos distintos, mas convergentes. Um foi o estudo das propriedades mecânicas da radiação eletromagnética (luz), que levou à relação massa-energia. Outro foi o estudo das propriedades mecânicas de uma carga elétrica em movimento, que levou à relação massa-velocidade. Vamos examinar, primeiramente, o histórico da primeira dessas linhas de investigação. Ela está relacionada às concepções de Faraday e Maxwell sobre o campo eletromagnético.

A idéia de que o campo eletromagnético, mesmo na ausência de matéria, tem realidade física e propriedades quantitativas foi defendida por Faraday e depois aproveitada por Maxwell em sua teoria eletromagnética.

Faraday afirma a realidade das linhas de força magnéticas, assim como das linhas de força elétrica (FARADAY, Experimental Researches, par. 3263), e indaga sobre sua natureza. Ele sugere que elas poderiam ser constituídas por "uma vibração do éter hipotético, ou um estado de tensão desse éter, equivalente a uma condição estática ou dinâmica; ou algum outro estado difícil de conceber..." (par. 3263); mas ele parece mais inclinado a aceitar a idéia de que as linhas de força seriam constituídas por tensões do meio - o "estado eletro-tônico" (par. 3269).

Através dessas idéias, Faraday enfatiza a importância do campo

em detrimento da idéia da ação à distância. As cargas, correntes elétricas, ímãs, etc. produziram linhas de força; mas seriam essas que realmente atuam e produzem todos os efeitos.

Maxwell adotou essencialmente as idéias de Faraday, procurando dar-lhes uma formulação matemática conveniente e a partir da qual fosse possível fazer previsões quantitativas definidas. Desde o início de seu tratado (MAXWELL, Treatise on electricity and magnetism), Maxwell adota a idéia de linhas de força de Faraday, a quem cita inúmeras vezes, e indica que adotará uma teoria em que a ação elétrica é um fenômeno de tensão do meio, ou tensão ao longo das linhas de força (MAXWELL, Treatise, par. 47-8). Por isto, Maxwell procura caracterizar os fenômenos eletromagnéticos através de grandezas distribuídas pelo espaço, e não concentradas em pontos. A energia eletrostática W de um sistema de cargas, no vácuo, por exemplo, era antes de Maxwell calculada sob a forma:

$$W = \frac{1}{2} \sum (eV)$$

onde são somadas as energias potenciais (eV) de todas as cargas.

Maxwell parte desta fórmula (par. 84) e obtém a expressão (par. 99a)

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV$$

onde se calcula a integral volumétrica da densidade de energia associada ao campo elétrico ($E^2/8\pi$) e que permite o cálculo da energia eletrostática pela integração de uma grandeza distribuída

de forma contínua por todo o espaço. Segundo essa expressão, todas as regiões do espaço onde exista campo elétrico contribuem no cômputo da energia total do sistema. Esta energia espalhada pelo espaço é, segundo Maxwell, essencialmente energia potencial estática (par. 630, 638) devida à distribuição de tensões do éter (par. 110), que são essencialmente as tensões das linhas de força de Faraday (par. 109).

É importante notar que, nessa visão, as cargas elétricas produzem o campo, mas a energia do campo não está nelas e sim distribuída pelo espaço.

Pela análise das tensões no éter, Maxwell prevê a existência de uma pressão produzida pelas ondas eletromagnéticas e calcula seu valor: a pressão longitudinal de uma onda plana é igual à sua densidade de energia defronte à superfície sobre a qual incide.

Antes do desenvolvimento da teoria de Maxwell, a procura de uma pressão produzida pela luz já possuía uma longa história. Nos séculos XVIII e XIX vários experimentadores haviam procurado detectar e medir um efeito desse tipo, sem resultados definidos (ver WHITTAKER, A history of the theories of aether and electricity, vol. I, p. 273).

Foi apenas em 1873 que Maxwell publicou seu tratado de eletricidade e magnetismo, com uma previsão teórica da pressão produzida pela luz solar. Independentemente, em 1876, Bartoli deduziu a fórmula da pressão da radiação a partir de um argumento puramente termodinâmico (BARTOLI, 1876): se a radiação não produzisse pressão, seria possível violar a segunda lei da termodinâmica. O argumento de Bartoli foi aperfeiçoado e

generalizado por Boltzmann e Galitzine (BOLTZMANN, 1884; GALITZINE, 1892). A coincidência entre as equações obtidas através do argumento termodinâmico geral de Bartoli e do modelo de tensões de Maxwell deu grande confiança ao resultado obtido. Por isto, não foi surpresa a posterior confirmação experimental do efeito de pressão de radiação por Lebedew e Nichols e Hull, em 1901 (LEBEDEW, 1901; NICHOLS e HULL, 1901, 1903).

Como, na teoria de Maxwell, a energia eletromagnética está distribuída pelo espaço, é claro que transferências de energia eletromagnética também são um fenômeno espacial extenso, e não ligado imediatamente a uma carga elétrica.

O estudo do fluxo da energia eletromagnética foi resolvido independentemente e quase ao mesmo tempo por Poynting e Heaviside (POYNTING, 1884; HEAVISIDE, 1885, 1892). O resultado obtido foi o famoso "teorema de Poynting", que determina o fluxo de energia ($\vec{S}$) em função dos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{H}$:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

O estudo da localização e fluxo da energia não só no eletromagnetismo mas também na teoria da elasticidade, hidrodinâmica, termodinâmica e gravitação foi desenvolvido mais tarde por Wien (1892), Mie (1898, 1899) e Volterra (1899).

A idéia de que o éter devia conter momento foi exposta pela primeira vez por J. J. Thomson (Recent Researchs, cap. 1), que atribui ao campo eletromagnético uma densidade de momento ($\vec{g}$) que, no vácuo, é proporcional ao vetor de Poynting ($\vec{S}$), e que, em geral,

é igual a:

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{D} \times \vec{B}$$

onde $\vec{D}$ é o deslocamento elétrico e $\vec{B}$ a indução magnética.

A introdução da quantidade de momento associada ao éter, por Thomson, permitia a conservação da quantidade de movimento de um sistema matéria + campo eletromagnético; se o éter não se movesse ele não poderia ter momento, e a lei da conservação do momento seria violada. Essa violação de fato ocorreu na teoria de Lorentz, em sua forma preliminar (LORENTZ, 1895).

Desejando manter o princípio da conservação do momento em interações eletromagnéticas, Poincaré (1900), em um importante trabalho, onde retomou a sugestão de Thomson, estabeleceu que a densidade de momento $\vec{g}$ seria sempre igual ao vetor de Poynting $\vec{S}$ dividido por c^2 : $\vec{g} = \vec{S}/c^2$. A partir daí, Poincaré sugere que a toda energia eletromagnética esteja associada uma massa, sendo a densidade dessa massa eletromagnética (ρ) igual à densidade de energia (ϵ) dividida por c^2 : $\rho = \epsilon/c^2$.

Poincaré também introduz a concepção de um momento angular associado a campos eletromagnéticos onde o vetor de Poynting formasse circuitos fechados. Atribui, além disso, uma quantidade de movimento $p = E/c$ a toda radiação eletromagnética dirigida, explicando assim, de outra forma, a pressão produzida pela radiação.

Neste trabalho de Poicaré encontra-se a relação entre massa e energia aplicada apenas à luz. Seria possível, a partir desse

resultado e utilizando o princípio da relatividade (que Poincaré já havia proposto), provar que $m = E/c^2$ vale também para partículas (IVES, 1952; ver também LEWIS, 1908).

É importante enfatizar que, aqui, o conceito de massa utilizado é o de "massa maupertuisiana" (LANGEVIN, 1913), dada pela razão entre momento e a velocidade: $m = |\vec{p}| / |\vec{v}|$.

Há outros conceitos de massa, na dinâmica (além dos conceitos de massa gravitacional ativa e passiva) A "massa acelerativa" pode ser definida a partir da relação $\vec{F} = m\vec{a}$.

Outro passo importante é dado por Hansenöhr, que realiza, em 1904, um estudo sobre a dinâmica de uma cavidade cheia de radiação (HANSENÖHRL, 1904). Ele parte de um trabalho de Abraham (1902) que estudara a pressão exercida pela radiação sobre superfícies em movimento. Abraham havia calculado o aumento de pressão da luz quando a superfície se move contra o movimento do feixe de radiação (ou seja, quando a superfície se aproxima da fonte), assim como para casos oblíquos.

Utilizando esses resultados, Hansenöhr estabelece que, quando uma cavidade cheia de radiação é acelerada, a pressão de radiação diminui na sua parte frontal e aumenta na parte de trás. Ou seja: a radiação exercerá uma força resultante para trás, sobre o corpo que a contém, quando esse corpo é acelerado. Portanto, é mais difícil acelerar um corpo oco com radiação do que sem radiação. Tudo se passa como se sua massa, com radiação, fosse maior.

Hansenöhr mostra também que a energia total da radiação na cavidade dependerá da velocidade do corpo; e que, para aumentar essa velocidade, é preciso fornecer certo trabalho extra que se

acumula na própria radiação. Ele calcula a massa associada à radiação de uma cavidade, supondo-a isotrópica. O resultado (a menos de um erro de integração, depois corrigido por Abraham) é:

$$m = \frac{4}{3} \frac{E}{c^2}$$

Neste trabalho, Hansenöhrli afirma explicitamente que a massa de um corpo depende de sua energia e da temperatura do sistema.

Pouco depois, Abraham escreve uma carta a Hansenöhrli (1905), apontando um erro de integração e mostrando que os mesmos resultados podiam ser obtidos, de forma mais simples, calculando-se o momento total da radiação e dividindo pela velocidade do sistema.

Note-se que aqui aparece o fator 4/3 na relação massa-energia. Mais adiante veremos que isso não é um erro.

É neste ponto da história que surge Einstein. Em 1905, ele publica seus primeiros trabalhos sobre a teoria da Relatividade. No primeiro (EINSTEIN, 1905a) não há menção à relação massa-energia. Em outro artigo (EINSTEIN, 1905b), é deduzido um caso particular da relação $E = mc^2$, a partir do qual é proposta a sua generalização; costuma-se indicar que o argumento de Einstein é incorreto, pois ele já pressupõe implicitamente o que queria provar (IVES, 1952). No ano seguinte, Einstein apresenta nova dedução da relação $\Delta m = \Delta E/c^2$, mostrando que um corpo que recebe ou emite radiação muda de massa (EINSTEIN, 1906).

O próximo passo fundamental é dado por Max Planck - que poucas vezes é reconhecido como um dos mais importantes responsáveis pelo

desenvolvimento da teoria da relatividade (ver GOLDBERG, 1976). Em 1907, ele publica um importantíssimo artigo (PLANCK, 1907) que foi o primeiro estudo da dinâmica relativística que não fazia uso de resultados provenientes da eletrodinâmica (até aqui, a dinâmica relativística era dependente do eletromagnetismo). Planck parte do princípio de ação mínima e, a partir de argumentos muito gerais, obtém a mecânica e a termodinâmica relativísticas. Um resultado deste artigo é essencial para nós: ele prova que a relação $E = mc^2$ não é geral: só vale para sistemas sem dimensões (pontos materiais) ou para sistemas extensos sem tensões. Para um sistema extenso submetido a uma pressão isotrópica, vale a relação de Planck: $m = H/c^2$, onde H é a entalpia do sistema ($H = E + PV$).

Na seção 4 serão apresentadas, de forma simplificada, os resultados de Planck e suas consequências.

Após o trabalho de Planck, o último passo fundamental foi dado por Max von Laue, que estabeleceu os fundamentos da dinâmica relativística de sistemas não isotrópicos (os quais Planck não estudou). Von Laue estabelece o tensor de densidade momento-energia-tensão e utiliza como base de toda sua dinâmica a relação entre densidade de momento $\vec{g}$ e fluxo de energia $\vec{\sigma}$ proposta por J. J. Thomson: $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$, generalizando-a para todas as formas de energia, a partir de uma sugestão de Planck (VON LAUE, 1911, 1912). A relação de Einstein ($E = mc^2$) torna-se, também aqui, apenas um caso especial, que não vale sempre. Em particular, no caso de um sistema com tensões oblíquas em relação ao seu movimento, o conceito de massa já não pode ser aplicado, pois o momento não é paralelo à velocidade (ou seja: não há um escalar que, multiplicado

pela velocidade, dê o momento do sistema).

A exposição mais geral, clara e conceitualmente correta sobre a relação massa-energia foi publicada, pouco depois, por Lorentz (1912; Lectures, vol. 3, cap. 12). Infelizmente, a maior parte dos livros-texto ignora esses trabalhos e seus resultados: tratam a relação de Einstein ($E = mc^2$) como se fosse totalmente geral.

1.3 - HISTÓRICO DA RELAÇÃO MASSA-VELOCIDADE

Voltemos agora um pouco atrás no tempo, a fim de estudar o desenvolvimento das idéias a respeito da dependência entre massa de partículas e sua velocidade. Novamente, o princípio se encontra em estudos pertencentes ao eletromagnetismo.

Em 1881 J.J. Thomson e, logo depois, Fitzgerald, procuraram calcular os campos elétrico e magnético associados a uma carga elétrica em movimento (THOMSON, 1881; FITZGERALD, 1881).

O resultado obtido por J.J. Thomson e por Fitzgerald era válido apenas para velocidades muito menores do que a da luz. Eles supunham que o campo elétrico de uma carga esférica ($E = e/r^2$) não era alterado pelo movimento da carga e calculavam o campo magnético gerado utilizando $\vec{H} = \vec{E} \times \vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da carga:

$$H = \frac{e}{c r^2} v \sin\theta$$

Se o campo elétrico não era alterado, sua energia também não mudava, sendo sempre igual a $e^2/2a$; mas a densidade de energia associada ao campo magnético crescia com o quadrado da velocidade

da carga. Essa densidade integrada sobre todo o espaço, resulta

$$W = \frac{e^2 v^2}{3 a c^2}$$

onde a é o raio da carga elétrica (considerada esférica).

Esta energia magnética devida ao movimento de uma carga elétrica era análoga à energia cinética, em dois sentidos: (i) como vimos, Maxwell, Thomson e outros acreditavam que o campo magnético estava essencialmente associado a movimentos do éter; (ii) a energia magnética de uma partícula aumentava, como a energia cinética comum ($\propto v^2$). Escrevendo-se

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{e^2}{a c^2} \right) v^2$$

podia-se interpretar a expressão entre parênteses, $m' = 2e^2/3ac^2$, como uma massa eletromagnética, que deveria ser adicionada à massa ordinária m de uma partícula carregada, para se calcular sua energia cinética total E_c :

$$E_c = \frac{1}{2} \left(m + \frac{2}{3} \frac{e^2}{a c^2} \right) v^2$$

Note-se que essa massa adicional corresponde a $4/3$ da energia eletrostática ($e^2/2a$) dividida por c^2 .

Essa massa adicional podia ser denominada, mais propriamente, "massa cinética" ou "capacidade de energia cinética" eletromagnética, adotando-se a nomenclatura de Poincaré e de Langevin (LANGEVIN, 1913).

Inicialmente, não se investigou se ao campo eletromagnético da carga também estaria associado um momento eletromagnético, nem se, no caso de ele existir, a massa maupertuisiana (p/v) seria igual à "massa cinética" eletromagnética ($2W/v^2$).

Em 1889, Heaviside obteve as equações exatas, através de um elegante uso do cálculo de operadores (HEAVISIDE, 1889) e J. J. Thomson deduziu-as novamente e confirmou seus resultados (THOMSON, 1889, 1891). Verificou-se que o campo elétrico de uma carga pontual em movimento era ainda radial, mas de módulo

$$E = \frac{e (1 - v^2/c^2)}{r^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}}$$

enquanto o campo magnético era constituído por linhas de força circulares em torno da direção do movimento da carga, e com módulo:

$$H = \frac{e v \sin \theta (1 - v^2/c^2)}{c r^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}}$$

Heaviside (Electromagnetic theory, I, par. 164, p. 269) mostrou que o campo externo de uma esfera uniformemente carregada de raio a é igual ao campo de uma linha eletrizada, de densidade de carga constante, e comprimento $2av/c$. O campo de uma carga pontual, por outro lado, era igual ao de um elipsóide de revolução cujo eixo, na direção do movimento, tivesse um comprimento menor do que o dos eixos transversais, na razão de $(1-v^2/c^2)^{1/2} : 1$, como foi mostrado por Searle (1896). Ele deu a este elipsóide o nome de "elipsóide de Heaviside".

Em seu artigo, Searle apresenta o cálculo exato da energia associada aos campos de um "elipsóide de Heaviside", verificando que a energia adicional não era proporcional a v^2 , para altas velocidades:

$$W = \frac{e^2 c^2}{2R} \left(\frac{c}{v} \log \frac{c+v}{c-v} - 1 \right)$$

A massa cinética eletromagnética adicional devia, portanto, depender da velocidade da partícula.

A massa eletromagnética associada a uma carga, calculada a partir da energia do campo, permite calcular o trabalho - e, portanto, a força - para aumentar ou diminuir a velocidade da carga; mas não permite avaliar a força que deve ser aplicada para mudar a direção do movimento da carga, sem alterar o módulo de sua velocidade, pois neste caso o cálculo da força só pode ser efetuado a partir de considerações de quantidades de movimento; e por isto, a introdução do momento associado ao campo era essencial para se calcular o desvio de elétrons em um campo magnético, por exemplo.

O primeiro cálculo do momento de uma carga em movimento foi realizado por Lorentz (1901), utilizando uma aproximação válida a baixas velocidades (ver GOLDBERG, 1969). O resultado obtido foi:

$$p = \frac{2 \mu_0 e^2}{3 a} v$$

e se interpretarmos o coeficiente de v como a massa inercial ("massa maupertuisiana") veremos que o resultado coincide com a massa cinética anteriormente calculada.

Utilizando-se a relação de Thomson e Poincaré entre fluxo de energia e densidade de momento, Abraham (1902, 1903) calculou de forma exata, para altas velocidades, a massa maupertuisiana de uma carga em movimento (ver GOLDBERG, 1970). Abraham supôs que a carga tem forma esférica invariável, e adotou duas alternativas: (i) uma carga elétrica distribuída homogeneamente por todo o volume da esfera; e (ii) uma carga elétrica superficial. Ele calcula (usando a expressão $\vec{F} = m\vec{a}$ para obter a massa, ao invés de $\vec{p} = m\vec{v}$) a massa longitudinal e a transversal da carga, que são diferentes.

Em 1904, Lorentz desenvolve os cálculos exatos para um elétron que se contraía pelo movimento, que não se dilate lateralmente e que só tenha carga superficial (LORENTZ, 1904). Obtém:

No primeiro artigo de Einstein, em 1905, ele deduz também expressões para a massa longitudinal e transversal.

No caso longitudinal, Einstein obtinha o mesmo resultado de Lorentz. No caso transversal, os resultados eram diferentes e, aliás, a equação de Einstein era incompatível com as medidas conhecidas. Em 1906, Planck corrige a dedução de Einstein, que passa a concordar com a de Lorentz (ver MILLER, Albert Einstein's special theory of relativity).

Note-se que, em todo esse desenvolvimento, houve certa confusão sobre como definir a massa e sobre a relação dos vários tipos de massa com a experiência.

4. DINÂMICA RELATIVÍSTICA DE SISTEMAS EXTENSOS

Na teoria da relatividade restrita (como todos os livros-texto), o momento p e a energia E de uma partícula são dados por

$$E = m c^2 = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

$$p = m v = \gamma m_0 v = \frac{E}{c^2} v$$

onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, m_0 é a massa de repouso e E_0 a energia de repouso da partícula. Tomando-se as três componentes do momento (p_x, p_y, p_z) e a quantidade iE/c , pode-se formar um quadrivetor

$$\left(p_x, p_y, p_z, \frac{iE}{c} \right)$$

cujo módulo é invariante

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \frac{E^2}{c^2} = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = - \frac{E_0^2}{c^2}$$

Isso só ocorre porque $p = (E/c^2)v$, para partículas.

Pode-se imaginar que todas essas relações são completamente gerais. No entanto, elas não são. Foi o estudo de Planck, de 1907, que mostrou as limitações dessas relações. Embora elas sejam válidas para partículas, não o são, em geral, para sistemas extensos.

Um "sistema extenso" é um objeto físico cujas dimensões não são desprezíveis. A termodinâmica, por exemplo, é construída para

sistemas que possuem volume não nulo e é, necessariamente, uma teoria de sistemas extensos. O mesmo se aplica à dinâmica de fluidos, que não faz sentido para um fluido de volume zero.

A abordagem de Einstein para a dinâmica do elétron considera-o como uma partícula sem dimensões - ao contrário das teorias de Abraham, Poincaré e Lorentz. A energia e o momento do elétron estão, por Einstein, dentro de um ponto material sem extensão, enquanto que, nas teorias de Abraham, Lorentz e Poincaré, a energia e o momento estão fora de uma partícula extensa. Essas diferenças podem parecer irrelevantes, mas veremos que são muito importantes.

No primeiro trabalho publicado por Einstein (EINSTEIN 1905a) sobre a teoria da relatividade, o elétron é considerado como um partícula não extensa, e sua dinâmica é desenvolvida de um modo muito simples, sem ser necessário operar com integração de grandezas distribuídas pelo espaço. Foi apenas ao considerar a relação entre massa e energia (EINSTEIN, 1905b) que Einstein começou a utilizar raciocínios relativos a corpos extensos. Por um lado, ele utiliza o conhecido - e discutível - raciocínio do recuo de um cilindro, para deduzir a relação $m = E/c^2$, com o uso da lei de conservação do centro de massa (STACHEL e TORRETI, 1982). Mas isso o leva a pensar sobre a aplicação de forças a corpos rígidos, e nesse caso já se torna claro que não deve valer sempre uma relação simples como $E = mc^2$ (EINSTEIN, 1907).

Em 1907, Max Planck, que já tinha então um importante papel no desenvolvimento da teoria da relatividade, publicou um longo artigo fundamental (PLANCK, 1907) com o qual nasceu a dinâmica de corpos

extensos. Nesse artigo Planck deduz toda a dinâmica e a termodinâmica relativística, de forma muito elegante, a partir do princípio de ação mínima, fazendo uma adaptação relativística do método anteriormente empregado por Helmholtz na dinâmica e na termodinâmica clássicas.

Neste trabalho, Planck estuda apenas sistemas físicos que possam ser caracterizados completamente, no seu referencial próprio, por duas grandezas termodinâmicas; apenas se incluem aqui, portanto, sistemas submetidos a uma pressão isotrópica. Dentre os importantes resultados dinâmicos obtidos, Planck provou que a entalpia $H = E + PV$ (onde P é a pressão e V é o volume) obedece à relação

$$\frac{H}{\gamma} = H_0 = \text{cte.}$$

e que o momento de um sistema extenso é dado por

$$\vec{p} = \frac{H}{c^2} \vec{v}$$

Portanto, a grandeza H/c^2 tem, na dinâmica relativística de Planck, o papel de massa inercial maupertuisiana.

$$m_i = \frac{H}{c^2} = \frac{E + P V}{c^2}$$

Somente no caso de um sistema extenso sem pressão externa ($P = 0$) obtém-se os resultados que são válidos na dinâmica de pontos materiais. Pode-se dizer que a mais importante modificação que a

teoria dos corpos extensos introduz na dinâmica relativística é a lei de proporcionalidade entre massa inercial e entalpia (lei de Planck), em substituição à lei de proporcionalidade entre massa inercial e energia (lei de Einstein) que só vale para partículas e sistemas sem pressão externa.

Os resultados de Planck foram citados e adotados por Einstein em um trabalho de revisão publicado no mesmo ano (EINSTEIN, 1907). No entanto, Einstein sempre continuou a considerar como fundamental a proporcionalidade entre massa e energia; este é, certamente, o motivo pelo qual até hoje todos os textos didáticos apenas enfatizam conceitualmente a lei de Einstein, mesmo nos casos em que utilizam equações que traduzem a lei de Planck.

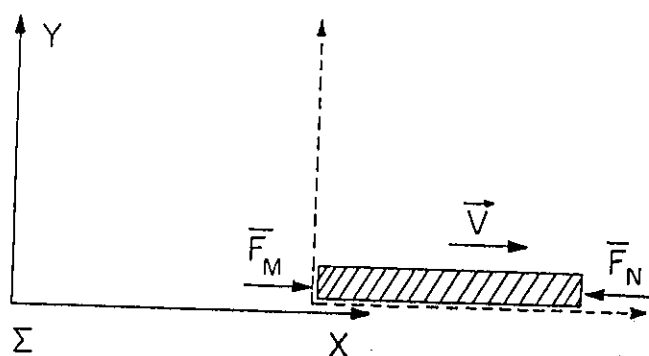
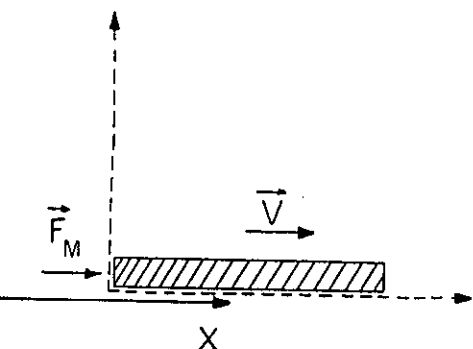
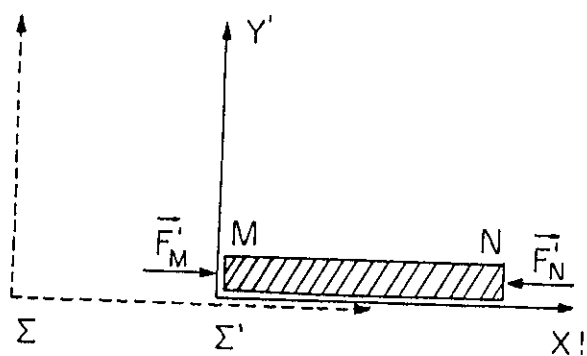
As relações básicas da dinâmica sincrônica de corpos extensos podem ser obtidas pelo estudo de exemplos muito simples, seguindo-se o método empregado por Einstein (EINSTEIN, 1907) e por Lorentz (LORENTZ, 1912, 1931).

Consideremos um sistema extenso que possa ser considerado como um sólido rígido. Se utilizarmos o seu referencial próprio, as leis da estática clássica serão válidas, em um espaço-tempo minkowskiano. Assim, se forem aplicadas forças em vários pontos do corpo rígido, e se tanto a força resultante quanto o torque resultante forem nulos no referencial próprio, então o sistema permanecerá em equilíbrio. Se inicialmente ele estava em repouso e sem rotação, ele assim continuará, após a aplicação das forças, desde que todas elas sejam aplicadas simultaneamente nesse referencial. Se, no referencial próprio, as forças não forem aplicadas simultaneamente, e a força resultante (ou o torque

resultante) não for nula durante certo tempo, o sistema começará a girar ou a se transladar, isto é, alterará seu estado cinemático.

Se a aplicação das forças é simultânea no referencial próprio, ela não o será, em geral, em relação a um outro referencial. Em relação a esse outro referencial, portanto, haverá um intervalo de tempo durante o qual o sistema está submetido a uma resultante não nula, ou a um torque não nulo, e estará portanto alterando seu momento linear ou angular, e também sua energia. No entanto, como a aplicação simultânea das forças no referencial próprio mantém o sistema em equilíbrio, ele não pode começar a girar ou mudar a sua velocidade. Portanto, a aplicação de forças externas a um corpo extenso pode alterar suas grandezas dinâmicas (momento linear e angular, energia) sem que suas velocidades (linear, angular) sejam modificadas. Este é um aspecto estranho mas inevitável da relatividade de corpos extensos.

Consideremos o caso simples de uma barra rígida, em cujas extremidades são aplicadas (simultaneamente, no referencial próprio) duas forças simétricas, paralelas ao comprimento da barra. Seja Σ' o referencial próprio da barra, e Σ um outro referencial em relação ao qual a barra se desloca com velocidade paralela ao seu comprimento (movimento longitudinal), na direção do eixo x . Sejam M e N as extremidades da barra, sendo $x'_M < x'_N$.



O comprimento próprio da barra é $L' = x'_M - x'_N$. No referencial próprio as duas forças F'_M e F'_N são aplicadas no mesmo instante $t'_M = t'_N$. No referencial impróprio a diferença entre os instantes de aplicação das forças é obtida pela aplicação da lei de Lorentz:

$$t_M - t_N = \gamma v \frac{x'_M - x'_N}{c^2} = \gamma \frac{v L'}{c^2}$$

onde v é a velocidade da barra em relação a Σ . Se $v > 0$, $t'_N > t'_M$, isto é, a força é aplicada em M antes de ser aplicada em N.

Durante o tempo $\Delta t = t_M - t_N$ apenas a força $\vec{F}_M$ estava aplicada à barra. Portanto, durante esse tempo, essa força deve ter transmitido à barra um impulso igual a $\vec{F}_M \Delta t$. No instante t_N a outra força é aplicada na outra extremidade da barra, e a partir desse instante a força resultante é nula, e portanto não há mais variação do impulso da barra. Portanto, após t_N , o momento linear da barra é constante.

Seja m'_c a massa inercial da barra, no sistema próprio, antes da aplicação das forças. Nesse caso, a barra é ainda um sistema isolado, e sua massa se transforma como a de uma partícula. Portanto, em relação a Σ sua massa inicial m_0 era igual a:

$$m_0 = m'_c \gamma$$

e seu momento linear era

$$\vec{p}_0 = m_0 \vec{v} = m'_c \vec{v} \gamma$$

No entanto, com a aplicação das forças, a barra sofreu uma variação de momento igual ao impulso recebido, e após t_N seu momento é igual a

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F}_M \Delta t$$

Consideremos o caso em que $\vec{F}_M$ e $\vec{v}$ são paralelos e possuem o mesmo sentido (caso em que as forças comprimem a barra)). Nesse caso, temos

$$\vec{p} = \left(m'_c + \frac{F L'}{c^2} \right) \vec{v} \gamma$$

onde $F = |\vec{F}_M| = |\vec{F}_N|$. De acordo com a transformação relativística de forças longitudinais, temos $F' = F$, e portanto

$$\vec{p} = \left(m'_c + \frac{F' L'}{c^2} \right) \vec{v} \gamma$$

Portanto, para efeito de cálculo do momento da barra, tudo se passa como se a massa de repouso da barra tivesse sofrido um aumento proporcional a seu comprimento e à tensão. Se definirmos a massa inercial como a razão entre o momento e a velocidade do sistema (massa maupertuisiana), teremos sempre $\vec{p} = m \vec{v}$ e portanto a massa da barra comprimida, no caso longitudinal, será o coeficiente de velocidade na equação acima, ou seja,

$$m = \left(m'_c + \frac{F' L'}{c^2} \right) \gamma$$

Considerando o limite de m quando a velocidade tende a zero, obtemos no referencial próprio uma massa inercial efetiva igual a

$$m' = m'_c + \frac{F' L'}{c^2}$$

Observe-se que, embora tenha sido preciso utilizar o sistema de referência Σ na dedução, o resultado obtido acima refere-se à massa própria da barra; ou seja: quando a velocidade tende a zero,

o efeito de variação de massa por compressão não tende a zero.

Podemos dizer portanto que a massa inercial efetiva de uma barra rígida aumenta quando ela é submetida a forças de compressão, no caso longitudinal. Se as forças fossem distensoras ao invés de compressoras, o sinal de F' seria alterado e teríamos então uma redução de massa.

É importante notar que a variação de massa inercial própria $F'L'/c^2$ não é devida a uma energia transmitida pelas forças à barra. Foi utilizada a suposição de que a barra era rígida, ou seja, suas dimensões não se alteram significativamente por compressão, e portanto não há realização de trabalho elástico no referencial próprio.

Consideremos agora a energia da barra. Antes da aplicação das forças, sua energia total era, no sistema próprio Σ' :

$$E'_c = m'_c c^2$$

e no sistema impróprio Σ :

$$E_o = m_o c^2 = m'_c c^2 \gamma$$

Durante o intervalo de tempo de aplicação das forças, em relação ao referencial Σ , apenas a força $\vec{F}_M$ atua durante o tempo Δt . Durante esse tempo a força realiza um trabalho proporcional a seu deslocamento:

$$\Delta W = \vec{F}_M \cdot \vec{v} \Delta t$$

No caso em que a força e a velocidade possuem o mesmo sentido (compressão da barra) obtemos

$$\Delta W = F' L' \beta^2 \gamma$$

Logo, em relação a Σ , a energia total E da barra, após t_N , será

$$E = E_0 + \Delta W = \left[m'_c + \frac{F' L' \beta^2}{c^2} \right] c^2 \gamma$$

Portanto, para o cálculo da energia da barra, tudo se passa como se a massa de repouso da barra tivesse sofrido um aumento: se quisermos escrever $E = m c^2$, teremos que considerar a massa $m' = (m'_c + F' L' \beta^2) \gamma$, ou seja, a compressão longitudinal da barra teria produzido um aumento de massa igual a $F' L' \beta^2 \gamma$. Observe-se que esse aumento é diferente do obtido no cálculo do momento; e ele tende a zero quando a velocidade da barra em relação ao referencial Σ tende a zero. Ou seja: para baixas velocidades, a aplicação de uma tensão à barra não altera significativamente sua energia, mas altera seu momento. O aumento de momento não é proporcional a seu aumento de energia. Por isso, para uma barra submetida a tensão, não podemos escrever simultaneamente $\vec{p} = m\vec{v}$ e $E = mc^2$. Apenas uma dessas equações pode ser mantida. Na mecânica newtoniana a massa inercial aparece primariamente associada à quantidade de movimento, através da relação $\vec{p} = m\vec{v}$. É natural, na teoria da relatividade, procurar manter essa relação, conforme a

proposta de Planck. Assim, para uma barra submetida a forças longitudinais em movimento longitudinal, temos uma massa própria $m' = m'_c + F'L'/c^2$ e uma energia própria $E' = m'_c c^2 \neq m' c^2$.

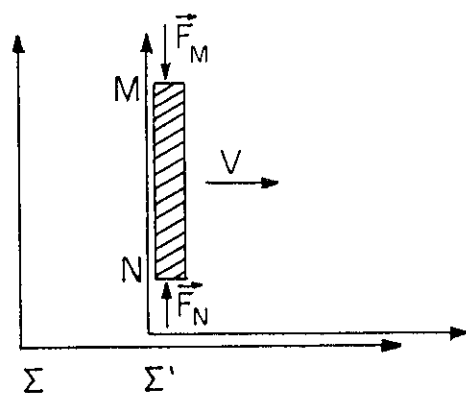
Este é um caso particular em que a lei de proporcionalidade entre massa e energia (lei de Einstein) não é válida.

Pode-se ver, nesse caso, que

$$E^2 - p^2 c^2 = c^4 \left[m_c'^2 - \beta^2 \left(\frac{F' L'}{c^2} \right)^2 \right]$$

é uma função de $\beta = v/c$, e portanto não é invariante. Logo, não se pode mais formar, neste caso, um quadrivetor com as componentes do momento e iE/c .

Consideremos agora o caso de uma barra cujo movimento é perpendicular a seu comprimento (movimento transversal), em relação ao seu referencial impróprio Σ .



Agora, se as forças são aplicadas simultaneamente no referencial próprio Σ' , elas também serão simultâneas no referencial Σ , como se pode ver pela aplicação das transformações de Lorentz, pois os pontos de aplicação das forças possuem mesma

coordenada x . Assim sendo, nenhum impulso é transmitido à barra durante a aplicação das forças, e seu momento não se altera. Como a velocidade da barra não pode ter sofrido alteração, a sua massa inercial, definida como o quociente do momento pela velocidade, permanece constante. Ou seja: tensões transversais ao movimento de um sólido não alteram sua massa inercial. É óbvio que, nesse caso, o trabalho realizado pelas forças sobre o corpo é nulo, já que as forças são perpendiculares ao deslocamento. Não há variação da energia da barra, nem fluxo de energia produzido pelas forças externas aplicadas transversalmente ao movimento.

Consideremos agora um cubo de arestas L' , sobre cujas faces atue uma pressão externa P' . Consideremos que ele se desloque, em relação a um referencial Σ , paralelamente a um certa aresta. Apenas as forças paralelas a essa aresta influirão na massa do cubo. Se a massa inicial própria do cubo (antes da aplicação da pressão) era m'_c , após a aplicação da pressão a massa m' será

$$m' = m'_c + \frac{L'F'}{c^2}$$

Como a área de cada face é $S' = L'^2$ e como a força F' em cada face é $F' = P'L'^2$, temos

$$m' = m'_c + \frac{P'V'}{c^2}$$

O termo $P'V'/c^2$ será positivo se as forças externas comprimem o cubo. Se as forças externas forem distensivas, o termo será negativo. A equação anterior é válida não só no caso do cubo, mas

no de qualquer sólido submetido a uma pressão externa uniforme.

Como, no referencial próprio, a energia do corpo não se altera pela pressão, temos $E' = m'_c c^2$, e portanto

$$m' = \frac{E' + P'V'}{c^2}$$

ou seja, como $E'+P'V'$ é a entalpia própria do sistema, obtemos a lei de Planck para o referencial próprio:

$$m' = \frac{H'}{c^2}$$

Usando as transformações das quantidades envolvidas, temos, em relação a outro referencial,

$$H = \gamma H'$$

e, portanto, em relação a qualquer referencial é válida a relação de Planck

$$m = \frac{H}{c^2}$$

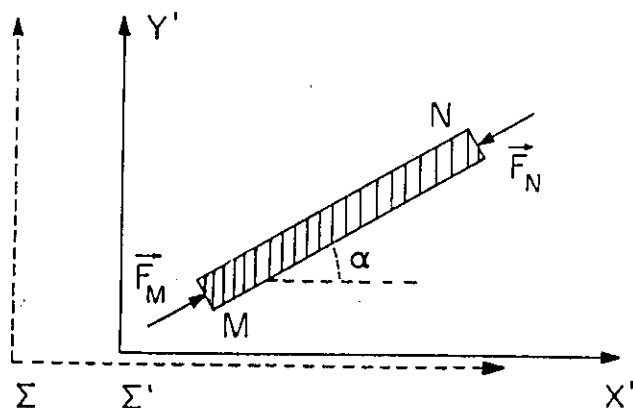
Ao considerarmos, por exemplo, um gás de fótons, obtemos

$$m' = \frac{4}{3} \frac{E'}{c^2} \approx \frac{E'}{c^2}$$

Esse resultado já fora obtido antes do desenvolvimento da

relatividade restrita, por Hasenöhrl (1904). Obtém-se o mesmo resultado, em primeira aproximação, para qualquer gás relativístico ($c-v \ll c$).

Em todos estes casos, o momento do sistema era paralelo à sua velocidade. Mas isso não é válido em outros casos. O caso mais simples é o de uma barra que se move obliquamente em relação a seu comprimento, e em cujas extremidades são aplicadas forças longitudinais. Seja α' o ângulo formado pela barra com o eixo x' , no referencial próprio.



Se as extremidades da barra são M e N, a projeção do comprimento da barra no eixo x será

$$x'_N - x'_M = L' \cos \alpha'$$

onde L' é o comprimento próprio da barra. Se as forças comprimem a barra, as componentes da força $\vec{F}'_M$ serão:

$$F'_{Mx} = F' \cos \alpha'$$

$$F'_{My} = F' \operatorname{sen} \alpha'$$

Em relação ao referencial impróprio Σ , o intervalo de tempo entre os instantes de aplicação das forças a N e M será

$$\Delta t = t_N - t_M = \gamma \frac{(L' v \cos \alpha')}{c^2}$$

Durante esse intervalo de tempo a barra recebe um impulso cujas componentes são:

$$\Delta p_x = F_{Mx} \Delta t$$

$$\Delta p_y = F_{My} \Delta t$$

De acordo com a transformação relativística de forças, $F_{Mx} = F'_{Mx}$ e $F_{My} = F'_{My}/\gamma$. Portanto, temos:

$$\Delta p_x = \gamma \frac{F' L' \cos \alpha'}{c^2} v$$

$$\Delta p_y = \frac{F' L' \operatorname{sen} \alpha'}{c^2} v$$

Nesses casos não é possível definir-se uma massa inercial escalar pela relação $\vec{p} = m\vec{v}$.

Como se pode ver por esse exemplo, mesmo em situações relativamente simples o estudo de corpos extensos leva a resultados pouco intuitivos e complexos. Foram justamente esses resultados que

levaram, no caso de corpos extensos, a abandonar o formalismo quadrivetorial e a introduzir o tensor de densidade de momento-energia-tensão, que permite sintetizar de forma matemática elegante todas as propriedades de transformação e relações entre essas grandezas. Nos casos mais gerais, o conceito de massa inercial perde a utilidade, e por isso apenas se utiliza o tensor. Somente no caso de uma pressão uniforme é possível obter-se um análogo à massa inercial clássica, isotrópica.

É lamentável que esses antigos resultados da dinâmica relativística continuem a ser ignorados mesmo por grandes autoridades (BONDI e SPURGIN, 1987; DOMBEY, McCREA e ROUSSEAU, 1987), que continuam a repetir que a massa e a energia sempre obedecem à relação $E = mc^2$.

Os resultados obtidos até aqui podem também ser deduzidos de outra forma. Como já vimos (secção 1.2), em 1893, J.J Thomson introduziu no eletromagnetismo a relação entre densidade de momento ($\vec{g}$) e fluxo de energia ($\vec{\phi}$) do campo eletromagnético:

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{\phi}$$

Essa relação foi utilizada por Poincaré e depois por Planck (1908) para todos os tipos de energia. Pode-se provar que ela se aplica a um gás de partículas livres; ela pode também ser aplicada ao caso da barra rígida.

Pode-se atribuir o aumento de momento da barra comprimida ao fluxo de energia que a atravessa, em relação ao referencial impróprio. Em relação a esse referencial, após o instante t_N , as

forças aplicadas às duas extremidades da barra estão produzindo trabalhos iguais em módulo, mas de sinais opostos. No caso de compressão, a força aplicada a M produz um trabalho positivo ($\vec{F}_M \cdot \vec{v} > 0$), e $\vec{F}_N$ produz um trabalho negativo. Pode-se dizer que, no regime estacionário, um fluxo de energia é introduzido na barra em M e retirado em N. O fluxo de energia σ é igual a

$$\sigma = \frac{F v}{S}$$

onde S é a seção reta da barra.

Para calcular-se o momento associado a esse fluxo de energia, devemos conhecer o volume atravessado por esse fluxo, e que não é igual ao volume do sólido. De fato, o tempo gasto pelo fluxo de energia para ir de M até N deve ser igual ao intervalo de tempo entre as aplicações das forças nesses pontos, ou seja, deve ser igual a $t_N - t_M = \Delta t$. Durante esse tempo o fluxo de energia atravessa uma distância igual a $L + \Delta x$, ou seja

$$d = L + \Delta x = L + v \Delta t = L + \gamma \beta^2 L = \gamma^2 L$$

Portanto, o volume que deve ser considerado será

$$V = S d = S \gamma^2 L$$

Agora podemos calcular o momento associado ao fluxo de energia mecânica através da barra:

$$\Delta p = g V = F v \gamma^2 \frac{L}{c^2} = \gamma \frac{F' L'}{c^2} v$$

Obtém-se assim um resultado concordante com o obtido anteriormente.

Embora seja útil e tenha, neste caso, levado ao resultado correto já deduzido antes, não há nenhuma base teórica para se supor que a relação entre $\vec{g}$ e $\vec{\sigma}$ é válida sempre. Planck supôs que isso ocorresse, mas não provou isso. Deve-se, portanto, ser cuidadoso em seu uso. Na seção 3.5 da tese será mostrado que ela não é totalmente geral.

5. TENSOR DE MOMENTO-ENERGIA-TENSÃO

Como vimos na seção anterior, o momento e a energia de um corpo extenso não formam em geral um quadrivetor. No entanto, é possível considerá-los como componentes de um tensor.

Há diferentes formas de introduzir este tensor. O modo clássico de fazê-lo consiste em definir o significado físico de suas componentes:

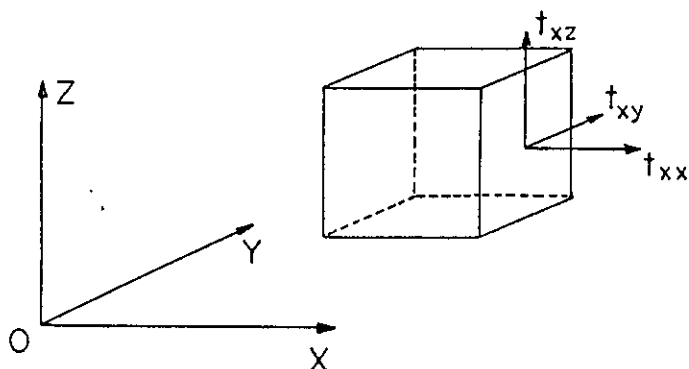
$$T_{ij} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} & ic\epsilon_x \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} & ic\epsilon_y \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} & ic\epsilon_z \\ i\frac{\sigma_x}{c^2} & i\frac{\sigma_y}{c^2} & i\frac{\sigma_z}{c^2} & -\epsilon \end{pmatrix}$$

onde o tensor espacial $t_{\alpha\beta}$ é o tensor mecânico clássico tridimensional de tensões; ϵ_α é a densidade da componente α do momento; σ_α é o fluxo de energia por uma superfície perpendicular à direção α e ϵ é a densidade de energia. Esse tensor descreve um sistema extenso, através de suas propriedades por unidade de volume.

O tensor espacial de tensões mecânicas $t_{\alpha\beta}$

$$t_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix}$$

tem suas componentes definidas da seguinte forma: o primeiro índice indica a normal ao plano sobre o qual age a tensão, e o segundo índice indica a direção da tensão.



de onde se obtém as componentes associadas às densidades de momento e de energia

$$T_{\alpha 4} = i c g_{\alpha} = i (P + \epsilon_0) \frac{\gamma^2}{c} v_{\alpha}$$

$$T_{44} = - \epsilon = - (\epsilon_0 + P \beta^2) \gamma^2$$

Recordando que o volume $V = V'/\gamma$, obtém-se

$$p_{\alpha} = (E + P'V') \frac{\gamma^2}{c} v_{\alpha}$$

$$E = (E + P'V'\beta^2) \gamma$$

em perfeita concordância com os resultados obtidos anteriormente pela análise detalhada. A técnica matemática dos tensores permite obter, de forma automática, os resultados da dinâmica relativística de sistemas extensos, e portanto o tensor de momento-energia comumente empregado tanto na relatividade restrita quanto na relatividade geral é válido se e somente se essa dinâmica relativística de sistemas extensos for válida.

Observe-se que, do modo como o tensor foi definido no início desta seção, a condição para que ele possa ser simétrico é que $icg_{\alpha} = i\sigma_{\alpha}/c$, ou seja, $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$. Se essa relação for sempre válida (e se o tensor clássico de tensões for sempre simétrico), o tensor será simétrico. Inversamente, se o tensor for sempre simétrico, então $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$ é sempre válido.

Kantor (1954) justifica a simetria desse tensor por analogia com o caso eletromagnético. De fato, essa foi a origem histórica do tensor. Mas "analogia" não proporciona uma prova. Synge (Special Relativity, cap. VIII) estuda inicialmente um gás ideal e constrói o tensor provando que é simétrico, para esse caso de um sistema de partículas. No entanto, ele indica (pag. 287) que, se o tensor não fosse simétrico, a relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$ não seria válida. Posteriormente, ele trata o caso geral (pag. 309) e impõe a condição de simetria do tensor (pag. 310), sem deduzi-la. Pauli (Theory of Relativity, cap. 3) afirma que o tensor é sempre simétrico por uma generalização a partir do tensor eletromagnético e do tensor mecânico (pag. 124-5). A partir disso, ele considera a relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$ como um teorema. Wheeler (Gravitation, cap.5) define o tensor e mostra o significado de suas componentes, afirmando que é sempre simétrico (pag. 138); mas ao apresentar uma "prova" da simetria utiliza como pressuposto que a relação $E = mc^2$ é válida sempre (pag. 141). Nota-se que em todas essas apresentações (e outros exemplos poderiam ser dados) há uma falha de fundamentação da teoria.

Tolman (Relativity, Thermodynamics and Cosmology, par. 37) evita esse problema. Ele não descreve o significado das componentes mistas do tensor da forma que fizemos. Ele parte do sistema de referência próprio, no qual essas componentes são nulas; e considerando que o tensor clássico de tensões é simétrico, obtém um tensor geral simétrico, no qual atribui a mesma interpretação a $T_{\alpha\beta}$ e $T_{\beta\alpha}$, sem associar um deles ao fluxo de energia e o outro à densidade de momento. Este é um modo de escapar da dificuldade.

Apesar da possibilidade de seguir o caminho de Tolman, a

formulação mais comum do tensor de momento-energia estabelece em sua definição que os $T_{4\alpha}$ correspondem ao fluxo de energia e os $T_{\alpha 4}$ às densidades de momento; portanto, a simetria do tensor depende da validade da relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$.

6. PROBLEMAS EM ABERTO

Os aspectos até aqui expostos da teoria relativística de sistemas extensos correspondem à visão mais tradicional e usual, iniciada por Planck. No entanto, não houve, ao longo das décadas, unanimidade a respeito dessa teoria. Nesta seção veremos alguns problemas ainda discutidos da teoria relativística de sistemas extensos.

6.1. AS DUAS DINAMICAS DE SISTEMAS EXTENSOS

Existem duas abordagens diferentes da dinâmica relativística de corpos extensos. A primeira delas, a mais antiga, foi desenvolvida por Planck, Einstein, von Laue e outros, no início do século. É a utilizada na maior parte dos livros-texto de relatividade, e é a empregada na relatividade geral e nos trabalhos teóricos de astrofísica e cosmologia relativística. Essa abordagem recebe atualmente o nome de "sincrônica".

Após a década de 1960, essa abordagem mais antiga começou a ser questionada. Os trabalhos críticos de Arzeliès, continuados por Gamba e outros autores, mostraram a existência de pontos obscuros e possíveis falhas na teoria sincrônica, e levando à elaboração de

uma abordagem diferente, que recebe o nome de "assincrônica".

Os nomes "teoria (ou abordagem) sincrônica" e "teoria (ou abordagem) assincrônica" foram propostos pela primeira vez por Cavalleri e Salgarelli, em 1969, tornando-se após isso geralmente aceitos.

A diferença entre as duas teorias foi esclarecida por Gamba (1975, 1977) e por Cavalleri e Salgarelli (1969): trata-se do próprio processo de definição das grandezas de sistemas extensos. Consideremos, por exemplo, um sistema físico F composto por um conjunto de partes em interação, em diferentes posições do espaço. Cada uma das partes tem, em instantes diferentes, valores variáveis de uma determinada grandeza.

Os cálculos sincrônico e assincrônico de uma grandeza G aditiva associada a uma sistema extenso podem ser representados simbolicamente da seguinte forma:

$$G_S = \sum_i G_i(t)$$

$$G_A = \sum_i G_i(t')$$

onde os G_i representam os valores da grandeza de cada parte i do sistema. No caso sincrônico (G_S), todos os valores G_i referem-se ao mesmo instante t medido em um referencial qualquer Σ . No caso assincrônico (G_A), os G_i referem-se ao mesmo instante t' medido em Σ' , o referencial de centro de massa do sistema, isto é, as medidas serão realizadas sincronicamente em relação ao referencial de interesse.

À primeira vista, uma simples diferença no modo de definir-se as grandezas associadas a sistemas extensos não deveria levar a consequências importantes. No entanto, dependendo da abordagem utilizada, chega-se a resultados completamente diferentes no estudo de sistemas extensos em que há alguma interação entre as partes. No caso, por exemplo, de um fluido submetido a pressão externa, as duas abordagens levam a diferentes equações de transformação para a energia e quantidade de movimento do sistema.

Foi em 1965 que Arzeliès iniciou sua crítica à abordagem sincrônica. Nessa época, Arzeliès estava envolvido com a elaboração de uma série de livros sobre a teoria da relatividade, e isso o levou a repensar vários problemas fundamentais da relatividade restrita - em particular, a formulação da termodinâmica relativística. Essas preocupações acabaram conduzindo-o a concentrar-se no estudo do paradoxo de Lewis e Tolman da alavanca dobrada em L , por acreditar que seria necessário compreender melhor a dinâmica de corpos extensos, e que a chave para essa compreensão era a análise de exemplos simples. Ele publicou então um artigo (1965) em que criticou a análise de von Laue sobre o equilíbrio da alavanca em L , deixando clara a importância de se considerar a simultaneidade em um ou outro referencial. Logo depois ele publicou um outro artigo sobre termodinâmica relativística (1965) onde estudou a dinâmica da barra rígida, propondo substituir as relações sincrônicas de energia e momento pelas relações assíncrônicas. Nessa nova dinâmica de corpos extensos proposta por ele, o momento e a energia de qualquer sistema, esteja ele submetido ou não a pressões externas, sempre obedecem às mesmas relações

relativísticas de uma partícula:

$$E = m c^2 = \gamma m_0 c^2$$

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

e as componentes do momento formam por isso, juntamente com a energia, um quadrivector, mesmo no caso de sistemas extensos (o que não ocorre na teoria ortodoxa).

Não podemos discutir aqui os interessantes aspectos desse conflito. Ele serve, no entanto, para evidenciar que nem tudo o que faz parte da teoria da relatividade é aceito consensualmente por todos os relativistas - há problemas em aberto.

6.2. AS ABORDAGENS DA TERMODINÂMICA RELATIVÍSTICA

O objetivo da termodinâmica relativística é a determinação das equações termodinâmicas que sejam válidas qualquer que seja o estado de movimento do sistema termodinâmico em relação ao observador.

O problema básico na elaboração de uma termodinâmica relativística é a determinação das equações de transformação das grandezas básicas. Assim como a cinemática relativística sai basicamente das transformações de Lorentz; e a dinâmica relativística, da cinemática mais as transformações das variáveis dinâmicas (E , p , m , ...); da mesma forma, se soubermos como a temperatura, o calor, a entropia e outras grandezas termodinâmicas

variavam de um referencial para outro, saberemos construir uma termodinâmica relativística.

Este problema começou a ser abordado, historicamente, antes do surgimento da teoria de Einstein. Vários autores, como Abraham, Lorentz, Poincaré, e principalmente Hansenöhr, procuraram estudar um corpo negro em movimento em relação a um referencial. Como o corpo negro era um sistema bem conhecido, esperava-se através de sua análise obter resultados que pudessem ser aplicados a outros casos (HANSENÖHRL, 1904,1905).

Em 1906, inspirado por Hansenöhr, embora discordando dele em vários pontos, um aluno de Planck, Kurd von Mosengeil, escreveu uma tese sobre a teoria do corpo negro em movimento, utilizando as teorias de Lorentz e Einstein. Pouco depois, Mosengeil faleceu, mas seu trabalho foi reunido e publicado pelo próprio Planck (MOSENGEIL, 1907)

Neste longo artigo, ao estudar radiação de corpo negro, ele obtém várias expressões incorretas.

Na oitava seção do artigo, Mosengeil procura chegar a uma transformação de temperatura estudando um ciclo de Carnot realizado entre dois corpos negros em movimento relativo que funcionam como fonte de calor e como fonte fria, que trocam calor isotermicamente. Conclui primeiramente, baseando-se em Abraham, que a temperatura se transforma como (MOSENGEIL, 1907, 893)

$$T = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{2}{3}} T_0$$

Depois, por outro raciocínio, em que leva em conta

transformações das equações de Planck do corpo negro, ele obtém:

$$T = \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} T_0$$

O trabalho de Mosengeil, apesar de sua importância histórica, não pode ser considerado o primeiro trabalho básico da termodinâmica relativística. Foi Planck, em 1907, quem obteve pela primeira vez um sistema de transformações das grandezas termodinâmicas, que ele deduz sem necessitar dos detalhes das equações do corpo negro. Ele obtém

$$T = T_0 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$dQ = dQ_0 \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$S = S_0$$

Os resultados de Planck foram imediatamente adotados por Einstein (1907) e depois, foram utilizados por Max von Laue em seu tratado de relatividade, de onde quase todos os autores posteriores reproduzem os argumentos e resultados.

Esta formulação da termodinâmica desenvolvida por Planck e outros é a abordagem considerada "ortodoxa" ou "clássica", e serviu de base para a teoria termodinâmica em campos gravitacionais, desenvolvida principalmente por Tolman.

Até trinta anos atrás, não se colocava em questão a validade dessa formulação da termodinâmica relativística. No entanto, em

1963, foi publicado um artigo póstumo de H. Ott (1963) onde eram propostas transformações de temperatura e calor totalmente diferentes das de Planck:

$$T = \frac{T_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dQ = \frac{Q_o}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$S = S_o$$

O artigo não chamou muita atenção inicialmente, mas pouco tempo depois Arzeliès publicou uma série de artigos onde não só criticava a termodinâmica relativística ortodoxa, mas também colocava em questão a estática relativística de von Laue e Einstein e a dinâmica relativística de meios contínuos. Na área da termodinâmica relativística pode-se dizer que há atualmente várias posições:

- (1) A termodinâmica de Planck é correta;
- (2) A termodinâmica de Ott é correta;
- (3) Ambas termodinâmicas (de Planck e de Ott) são corretas;
- (4) Só se deve estudar as grandezas termodinâmicas no referencial de centro de massa (Landsberg).

Este é também um campo controvertido, na teoria relativística de sistemas extensos.

6.3. PRESSÃO DA RADIAÇÃO EM MEIOS TRANSPARENTES

Na teoria eletromagnética de Maxwell (A treatise on electricity and magnetism) apareceu pela primeira vez uma clara predição quantitativa da pressão produzida por uma onda eletromagnética que atinge uma superfície. No caso de uma onda plana, Maxwell obteve (Treatise, par. 792) uma pressão de radiação igual à densidade de energia total (incidente mais refletida) fronteira à placa refletora.

No caso de ondas eletromagnéticas em um meio material, a questão não era tão simples quanto no caso do vácuo. Um trabalho de Helmholtz, publicado em 1881, continha a teoria básica da eletrodinâmica dos meios materiais, mas não chegava a estudar campos variáveis. Poynting, em 1905, associou à radiação em um meio transparente a pressão $P = n\epsilon$, onde n é o índice de refração do meio, baseando-se em raciocínios ondulatórios gerais. Lorentz (1904) forneceu uma teoria eletrodinâmica dos meios materiais, mas não preocupou-se especificamente com o problema do momento associado à radiação, nesse caso.

Em 1908, Minkowski publicou a primeira teoria relativística completa da eletrodinâmica em meios materiais. Nesse trabalho, Minkowski associa a um campo eletromagnético qualquer uma densidade de momento $\vec{g}_M$ dada por

$$\vec{g}_M = \frac{\vec{D} \times \vec{B}}{c}$$

O trabalho de Minkowski foi criticado por Abraham (1910) que

ressaltou o caráter assimétrico do tensor de energia e momento do campo eletromagnético proposto por Minkowski. De fato, considerando um fluxo de energia igual ao vetor de Poynting $\vec{S}$,

$$\vec{S} = \vec{S} = c (\vec{E} \times \vec{H})$$

O único modo de se montar um tensor simétrico de momento e energia do campo eletromagnético com $T_{i4} = T_{4i}$, é fazendo-se $\vec{g} = \vec{S}/c^2$, e atribuindo-se ao campo uma densidade de momento igual a $\vec{E} \times \vec{H}/c$, ao invés de $\vec{D} \times \vec{B}/c$. Por esse motivo, Abraham 1909, 1910) propôs substituir a teoria de Minkowski por outra teoria, também relativística, com densidade de momento dada por

$$\vec{g}_A = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c}$$

No vácuo, as duas teorias levam ao mesmo resultado. Mas em um meio transparente não dispersivo com índice de refração n , o momento de um pulso de energia eletromagnética com energia E seria

$$p_M = \frac{n E}{c}$$

de acordo com a teoria de Minkowski, e

$$p_A = \frac{E}{n c}$$

de acordo com a teoria de Abraham.

Após pequena discussão teórica, as duas teorias foram

incorporadas a livros-texto. Abraham publicou sua própria teoria no seu popular tratado de eletromagnetismo (1914), e sua abordagem foi apoiada mais tarde por Pauli (1904-22) e por Landau (1966). A abordagem de Minkowski foi favorecida por von Laue (1919), Page e Adams (1940), Panofski e Phillips (1962), Møller (1972), e acabou por receber o apoio de Pauli em uma reedição inglesa de sua monografia (1958).

Em 1950 o assunto estava quase morto. A maior parte dos autores favorecia Minkowski e o momento $p_M = nE/c$, mas não se publicavam artigos sobre o assunto. Nessa época, von Laue publicou um artigo (1950) em que procurava provar que a teoria de Minkowski era a única aceitável, e isso produziu como reação um grande número de artigos sobre o assunto. Essa retomada do problema produziu uma inversão da tendência geral, com grande favorecimento da teoria de Abraham.

Do ponto de vista dos estudos eletromagnéticos, pode-se dizer que a discussão posterior a 1950 levou à convicção de que a teoria de Abraham é a mais aceitável, e que a densidade de momento é dada por $\vec{E} \times \vec{H}/c$ (ROBINSON, 1975, BURT e PEIERLS, 1973, ARNAUD, 1974). No entanto, ficou claro que não há uma conexão tão direta quanto se imaginava antes entre as grandezas teóricas e grandezas microscópicas mensuráveis (GORDON, 1973) e que as duas teorias levam a predições experimentais quase idênticas. De fato, embora o momento da radiação, na teoria de Abraham, seja menor do que na teoria de Minkowski, surge na teoria de Abraham um momento do meio atravessado pela radiação, que deve ser adicionado a este no cálculo de efeitos macroscópicos, e isso faz com que as previsões

sejam semelhantes.

Apesar de observações posteriores e testes experimentais, essa é ainda uma questão não resolvida e que tem estreita relação com questões discutidas na presente tese e, em particular, a relação entre densidade de momento e fluxo de energia.

Como Burt e Peierls mostraram (1973), toda a argumentação a favor de Abraham reduz-se a defender a simetria do tensor de momento-energia do campo eletromagnético; e o argumento fundamental a respeito dessa simetria é que só ela possibilita a relação

$$\vec{g} = \frac{\vec{\sigma}}{c^2}$$

entre densidade de momento e fluxo de energia.

Pode-se criticar de modo muito forte a própria validade geral da relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$, utilizando-se os conhecimentos experimentais disponíveis. Pensemos neste problema da radiação em um meio transparente. Todos os autores concordam que a radiação não cede energia ao meio transparente, em uma situação estacionária (um feixe luminoso contínuo, sem absorção, após o período preliminar). Posto isso, todo o fluxo de energia deve ser identificado ao fluxo da energia eletromagnética da onda. Aceitando-se isso, os defensores de Abraham chegam à conclusão de que o momento da radiação é $p_A = E/(nc)$. No entanto, para explicar os efeitos mecânicos da radiação, eles consideram que o meio transparente contribui com um momento $p' = p_M - p_A = (E/c)(n-1)/n$. Eles devem portanto aceitar que o meio material tem uma densidade de momento sem no entanto conduzir qualquer fluxo de energia. Ou seja: para

manter-se, na teoria de Abraham, a relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$, para a radiação, é necessário abandonar essa mesma relação para a matéria. Logo, a relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$ não é totalmente geral, e pode-se portanto colocar-se aos defensores de Abraham a questão: se ela não é válida para a matéria, por que motivo seria válida para o campo eletromagnético? Isso cria ainda um problema formal gravíssimo: não se poderia criar uma teoria da matéria com um tensor de momento-energia simétrico, se aceitarmos a teoria de Abraham, pois como ela exige que a relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$ seja violada para a matéria, quando esta é percorrida por radiação eletromagnética, segue-se que, pelo menos em alguns casos, o tensor de momento-energia da matéria teria que ser assimétrico.

Este e outros problemas que poderiam também ser expostos mostram quantas dificuldades existem na teoria relativística de sistemas extensos. Mostram também que este é um terreno onde há muita coisa a ser feita e que não é inútil esclarecer do modo mais claro possível algum ponto dessa teoria.

Roberto de Andrade Martins

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - MASSA E ENERGIA POTENCIAL

O problema a ser discutido nesta tese é a relação entre massa e energia potencial. Quando uma carga elétrica se move em um campo externo, sua energia potencial é uma função de sua posição no campo. E sua massa? Dependerá da energia potencial? Pode-se imaginar que a relação $E = mc^2$ deve se aplicar à energia potencial e, nesse caso, a massa dependeria da energia potencial. Mas, como mostrado no Prólogo, a relação de Einstein entre massa e energia ($E = mc^2$) não é geral; e mesmo outras relações mais gerais ($\vec{g} = \vec{v}/c$) apresentaram limitações.

Nos casos em que um sistema esteja interagindo com um campo externo, não se pode afirmar, sem análise detalhada do problema, se continua válida a relação massa-energia, pois o modo como essa relação é deduzida na teoria da relatividade não garante que ela possa ser aplicada a sistemas em interação.

Consideremos um corpo eletrizado, em movimento, em um dado campo eletromagnético. Será sua massa própria alterada pelo campo externo? Se o for, de que maneira se pode calcular essa alteração?

Esse problema, embora fundamental, tem sido pouco discutido na

literatura. A rigor, para se interpretar as próprias experiências de deflexão de elétrons, no início do século, seria preciso previamente responder a essa pergunta, pois não se pode assumir a priori que a massa calculada para uma partícula livre seja igual à massa da partícula em um campo externo. Mas esse problema não foi levado em conta pelos autores que discutiram essas experiências, na época. No trabalho fundamental de Abraham sobre a dinâmica do elétron essa limitação é explicitada, embora aparentemente sem ser considerada um problema. Abraham trata o elétron como se estivesse sozinho no espaço.

Essa simplificação não é uma particularidade do modelo de Abraham: todos os modelos eletromagnéticos do elétron sofriam a mesma idealização. Supunha-se que essa massa era a mesma, quando o elétron interagia com um campo externo. Obviamente, nada garantia que isso fosse válido.

Após o desenvolvimento da relatividade restrita, alguns pesquisadores devem ter refletido sobre esse problema; mas a concordância entre o modelo simplificado e a experiência recomendava que se mantivesse essa idéia, e que portanto não se levasse em conta qualquer influência do campo externo na massa das partículas. Von Laue, em 1911, faz uma curiosa observação, afirmando que as energias que não se deslocam junto com o corpo em questão não devem ser consideradas no cálculo de sua massa. Mas ele não indica como se pode aplicar essa idéia vaga a situações físicas concretas (LAUE, 1911, pag. 149-50).

Outros autores da época nem tocam no assunto. Em artigos de revisão sobre a relação entre massa e energia publicados em torno de 1910, não se discute essa questão (HANSENÖHRL, 1909; LORENTZ,

1912; LANGEVIN, 1913). Em um artigo de Tolman encontra-se uma frase sugestiva: "*Se, além das partículas, o sistema também contém massa distribuída continuamente pelo espaço (por exemplo, massa correspondente à energia potencial), podemos escrever...*" (TOLMAN, 1914, PAG. 574). A frase parece indicar que se pode associar massa à energia potencial, mas Tolman não desenvolve a idéia.

Ao se estudar o movimento de um elétron atômico, no campo nuclear, seria preciso, em princípio, discutir essa questão, o que não é feito por Sommerfeld ao desenvolver a teoria relativística do átomo de Bohr (SOMMERFELD, 1916,).

Em 1922, Wilson estudou possíveis efeitos devidos à variação da massa do elétron com sua energia potencial. Ele analisou uma modificação da teoria de Sommerfeld, em que supunha que uma parcela $f/2$ da energia potencial do elétron em um átomo caminhava com ele (WILSON, 1922a). Concluiu que haveria alterações na constante de estrutura fina. O valor experimental e o valor teórico de Sommerfeld, não concordavam exatamente (havia uma diferença de 20%). Wilson ajustou os valores de f segundo os dados experimentais e concluiu que 10% da energia move-se com o elétron, no átomo. Apesar de servir para este ajuste com a experiência, não há justificativa teórica para esse valor de 10%.

Em outro artigo (WILSON, 1922b), Wilson estudou também a influência desse mesmo efeito hipotético em experiências de deflexão de elétrons por núcleos atômicos, tentando igualmente melhorar a concordância entre teoria e experiência pela introdução dessa hipótese. Neste trabalho Wilson supõe que a energia de interação eletrostática W_p entre duas cargas elétricas, estaria distribuída em partes iguais entre as duas cargas e que a cada

parte se pode associar uma massa que se some à massa de repouso do elétron.

Ele mostrou que essa suposição leva aos mesmos resultados que o processo usual de cálculo. A concordância da teoria relativística usual com os resultados experimentais não indica portanto que se deve excluir dos cálculos a massa associada à energia potencial, pois muitos resultados podem independender dessa suposição.

Sem citar esses precedentes, Louis de Broglie, em sua famosa tese (BROGLIE, 1925), chamou atenção para esse problema.

Falou com clareza sobre a dificuldade de se lidar com "porções não isoladas" de energia, e que era uma questão não elucidada na teoria da Relatividade até aquela época. Citou o caso da massa do sistema próton + elétron ser menor que a massa das partes isoladas e questionou a distribuição de porções da energia potencial entre as partes do sistema, para tentar explicar o fenômeno. Questionou também o rigor teórico da não atribuição de massa à energia potencial nas teorias do átomo de Bohr e Sommerfeld, embora, se esta fosse levada em conta, seria uma correção ínfima perto da correção feita por Bohr ao considerar o arrastamento do núcleo (BROGLIE, 1925, pag. 69-70).

No caso do sistema próton + elétron, se a massa inercial é aditiva mesmo nesses casos, então é preciso admitir que a massa do elétron, ou a do próton, ou ambas, dependem do potencial; só assim o sistema conseguiria ter uma massa menor que a massa das partes isoladas. De Broglie assinala, por fim, que a questão pode ser submetida a um teste experimental, não se tratando de uma mera questão de interpretação. No entanto, ele não apresenta uma solução.

Em 1931 realizou-se uma experiência bastante direta para testar a existência de um possível efeito de potencial elétrico sobre a massa do elétron. Kennedy e Thorndike colocaram uma lâmpada de mercúrio dentro de uma gaiola de Faraday cujo potencial elétrico (em relação ao solo) podia ser variado até 53000 V. O comprimento de onda da raia 5461 emitida pelo mercúrio era medido, fora da gaiola de Faraday, em local cujo potencial elétrico era nulo (em relação ao solo), através de um interferômetro de Michelson. A sensibilidade do arranjo permitia notar variações de comprimento de onda de $1,7 \times 10^{-9}$. Foram feitos 34 pares de medidas (KENNEDY e THORNDINE, 1931), nos quais os pequenos efeitos observados eram da ordem dos desvios experimentais ($\Delta\lambda/\lambda \cong 10^{-14}/\text{volt}$).

Os autores não fazem nenhuma estimativa teórica do efeito previsto (pois, na verdade, estavam apenas utilizando uma analogia com o "red shift" gravitacional). Mas é fácil avaliar a ordem de grandeza do presumível efeito. A fórmula "clássica" dos níveis de energia de uma átomo hidrogenóide é:

$$E = - \frac{m Z^2 e^2}{2 h^2 n^2 (1 + m/M)}$$

Suponhamos que a variação do potencial externo altere (em sentidos contrários) tanto a massa do elétron (m) quanto a do núcleo (M). A massa do núcleo é, pelo menos, 1836 ($\cong$ massa do próton/massa do elétron) vezes a massa do elétron e, portanto, a variação de massa do núcleo terá um pequeno efeito nos níveis de energia (nos núcleos maiores há nêutrons, o que aumenta essa razão). O efeito importante será a variação da massa do elétron; e como os níveis de energia são proporcionais a esse fator, teríamos

$\Delta\lambda/\lambda = - \Delta\nu/\nu = - \Delta E/E = - \Delta m/m$. Se a variação de massa fosse igual a eV/c^2 , teríamos, para um potencial de cerca de 50000 V, $\Delta m/m \cong 0,1$ e $\Delta\lambda/\lambda \cong 0,1$ - o que seria 100000000 de vezes maior do que o observado. Portanto, a energia potencial parece não ter alterado a massa dos elétrons, nesse experimento.

Esse experimento, depois completamente esquecido, não resolve todos os problemas. Quando um núcleo atômico (ou um átomo) se forma, a partir de seus constituintes, a massa final é menor que a massa dos constituintes e, usualmente, se atribui essa diferença à energia potencial. Como conciliar esses dois resultados?

Durante várias décadas, esse problema parece ter sido esquecido. Quase 30 anos atrás, no entanto, Léon Brillouin, pouco antes de sua morte, chamou novamente a atenção para essa questão, em uma série de artigos e em um livro.

Em um de seus artigos (BRILLOUIN, 1964), começa afirmando que os fundadores da Relatividade silenciam sobre a questão da atribuição de massa à energia potencial.

Ele estuda a distribuição de energia no campo de um sistema de cargas elétricas constituído por duas cargas em repouso. Integrando a densidade de energia eletrostática do campo resultante, mostra de forma imediata que há um termo de interação que dá a energia potencial $W_p = QQ'/r_0$, onde r_0 é a separação entre as duas cargas Q e Q' . Na teoria eletromagnética, deve-se considerar que energia distribuída por todo o espaço em torno das cargas. Brillouin diz que "*parece lógico admitir que a massa da energia potencial é distribuída igualmente entre as cargas Q e Q'* " (BRILLOUIN, 1964).

Mais tarde, o próprio Brillouin mudou de opinião sobre esse ponto (BRILLOUIN, 1970).

René Lucas, ao apresentar à Academia Francesa o trabalho de Brillouin, publicou ao mesmo tempo uma nota de sua autoria, onde propõe localizar a energia potencial nas próprias cargas (LUCAS, 1964). Para isso, ele associa a toda densidade de carga ρ uma densidade de energia potencial ϵ dada por:

$$\epsilon = \frac{V \rho}{2}$$

onde V é o potencial externo, no ponto considerado. A partir dessa relação, ele conclui que a energia potencial de um sistema de duas cargas distribui-se sempre em partes iguais, mesmo se as cargas e seus raios são diferentes. Este é um método mais claro do que o de Brillouin; mas inaplicável ao estudo de uma carga em movimento, pois, nesse caso, é importante levar em conta a energia do campo magnético gerado em torno da carga.

Brillouin apresentou posteriormente sua concepção com maior clareza em outros artigos, e adicionou importantes observações:

- a) a influência da energia potencial na massa própria não é levada em conta nas teorias relativísticas do átomo, e esse efeito introduziria uma alteração na constante de Rydberg (como Wilson e de Broglie já haviam observado antes);
- b) para o caso de uma partícula em movimento no campo de uma outra partícula parada, seria necessário considerar a superposição do campo eletrostático da segunda com o campo eletrodinâmico relativístico da primeira, para calcular-se a energia do campo resultante (mas Brillouin não faz esse cálculo);
- c) um elétron colocado em uma região de potencial muito elevado, produzido por exemplo por um gerador de van der Graaf, poderia ter

uma massa de repouso muito superior à sua massa "padrão", e poderia até mesmo ter massa negativa (BRILLOUIN, 1965a, 1965b).

Posteriormente, ao discutir a mesma questão em um livro, Brillouin revê suas idéias sobre a distribuição de energia potencial entre duas cargas. Aparentemente, Dicke o convenceu de que suas idéias sobre a variação de massa eram incompatíveis com a experiência (BRILLOUIN, 1970, pag. 25). Agora, ele assume que a carga de menor raio deve ter associada a ela uma maior parcela da energia potencial, pois o campo em torno dela é mais intenso; e que, no caso de uma carga dentro de um envoltório metálico eletrizado, toda a energia potencial deve ser localizada no envoltório externo.

Vê-se que Brillouin mudou radicalmente sua posição, entre 1965 e 1970, o que mostra quão delicada é a questão.

Em 1967, Zink publicou uma nota (ZINK, 1967) em que cita Brillouin e discute o papel da energia potencial no átomo de hidrogênio. Mas a única conclusão que se pode tirar do seu trabalho é que, se associarmos ao elétron uma massa adicional devida à energia potencial, essa massa não depende da velocidade.

Em 1968, Palacios propõe uma dinâmica quase relativística (mas decididamente heterodoxa) em que calcula a massa de uma partícula adicionando-lhe suas energias: interna, cinética e potencial (PALACIOS, 1968). Isso altera as equações de movimento de uma partícula em um campo externo. Palacios cita Brillouin, e discorda dele. Palacios conclui que, no referencial de centro de massa, os trabalhos a serem realizados sobre as partículas para aproximá-las ou afastá-las a baixa velocidade serão inversamente proporcionais às suas massas, como seus deslocamentos, e que portanto a energia

potencial também deve ser distribuída de modo inversamente proporcional à massa própria das partículas.

Após os trabalhos de Brillouin, chegou-se a aplicar o mesmo tipo de raciocínio a interações gravitacionais, e até mesmo à interação entre monopolos magnéticos, obtendo-se também nesses casos certas massas associadas à energia potencial, dividida em partes iguais entre os sistemas interagentes (LUCAS, 1969).

Contrariamente a todos esses autores, Arzeliès adota a posição de que a energia de interação só deve ser computada no cálculo do sistema como um todo; para cada partícula, a energia de interação não deveria ser levada em conta (ARZERLIÈS, 1972, pag. 220). Como evidência favorável à sua posição, Arzeliès indica que a teoria do átomo de Bohr conduz a bons resultados, sem levar em conta a massa associada à energia potencial; mas Arzeliès comete um erro de várias ordens de grandeza, nesse ponto de sua análise, ao avaliar a correção correspondente, nesse caso.

Quase 50 anos após a sua tese, Louis de Broglie voltou a discutir esse problema (BROGLIE, 1972), motivado pelos estudos de Brillouin. De Broglie distribui a energia potencial de interação entre duas partículas da mesma forma que Palacios,

$$\frac{W_{12}}{M_1 + M_2} = \frac{W_1}{M_1} = \frac{W_2}{M_2}$$

e justifica essa escolha, também, pela conservação da posição do centro de massa do sistema. Além disso, tenta mostrar que a atribuição de uma massa adicional às partículas é satisfatória, sob o ponto de vista da dinâmica e das transformações relativísticas.

A distribuição de energia potencial proposta por de Broglie

(equação acima) foi aceita por Lucas, que a aplicou ao estudo de fenômenos de interação gravitacional (LUCAS, 1976), tentando explicar dessa forma os testes clássicos da relatividade geral.

O artigo mais recente sobre o assunto parece ser de 1976. Seus autores, Cavalleri e Spinelli, citam de Broglie, Brillouin e Palacios. Como Arzeliès, eles adotam a posição de que a energia potencial não deve ser levada em conta no cálculo da massa própria das partículas (CAVALLERI e SPINELLI, 1976). Ao justificar essa opinião, confundem a variação da energia eletromagnética em função da velocidade com a energia irradiada por uma carga acelerada. Na verdade, nos modelos eletrodinâmicos do elétron, calcula-se sua massa eletromagnética supondo-se inicialmente que ele está em movimento retilíneo uniforme, e supõe-se que o resultado é válido, em primeira aproximação, mesmo nos casos em que a partícula está acelerada, desde que a aceleração seja pequena (ABRAHAM, 1903). O cálculo da energia irradiada quando um elétron sofre uma variação rápida de velocidade (SEARLE, 1907) não é levado em conta no cálculo da massa do elétron; portanto, Cavalleri e Spinelli simplesmente confundiram problemas bem distintos.

Como lição geral a ser tirada desse histórico deve-se notar que as grandes discorências entre os vários autores que discutiram o assunto e que os raciocínios simplistas e vagos utilizados nas argumentações, mostram que ainda se tateia no escuro ao discutir a questão da massa associada à energia potencial. Existe, portanto, um interessante problema pendente que merece uma discussão mais aprofundada e se possível com o uso de argumentação baseada em fundamentos teóricos mais sólidos do que os até agora empregados.

Esta é a motivação geral da presente tese.

1.2 - METODOLOGIA DO TRABALHO

Esta tese pretende esclarecer duas questões: a validade do carácter quadrivetorial do vetor de momento-energia para sistemas extensos e a validade da associação de uma massa à energia potencial, através da relação clássica de Einstein $E = m c^2$.

Trataremos essas equações através da análise de casos onde há interação eletromagnética entre sistemas extensos.

Um corpo carregado tem um campo eletromagnético, e a esse campo são associadas densidades de momento e energia, dadas respectivamente pelas relações (dadas no Sistema Internacional de Unidades, S.I.):

$$\vec{g} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2}$$

e

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{D}^2}{\epsilon_0} + \mu_0 \vec{H}^2 \right)$$

onde $\vec{D}$ é o deslocamento elétrico, $\vec{E}$ o campo elétrico, e $\vec{H}$ o campo magnético.

No vácuo essas expressões ficam

$$\vec{g} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0 c^2}$$

e

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right]$$

onde $\vec{B}$ é a indução magnética.

A integração por todo o espaço dessas densidades nos dá o acréscimo de momento e energia atribuídos ao corpo devido ao campo eletromagnético que ele emite.

A análise das tensões mecânicas que atuam no corpo leva à atribuição de momento e energia mecânicos adicionais a este corpo (na abordagem sincrônica da relatividade restrita), como já foi visto no exemplo da barra rígida com movimento longitudinal.

Somando esses momentos e energias adicionais ao momento e energia primitivos do sistema estudado, verifica-se se momento e energia totais continuam obedecendo às relações usuais da dinâmica relativística de partículas.

O primeiro caso a ser estudado é o de uma esfera rígida não condutora com densidade superficial uniforme de carga elétrica; semelhante ao elétron clássico de Lorentz (LORENTZ, 1904b), com a diferença de que este é uma esfera condutora. Esse caso já foi tratado no artigo supra citado. Mas será tratado aqui detalhadamente para que 1) o leitor fique a par dos cálculos analíticos envolvidos nesse caso acerca da questão estudada e 2) nos casos tratados subsequenteemente, que serão dessa esfera em interação com outras configurações de carga, já se utilizem expressões obtidas para a esfera (seus campos, energia, momento, ...) sem ter que novamente deduzi-las; assim estudam-se nesses casos só os efeitos devidos à interação ds partes que formam o sistema.

O segundo caso estudado é um hipotético monopolo magnético clássico, que, semelhante ao caso anterior, é uma esfera rígida com carga magnética uniformemente distribuída sobre sua superfície. Este é um caso interessante de se estudar, pois, apesar de violar a segunda lei de Maxwell ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), é uma situação onde a energia potencial é nula.

Em seguida serão tratados os casos de interação entre os monopolos elétrico e magnético já tratados e diferentes configurações de carga (que chamaremos capacitores) que limitem o campo que produzem a uma certa região do espaço.

Por que estudar interação e porque as fontes do campo com o qual o campo do monopolo interage deve ter essas características?

A resposta à primeira pergunta é porque quando há duas fontes eletromagnéticas interagindo, além do momento e energia devido ao campo de cada uma das configurações isolada, há energia e momento que são devidos exclusivamente à interação entre os campos (pode-se verificar isso nas expressões para ρ e $\vec{g}$ colocando o campo total resultante como a soma vetorial de dois campos: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$; $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$). Como ambas as configurações possuem densidade de carga, cada uma também sofre tensões mecânicas que são devidas à força gerada em sua carga superficial pelo campo eletromagnético da outra configuração. A análise dessas tensões leva à possível atribuição de momento e energia às tensões que são geradas pela interação. Estuda-se a interação, portanto, porque há efeitos relativísticos adicionais unicamente devidos à ela, e é necessário verificar se com esses efeitos novos continuam ou não válidas as relações relativísticas usuais para o sistema como um todo.

Quanto à forma das configurações geradoras do campo com o qual

o monopolo interage, deve ser tal que limite o campo a determinadas regiões para que as densidades de energia e momento devidas à interação dos campos eletromagnéticos permitam integrais analíticas definidas (não divergentes). Se as grandezas devidas à interação divergem, a comparação entre elas fica sem sentido. E a questão da relação $E = m c^2$, como fica? Será estudada também através dos casos de interação. Aí ocorre o fato de uma das partes do sistema possuir uma energia potencial relativa à outra (e vice-versa), pois ambas as partes produzem campo e, por possuírem carga, estão sujeitas ao campo eletromagnético uma da outra.

DINÂMICA DE PARTÍCULAS LIVRES

2.1 - NOTAÇÃO UTILIZADA

Este trabalho utiliza uma notação que não é usual e que por isso será esclarecida inicialmente.

A notação aqui utilizada facilita bastante o trabalho com a relatividade restrita, pois esclarece de imediato em relação a que referenciais são medidas as grandezas. Segundo essa notação, uma grandeza qualquer (massa, momento, energia...) é representada por uma letra característica da grandeza e mais dois índices, da seguinte forma:

$${}_A^S{}_B$$

onde o índice à esquerda (A) indica o referencial em relação ao qual a grandeza é medida e o índice à direita (B) indica o ente a que se refere a grandeza (partícula, corpo extenso, ou um outro referencial).

Exemplos

$$\begin{aligned} {}_A^m{}_P &= \text{massa de "P" medida no referencial "A"} \\ {}_P^m{}_P &= \text{massa de "P" medida no referencial "P"} \\ &\quad \text{(o referencial próprio)} \end{aligned}$$

${}_A v_P$ = velocidade de "P" em relação a "A"

Normalmente os referenciais estão associados a certos entes físicos e a mesma letra que identifica esse ente serve para identificar o referencial. Por exemplo: se A é um corpo, ${}_A m_B$ é a massa de B em relação ao referencial próprio de A; inversamente, ${}_B m_A$ é a massa do corpo A no referencial próprio de B (e não a massa do referencial de A, é claro).

Antes de começar a apresentar os resultados serão escritas as transformações de coordenadas de Lorentz e as conseqüentes transformações dos campos elétrico e magnético com a nova notação. Essas relações são básicas para o tratamento dos casos a serem apresentados. Elas relacionam grandezas medidas por dois referenciais "A" e "P" que têm movimento relativo a velocidade constante.

Seja a velocidade de "A" em relação a "P" ${}_P v_A$ na direção x. Consequentemente a velocidade de "P" em relação a "A" é ${}_A v_P = -{}_P v_A$ (na mesma direção)

As transformações de Lorentz são:

$${}_A x = \gamma ({}_P x + {}_A v_P {}_A t)$$

$${}_P x = \gamma ({}_A x + {}_P v_A {}_A t)$$

$${}_A y = {}_P y$$

$${}_P y = {}_A y$$

(2.1.1)

$${}_A z = {}_P z$$

$${}_P z = {}_A z$$

$${}_A t = \gamma ({}_P t + \frac{{}_A v_P}{c^2} {}_P x)$$

$${}_P t = \gamma ({}_A t + \frac{{}_P v_A}{c^2} {}_A x)$$

$$\text{onde } \gamma = (1 - \frac{v_A^2}{c^2})^{-1/2} \quad (2.1.2)$$

x, y e z são as coordenadas espaciais de um sistema cartesiano destrógiro e t é o tempo

As transformações para as componentes do campo elétrico $\vec{E}$ e da indução magnética $\vec{B}$ ficam (ver LORRAIN & CORSON, Electromagnetic fields and waves, pag. 126)

$$\begin{aligned} {}_A E_x &= {}_P E_x & {}_P E_x &= {}_A E_x \\ {}_A E_y &= \gamma ({}_P E_y + \frac{v_A}{c} {}_P B_z) & {}_P E_y &= \gamma ({}_A E_y + \frac{v_A}{c} {}_A B_z) \\ {}_A E_z &= \gamma ({}_P E_z - \frac{v_A}{c} {}_P B_y) & {}_P E_z &= \gamma ({}_A E_z - \frac{v_A}{c} {}_A B_y) \\ {}_A B_x &= {}_P B_x & {}_P B_x &= {}_A B_x \\ {}_A B_y &= \gamma ({}_P B_y - \frac{v_A}{c} {}_P E_z) & {}_P B_y &= \gamma ({}_A B_y - \frac{v_A}{c} {}_A E_z) \\ {}_A B_z &= \gamma ({}_P B_z - \frac{v_A}{c} {}_P E_y) & {}_P B_z &= \gamma ({}_A B_z - \frac{v_A}{c} {}_A E_y) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Também há necessidade de explicar que, como primeiro serão tratados os monopolos elétrico e magnético e depois os mesmos em interação com o capacitor, os campos dos monopolos terão (a fim de diferenciá-los) um sub-índice superior zero. Esse sub-índice não deve nunca ser confundido com potenciação. Nesse trabalho não há indicação de potenciação zero em lugar algum.

2.2 - MONOPOLO ELÉTRICO CLÁSSICO NO ESPAÇO LIVRE DE CARGAS E CAMPOS

O monopolo elétrico clássico é uma esfera de raio R_0 com carga Q distribuída uniformemente em sua superfície.

Em relação ao referencial próprio, o monopolo elétrico tem seu campo eletromagnético dado (em unidades do S.I.) por:

$$\vec{E}_P^0 = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{r} & \text{se } r \geq R_0 \\ 0 & \text{se } r \leq R_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$\vec{B}_P^0 = 0$$

onde r é a coordenada radial e

Q é a carga elétrica do monopolo

Daqui para a frente só serão escritos os campos para $r \geq R_0$, estando subentendido que para $r \leq R_0$ os campos são sempre zero. Deve-se ter isso em mente ao se fazer os cálculos de momento e energia (observar os limites de integração). Em relação a outros referenciais, a superfície esférica se torna um elipsóide de revolução, com eixo menor paralelo à velocidade, por causa da contração de Lorentz.

As componentes cartesianas de campo eletromagnético do monopolo elétrico ficam, então:

$$E_{Px}^0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} x$$

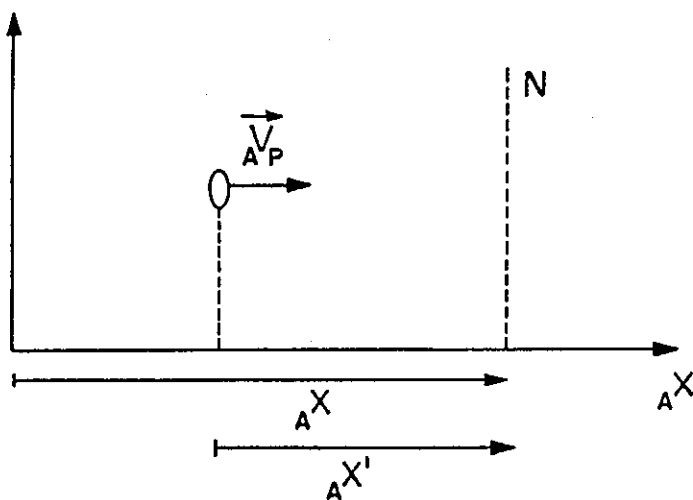
$${}_A B_z^0 = \frac{Q \gamma {}_A v_P {}_P z}{4\pi \epsilon_0 c^2 {}_P r^3}$$

De 2.1.1 temos

$${}_P x = \gamma ({}_A x + {}_P v {}_A t)$$

Vamos utilizar uma nova variável ou coordenada auxiliar, ${}_A x'$, que representa a diferença da coordenada ${}_A x$ entre um ponto qualquer e a posição do centro do monopolo:

$${}_A x' = {}_A x + {}_P v {}_A t \quad (2.2.2)$$



$$\text{Daí} \quad {}_P x = \gamma {}_A x' \quad (2.2.3)$$

O campo fica, então

$${}_A E_x^0 = \frac{Q \gamma {}_A x'}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3}$$

$${}_A E_y^0 = \frac{Q \gamma {}_A y}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3}$$

$${}_A E_z^0 = \frac{Q \gamma {}_A z}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3}$$

$${}_A B_x^0 = 0 \quad (2.2.4)$$

$${}_A B_y^0 = - \frac{Q \gamma \frac{v}{c} {}_A z}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3}$$

$${}_A B_z^0 = \frac{Q \gamma \frac{v}{c} {}_A y}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3}$$

onde ${}_A r^2 = \gamma^2 {}_A x'^2 + {}_A y^2 + {}_A z^2$

Todas essas equações representam o campo no caso em que a velocidade da partícula é constante desde um tempo $-\infty$; se a velocidade sofreu alguma alteração, o campo não obedece a essas equações em todo o espaço.

Para achar o momento eletromagnético resultante é preciso integrar a densidade de momento no espaço. A densidade de momento é dada por:

$$\vec{g}^+ = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad (2.2.5)$$

onde $\vec{S}$ é o vetor de Poynting

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Para o monopolo, o vetor de Poynting em relação ao referencial A é:

$$_A \vec{S}^0 = _A \vec{E}^0 \times \frac{{}_A \vec{B}^0}{\mu_0}$$

e portanto
$$_A \vec{g}^0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} ({}_A \vec{E}^0 \times {}_A \vec{B}^0) \tag{2.2.6}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ E_x & E_y & E_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{2.2.7}$$

$$= \hat{x} (E_y B_z - E_z B_y) + \hat{y} (E_z B_x - E_x B_z) + \hat{z} (E_x B_y - E_y B_x)$$

No referencial próprio, ${}_P \vec{B}^0$ é zero, portanto ${}_P \vec{g}^0 = 0$.

Consequentemente, o momento eletromagnético total do monopolo em seu referencial próprio é nulo, como se podia esperar.

$${}_P \vec{p}_{EM}^0 = 0$$

(2.2.8)

Para o referencial "A", a partir das equações de 2.2.4, 2.2.6 e 2.2.7, temos:

$$_A \vec{g}^0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \gamma^2 \frac{{}_A v_P}{c^2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \left[\hat{x} \left(\frac{{}_A y^2 + {}_A z^2}{{}_P r^0} \right) \right]$$

$$+ \hat{y} \left[\frac{-A^x A^y}{P r^{\sigma}} \right] + \hat{z} \left[\frac{-A^z A^x}{P r^{\sigma}} \right] \Bigg]$$

O momento eletromagnético do monopolo é, então

$$A \vec{P}_{EM}^0 = \iiint_V A \vec{g}^0 d_A V$$

onde V é o volume que cerca a carga (de sua superfície até uma distância infinita). Portanto:

$$A \vec{P}_{EM}^0 = \frac{1}{\mu_0} \frac{\gamma^2 A^V P}{c^2} \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right]^2 \left[\hat{x} \iiint_V \frac{A^{y^2} + A^{z^2}}{P r^{\sigma}} d_A V - \hat{y} \iiint_V \frac{A^x A^y}{P r^{\sigma}} d_A V - \hat{z} \iiint_V \frac{A^z A^x}{P r^{\sigma}} d_A V \right]$$

As integrais indicadas são calculadas no apêndice A. São dadas por [A1], [A2], [A3] e [A4]. Substituindo seus valores, obtém-se:

$$A \vec{P}_{EM}^0 = \frac{\gamma^2 A^V P}{\mu_0 c^4} \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right]^2 \frac{8\pi}{3\gamma R_0} \hat{x}$$

e após algumas transformações simples, considerando que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, obtém-se:

$$\boxed{A \vec{P}_{EM}^0 = \frac{\gamma Q^2 A^V P}{6\pi \epsilon_0 c^2 R_0} \hat{x}} \quad (2.2.9)$$

Para achar a energia associada ao campo eletromagnético do monopolo, é necessário integrar por todo o espaço a densidade de energia eletromagnética.

A densidade de energia total associada ao campo eletromagnético é a soma de suas duas partes, a elétrica e a magnética

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right] \quad (2.2.10)$$

Para o monopolo elétrico, no referencial próprio, não há campo magnético e por isso basta calcular a densidade de energia do campo elétrico:

$$\rho_{EM}^0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right]^2 \frac{1}{r^4}$$

Daí a energia associada ao campo, ${}_P W_{EM}^0$, fica:

$${}_P W_{EM}^0 = \iiint_V {}_P \rho_{EM}^0 d_P V = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right]^2 \iiint_V \frac{1}{r^4} d_P V$$

Substituindo o valor da integral, dado pela equação [A.5] do apêndice A, obtemos:

$${}_P W_{EM}^0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right]^2 \frac{4\pi}{R_0}$$

que pode ser reescrito sob a forma:

$$\boxed{\rho_{EM}^0 = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R_0}}$$

(2.2.11)

Em relação ao referencial "A", de 2.2.10 e 2.2.4 temos

$$\begin{aligned} \rho_{EM}^0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \gamma^2 \left(\frac{x_A'^2 + y_A'^2 + z_A'^2}{r^{\sigma}} \right) \\ + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \gamma^2 \frac{v_P^2}{c^2} \left(\frac{y_A'^2 + z_A'^2}{r^{\sigma}} \right) \end{aligned}$$

$${}_A W_{EM}^0 = \iiint_V {}_A \rho^0 dV$$

Utilizando as integrais dadas por [A1], [A2] e [A6] no apêndice, obtém-se:

$$\begin{aligned} {}_A W_{EM}^0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \gamma^2 \frac{4\pi}{3 R_0} \gamma \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2 \right) \\ + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \gamma^2 \frac{v_P^2}{c^2} \frac{4\pi}{3 R_0} \gamma \end{aligned}$$

que pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} {}_A W_{EM}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \gamma^2 \left[\frac{4\pi \epsilon_0}{3 R_0} \gamma \left(3 + \frac{v_P^2}{c^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{8\pi \epsilon_0}{3 R_0} \gamma \frac{v_P^2}{\mu_0 c^4} \right] \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$

$${}_A W_{EM}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \right)^2 \gamma^2 \frac{4\pi \epsilon_0}{3 R_0} \gamma \left(3 + \frac{{}_A v_P^2}{c^2} \right)$$

$${}_A W_{EM}^0 = \frac{Q^2 \gamma}{8\pi \epsilon_0 R_0} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{{}_A v_P^2}{c^2} \right) \quad (2.2.12)$$

Calculamos o momento e a energia do campo eletromagnético. Como se percebe, esses resultados diferem dos valores usuais da relatividade restrita, na qual temos, para uma partícula

$${}_A W_P = \gamma {}_P W_P$$

$${}_A \vec{p}_P = \gamma \frac{{}_P W_P}{c^2} {}_P \vec{v}_A$$

Substituindo-se ${}_P W_P$ pelo valor dado em 2.2.11, obteríamos:

$${}_A W_P = \frac{\gamma Q^2}{8\pi \epsilon_0 R_0}$$

e

$${}_A \vec{p}_P = \frac{\gamma Q^2 {}_A v_P}{8\pi \epsilon_0 c^2 R_0} \hat{x}$$

ao invés de 2.2.12 e 2.2.9 No entanto, até aqui foram calculados

apenas a energia e momento eletromagnéticos e é preciso levar em conta a energia e o momento associados à tensão superficial do monopolo (tensão de Poincaré). Para isso é necessário calcular inicialmente o valor dessa tensão.

Ao se carregar uma esfera transportando elementos de carga do infinito a uma distância R_0 , o trabalho realizado pelas forças eletromagnéticas (de sinal oposto ao trabalho realizado pelas forças externas) é igual a

$$d_P W'_{EM} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{R_0} dq$$

O trabalho eletromagnético total ao se carregar a esfera no referencial da carga fica

$${}_P W'_{EM} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_0} \int_0^Q q dq = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 R_0} \frac{Q^2}{2}$$

Se variarmos o raio da esfera, o trabalho realizado pelas forças eletromagnéticas será

$$\delta_P W'_{EM} = \frac{\partial {}_P W'_{EM}}{\partial {}_P R} \delta R = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R_0^2} \delta {}_P R \quad (2.2.13)$$

Como há equilíbrio entre as forças eletromagnéticas e a tensão superficial, então pelo princípio de d'Alembert, o trabalho total para uma variação virtual dos parâmetros do sistema é nulo:

$$\delta_P W'_{EM} + \delta_P W_{mec} = 0$$

$$\delta_P W_{mec} = \frac{-Q^2}{8\pi \epsilon R^2} \delta_P r$$

A tensão superficial que contrabalança a repulsão eletrostática pode ser associada a uma pressão (negativa) no interior da esfera; e o trabalho dessa pressão, quando o volume varia é dado por:

$$\delta_P W_{mec} = P \delta_P V$$

onde P é a pressão e $\delta_P V$ o elemento de volume, dado por

$$\delta_P V = 4\pi R_O^2 \delta_P r$$

Assim

$$\delta_P W_{mec} = \frac{-Q^2}{8\pi \epsilon_O R_O^2} \delta_P r = P 4\pi R_O^2 \delta_P r$$

Daí obtemos o valor da pressão interna:

$$P = \frac{-Q^2}{32 \pi^2 \epsilon_O R_O^4} \quad (2.2.14)$$

Obtivemos assim a pressão mecânica que deve existir na partícula para contrabalançar a repulsão eletrostática.

Pela dinâmica relativística de sistemas extensos, para um sistema submetido a uma pressão isotrópica, existe um momento associado à pressão:

$$\delta_P W_{mec} = \frac{-Q^2}{8\pi \epsilon R^2} \delta_P r$$

A tensão superficial que contrabalança a repulsão eletrostática pode ser associada a uma pressão (negativa) no interior da esfera; e o trabalho dessa pressão, quando o volume varia é dado por:

$$\delta_P W_{mec} = P \delta_P V$$

onde P é a pressão e $\delta_P V$ o elemento de volume, dado por

$$\delta_P V = 4\pi R_O^2 \delta_P r$$

Assim

$$\delta_P W_{mec} = \frac{-Q^2}{8\pi \epsilon_O R_O^2} \delta_P r = P 4\pi R_O^2 \delta_P r$$

Daí obtemos o valor da pressão interna:

$$P = \frac{-Q^2}{32 \pi^2 \epsilon_O R_O^4} \quad (2.2.14)$$

Obtivemos assim a pressão mecânica que deve existir na partícula para contrabalançar a repulsão eletrostática.

Pela dinâmica relativística de sistemas extensos, para um sistema submetido a uma pressão isotrópica, existe um momento associado à pressão:

$$\vec{A}_{pr}^P = \frac{\gamma P_P^P P_P^V}{c^2} \vec{A}_{VP}^V$$

e uma energia associada à pressão:

$$A_{pr}^W = \frac{\gamma P_P^P P_P^V}{c^2} A_{VP}^Z$$

conforme as deduções de Planck (1907) .

De 2.2.14 e da relação $P_P^V = \frac{4}{3} \pi R_o^3$, temos

$$\boxed{\vec{A}_{pr}^P = \frac{-\gamma Q^2}{24 \pi \epsilon_o R_o c^2} \vec{A}_{VP}^{\hat{x}}} \quad (2.2.15)$$

$$\boxed{A_{pr}^W = \frac{-\gamma Q^2}{24 \pi \epsilon_o R_o c^2} A_{VP}^Z} \quad (2.2.16)$$

Portanto o momento total associado à partícula será

$$\begin{aligned} \vec{A}_{tot}^C &= \vec{A}_{EM}^O + \vec{A}_{pr}^P \equiv \vec{A}^O \\ &= \frac{\gamma Q^2}{6\pi \epsilon_o c^2 R_o} \vec{A}_{VP}^{\hat{x}} + \frac{-\gamma Q^2}{24 \pi \epsilon_o R_o c^2} \vec{A}_{VP}^{\hat{x}} \\ &= \frac{\gamma Q^2}{6\pi \epsilon_o c^2 R_o} \left(1 - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{{}_A \vec{P}_{tot}^0 = \frac{\gamma Q^2}{8 \pi \epsilon_0 R_0 c^2} {}_A \hat{V}_P^x} \quad (2.2.17)$$

A energia total da esfera carregada é a soma de sua energia eletromagnética 2.2.12 e de sua energia devida à tensão 2.2.16 e portanto:

$$\begin{aligned} {}_A W_{tot}^C &= {}_A W_{EM}^0 + {}_A W_{pr} \\ &= \frac{Q^2}{8 \pi \epsilon_0 R_0} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{{}_A \hat{V}_P^z}{c^2} \right] - \frac{\gamma Q^2}{24 \pi \epsilon_0 R_0} \frac{{}_A \hat{V}_P^z}{c^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{{}_A W_{tot}^0 = \frac{\gamma Q^2}{8 \pi \epsilon_0 R_0}} \quad (2.2.18)$$

No referencial próprio, a energia do monopolo é:

$${}_P W_P^0 = \frac{Q^2}{8 \pi \epsilon_0 R_0} \quad (2.2.19)$$

e portanto podemos escrever:

$${}_A \vec{P}_{tot} = \gamma \frac{{}_P W_P}{c} {}_A \hat{V}_P^x \quad (2.2.20)$$

$${}_A W_{tot} = \gamma {}_P W_P^0 \quad (2.2.21)$$

Portanto, verificamos que, desde que se levem em conta os efeitos de tensão, o momento e a energia da partícula obedecem às

relações ordinárias da dinâmica relativística da partícula.

Note-se que o momento e a energia eletromagnéticos associados à carga em movimento não formam um quadrivetor, pois

$$\left(A W_{EM}^0 \right)^2 - \left(A \vec{P}_{EM}^0 \right)^2 c^2$$

não é um invariante

De 2.2.9 e 2.2.12 podemos verificar que a expressão acima depende de $A V_P$.

$$\begin{aligned} &\left(A W_{EM}^0 \right)^2 - \left(A \vec{P}_{EM}^0 \right)^2 c^2 \\ &= \left[\frac{Q^2 \gamma}{\pi \epsilon_0 R_0} \right]^2 \left[\frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{A V_P^2}{c^2} \right) + \frac{1}{36} \frac{A V_P^2}{c^2} \right] \\ &= \left[\frac{Q^2 \gamma}{\pi \epsilon_0 R_0} \right]^2 \left[\frac{1}{64} \left(1 + \frac{1}{9} \frac{A V_P^4}{c^4} + \frac{2}{3} \frac{A V_P^2}{c^2} \right) - \frac{1}{36} \frac{A V_P^2}{c^2} \right] \\ &= \left[\frac{Q^2 \gamma}{\pi \epsilon_0 R_0} \right]^2 \left[\frac{1}{64} - \frac{7}{576} \frac{A V_P^2}{c^2} + \frac{1}{576} \frac{A V_P^4}{c^4} \right] \end{aligned}$$

Apenas o momento total e a energia total formam um quadrivetor

$$\begin{aligned} &\left(A W_{tot}^C \right)^2 - \left(A \vec{P}_{tot}^C \right)^2 c^2 = \gamma^2 \left(P W_P^0 \right)^2 - \gamma^2 \left(P W_P^0 \right)^2 \frac{A V_P^2}{c^4} c^2 \\ &= \left(1 - \frac{A V_P^2}{c^2} \right)^{-1} \left(P W_P^0 \right)^2 \left(1 - \frac{A V_P^2}{c^2} \right) = \left(P W_P^0 \right)^2 \end{aligned}$$

$$A E_y^0 = \frac{\mu_0 G \gamma_P^V A^Z}{4\pi c_P^2 r^3}$$

$$A E_z^0 = - \frac{\mu_0 G \gamma_P^V A^Y}{4\pi c_P^2 r^3}$$

(2.3.3)

$$A B_x^0 = \frac{\mu_0 G \gamma_P^V A^{x'}}{4\pi c_P^2 r^3}$$

$$A B_y^0 = \frac{\mu_0 G \gamma_P^V A^Y}{4\pi c_P^2 r^3}$$

$$A B_z^0 = \frac{\mu_0 G \gamma_P^V A^Z}{4\pi c_P^2 r^3}$$

De 2.2.6, 2.2.7 e 2.3.1 temos, para o monopolo magnético:

$$\begin{aligned} A \vec{E}^0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \gamma^2 A^V_P \left(\frac{\mu_0 G}{4\pi} \right)^2 & \left[\hat{x} \left(\frac{A^Y^2 + A^Z^2}{c_P^2 r^6} \right) \right. \\ & \left. + \hat{y} \left(\frac{-A^X A^Y}{c_P^2 r^6} \right) + \hat{z} \left(\frac{-A^Z A^X}{c_P^2 r^6} \right) \right] \end{aligned}$$

De [A1], [A2], [A3] e [A4], vemos que não há momento resultante nas direções y e z e que o momento resultante é

$$A \vec{P}_{EM}^0 = \frac{\mu_0 \gamma^2 A^V_P}{c^2} \left(\frac{G}{4\pi} \right)^2 \frac{8\pi}{3\gamma R_0} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{A}_{EM}^0 = \frac{\gamma \mu_0 G^2}{6\pi c^2 R_0} \vec{A}_P \hat{x}}$$

(2.3.4)

De 2.2.10 e 2.3.1 temos

$$P_{EM}^0 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 G^2}{4\pi P r^2} \right)^2$$

Dai

$$P_{EM}^{W0} = \frac{\mu_0 G}{32\pi^2} \iiint_V \frac{1}{P r^4} dV$$

De [A5]

$$P_{EM}^{W0} = \frac{\mu_0 G}{32\pi^2} \frac{4\pi}{R_0}$$

$$\boxed{P_{EM}^{W0} = \frac{\mu_0 G^2}{8\pi R_0}}$$

(2.3.5)

De 2.2.10 e 2.3.3 temos:

$$\begin{aligned} A_{EM}^0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \gamma^2 A_P^2 & \left(\frac{\mu_0 G}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{A_y^2 + A_z^2}{P r^6} \right) \\ & + \frac{1}{2\mu_0} \gamma^2 \left(\frac{\mu_0 G}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{P r^6} \right) \end{aligned}$$

De [A1], [A2] e [A6]

$$\begin{aligned}
 {}_A W_{EM}^0 &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \gamma^2 {}_A V_P^2 \left(\frac{\mu_0 G}{4\pi} \right)^2 \frac{8\pi}{3\gamma R_0} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mu_0 \gamma^2 \left(\frac{\mu_0 G}{4\pi} \right)^2 \frac{4\pi}{3\gamma R_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2 \right) \\
 &= \frac{\mu_0^2 \epsilon_0 G^2 \gamma {}_A V_P^2}{12 \pi R_0} + \frac{\mu_0 G^2 \gamma}{24 \pi R_0} \left(\frac{1}{\gamma^2} + 2 \right)
 \end{aligned}$$

Como $\epsilon_0 \mu_0 = 1 / c^2$

$${}_A W_{EM}^0 = \frac{\mu_0 G^2 \gamma}{8\pi R_0} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{{}_A V_P^2}{c^2} \right) \quad (2.3.6)$$

Procedendo de forma análoga à utilizada no caso do monopolo elétrico, temos que o trabalho eletromagnético total para se carregar uma esfera de raio R_0 com uma carga magnética G é

$${}_P W'_{EM} = - \frac{\mu_0 G^2}{8\pi R_0}$$

Dai

$$\delta_P W'_{EM} = \frac{\mu_0 G^2}{8\pi R_0^2} \delta_P r = - \delta_P W_{mec} = {}_P^P \delta_P V = {}_P^P 4\pi R_0^2 \delta_P r$$

e portanto obtemos a pressão interna da partícula, que contrabalança a pressão magnética:

$$P = \frac{-\mu_0 G^2}{32 \pi^2 R_0^4}$$

Daí das relações de Planck, obtemos o momento e a energia associados à tensão:

$$\vec{A}P_{pr} = \frac{-\mu_0 G^2 \gamma}{24 \pi R_0 c^2} \vec{A}V_P \hat{x} \quad (2.3.7)$$

$$AW_{pr} = \frac{-\mu_0 G^2 \gamma}{24 \pi R_0} \frac{A V_P^2}{c^2} \hat{x} \quad (2.3.8)$$

Daí, calculamos o momento e a energia totais.

$$AP_{tot}^c = AP_{EM}^0 + \vec{A}P_{pr} = \frac{\mu_0 G^2 \gamma}{8 \pi R_0 c^2} \vec{A}V_P \hat{x} \quad (2.3.9)$$

$$AW_{tot}^c = AW_{EM}^0 + AW_{pr} = \frac{\mu_0 G^2 \gamma}{8 \pi R_0} \quad (2.3.10)$$

$$P_P^W = \frac{\mu_0 G^2}{8 \pi R_0} \quad (2.3.11)$$

De 2.3.9, 2.3.10 e 2.3.11, temos novamente

$$AW_{tot} = \gamma P_P^W \quad (2.3.12)$$

$$\vec{A}P_{tot} = \gamma \frac{P_P^W}{c} \vec{A}V_P \hat{x} \quad (2.3.13)$$

que satisfazem à dinâmica relativística de partículas.

Os resultados aqui obtidos para o monopolo elétrico não são novos. Os cálculos foram apresentados em detalhe apenas para se introduzir as equações básicas e para apresentar todo o trabalho de uma forma coerente e autônoma.

CAPÍTULO 3

MONOPOLO ELÉTRICO CLÁSSICO EM INTERAÇÃO COM UM CAPACITOR PLANO PARALELO INFINITO

3.1 - TÉCNICA GERAL DE CÁLCULO PARA SISTEMAS EM INTERAÇÃO

Trataremos a seguir vários exemplos onde haverá interação entre o campo de partícula e o campo gerado por outras fontes. É neste ponto que se investiga a questão chave deste trabalho: se é possível se atribuir massa à energia potencial. Como há duas configurações de carga, uma delas está sujeita ao campo da outra (e vice-versa), portanto atribui-se-lhe um potencial eletromagnético, dependente da posição relativa à configuração inicialmente citada.

Essas outras fontes são tais que limitem seus campos a regiões finitas do espaço. Elas são consideradas superfícies rígidas de espessura desprezível com distribuição superficial uniforme de carga. As idealizações utilizadas nesses exemplos (superfícies rígidas; espessura desprezível, cargas distribuídas uniformemente sobre a superfície e posição fixa das cargas nas superfícies, que são não condutoras) fogem bastante a qualquer situação real mas constituem uma primeira aproximação ao problema que é suficiente para o objetivo central deste trabalho. Da mesma forma, no caso de campos gerados por correntes elétricas, serão necessárias idealizações semelhantes a essas.

Cabe observar que nenhum dos autores citados anteriormente

usou este método de análise para investigar a questão da energia potencial, embora o mesmo método já tenha sido usado para o estudo da dinâmica relativística de uma partícula macroscópica. Esta parece ser a primeira vez que ele é empregado na investigação de casos de interação.

Ao tratarmos a interação das distribuições de carga com a partícula, consideraremos que esta se move sempre na direção x com relação a um referencial preso à distribuição (que chamaremos referencial "A"). A orientação da distribuição geradora do campo adicional com relação a esta direção pode mudar, dependendo do caso tratado.

O fato de considerarmos a direção de deslocamento da partícula sempre a mesma nos permite escrever seu campo em relação ao referencial "A" antes de particularizarmos as distribuições e os casos tratados.

Convém observar que, como os sistemas eletromagnéticos são considerados dielétricos, o fato do campo eletromagnético de um dos sistemas atuar sobre as distribuições de cargas do outro não altera a sua distribuição. Logo, os campos das duas distribuições de carga permanecem inalterados, e o campo total resultante em qualquer região do espaço é a superposição dos campos inicialmente gerados pelas distribuições de cargas.

Na região $r \geq R_0$, o campo é dado pelas equações já apresentadas na seção 2.2:

$$E_{Ax}^0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\dot{r}}{r^3} x'$$

$${}_A E_y^0 = \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3} {}_A y$$

$${}_A E_z^0 = \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3} {}_A z$$

(3.1.1)

$${}_A B_x^0 = 0$$

$${}_A B_y^0 = \frac{-Q {}_A v_P}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3 c^2} \gamma {}_A z$$

$${}_A B_z^0 = \frac{Q {}_A v_P}{4\pi \epsilon_0 {}_A r^3 c^2} \gamma {}_A y$$

Uma certa distribuição de cargas e de correntes terá em relação a seu referencial próprio ("A") um campo eletromagnético não nulo, denominado por ${}_A \vec{E}^C$ e ${}_A \vec{B}^C$.

Observe-se que a direção dos campos eletromagnéticos da distribuição de cargas mudará de acordo com a orientação da mesma com relação à direção em que viaja a partícula.

Na região onde ambos os campos são não nulos, teremos que o campo total é a soma do campo externo e o do monopolo. Assim, nessa região de interação

$${}_A \vec{E}_{tot} = {}_A \vec{E}^0 + {}_A \vec{E}^C$$

(3.1.2)

$${}_A \vec{B}_{tot} = {}_A \vec{B}^0 + {}_A \vec{B}^C$$

e a densidade de momento fica

$$\begin{aligned}\vec{g}_{tot} &= \frac{1}{c^2} \int_A \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)_{tot} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c^2} \left[\int_A \vec{E}^0 \times \vec{B}^0 + \int_A \vec{E}^C \times \vec{B}^0 + \int_A \vec{E}^0 \times \vec{B}^C + \int_A \vec{E}^C \times \vec{B}^C \right]\end{aligned}$$

Vê-se nessa equação que o primeiro termo só depende dos campos do monopolo, o segundo e o terceiro termos são a adição à densidade de momento total devido à interação entre os campos, e o quarto depende somente da distribuição de cargas e correntes.

Já foram analisados anteriormente os termos do monopolo; vamos tratar adiante os efeitos novos, devidos somente à interação dos campos. Só vamos, portanto calcular o momento devido ao segundo e terceiro termos, cuja densidade é

$$\vec{g}_{int} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \left[\int_A \vec{E}^C \times \vec{B}^0 + \int_A \vec{E}^0 \times \vec{B}^C \right] \quad (3.1.3)$$

Também, nas regiões de interação, a densidade de energia total

é

$$\begin{aligned}\rho_{tot} &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \vec{E}_{tot}^2 + \frac{\vec{B}_{tot}^2}{\mu_0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 (\vec{E}^0)^2 + \frac{(\vec{B}^0)^2}{\mu_0} \right] + \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 (\vec{E}^C)^2 + \frac{(\vec{B}^C)^2}{\mu_0} \right] + \\ &\quad + \epsilon_0 \vec{E}^0 \cdot \vec{E}^C + \frac{\vec{B}^0 \cdot \vec{B}^C}{\mu_0}\end{aligned}$$

onde o primeiro termo é a densidade de energia do monopolo, o segundo é a do campo externo, e o terceiro é a devida à interação.

A densidade devida somente à interação é, portanto:

$$\rho_{intEM} = \epsilon_0 \vec{E}^o \cdot \vec{E}^c + \frac{\vec{B}^o \cdot \vec{B}^c}{\mu_0} \quad (3.1.4)$$

Se a fonte externa não tem correntes, então, em seu referencial próprio, os termos dependentes de $\vec{B}^c$ são nulos.

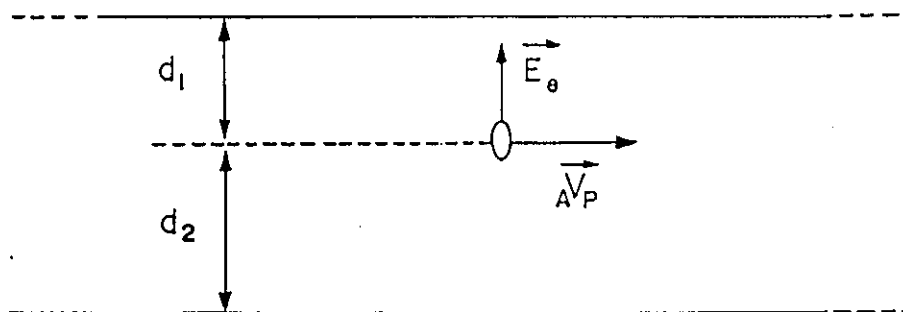
Deve-se sempre ter em mente ao acompanhar os cálculos do trabalho subsequente que as densidades acima (3.1.3) e (3.1.4) só são não nulas só na região de interação, onde tanto o campo da partícula quanto o campo externo são não nulos.

Abaixo, algumas relações de álgebra vetorial que serão utilizadas na apresentação dos casos:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z \quad (3.1.5)$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \hat{x} (E_y B_z - E_z B_y) + \hat{y} (E_z B_x - E_x B_z) + \hat{z} (E_x B_y - E_y B_x) \quad (3.1.6)$$

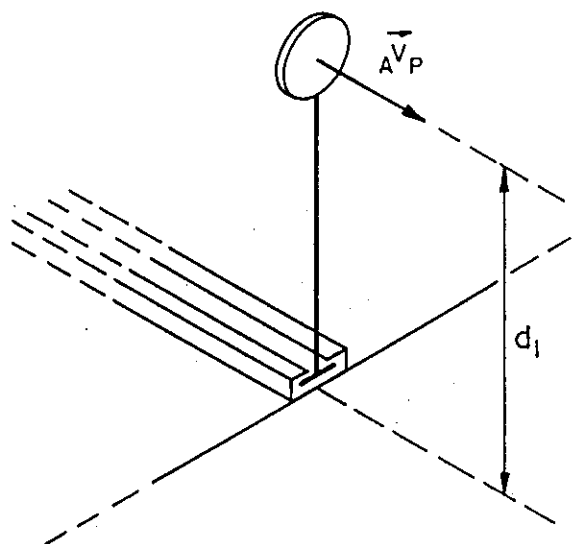
3.2 - MONOPOLO ELÉTRICO EM MOVIMENTO PARALELO EM RELAÇÃO ÀS PLACAS DE UM CAPACITOR PLANO



Vamos considerar um capacitor plano, com placas paralelas e infinitas, com densidades superficiais de carga homogêneas, de sinais opostos e módulos iguais (campo externo nulo). Nessa seção, calcularemos as grandezas dinâmicas associadas ao movimento de uma partícula eletrizada, cuja velocidade é constante e paralela às placas (em outras seções, o movimento terá direções diferentes).

Obviamente, no caso da partícula se mover na região interna do capacitor, a hipótese de velocidade constante não tem realidade física, como tem o caso da partícula estar se movendo fora do capacitor. Mas pode-se imaginar, para o movimento nessa região, que algum aparato mecânico mantenha a esfera eletrizada movendo-se com velocidade constante. Por exemplo: uma haste de dimensões desprezíveis e não condutora pode estar com uma extremidade presa à esfera e a outra encaixada num trilho reto (também de dimensões desprezíveis, que não altera os campos), no qual desliza sem atrito e (consequentemente) com velocidade constante. A figura abaixo

representa um corte reto dessa situação.



Nesse caso nota-se que a força exercida pela haste na esfera não realiza trabalho, pois é perpendicular à sua velocidade. O hipotético aparato mecânico não interfere, Portanto, nas grandezas dinâmicas dos sistemas eletromagnéticos.

Considerando então que, neste caso, a velocidade da partícula seja constante em qualquer região, serão utilizadas as relações do capítulo 2, deduzidas para uma partícula em movimento inercial. A figura acima representa a partícula se movendo no interior do capacitor a uma distância d_1 da placa superior (de maior coordenada y) e d_2 da placa inferior. O capacitor gera um campo elétrico E na direção y , em relação a um referencial "A" parado em relação ao capacitor. Não há campo do capacitor na região exterior, em relação a "A". A placa inferior tem densidade positiva de carga e a superior tem densidade negativa.

Como o versor normal às placas neste caso é $\hat{y}$, o campo do capacitor na região entre as placas fica:

$${}_A \vec{E}^C = E_0 \hat{y} \quad (3.2.1.)$$

Substituindo esse campo na equação da densidade de momento devida à interação (3.1.3), usando a relação para o produto vetorial (3.1.6) e os campos do monopolo dados em (3.1.1), temos a densidade de momento devido à interação:

$${}_A \vec{S}_{intEM} = \frac{E_0 \quad {}_A \vec{v}_P \quad Q \quad \gamma \quad {}_A y}{c^2 \quad 4 \pi \quad {}_A r^3} \hat{x}$$

O momento devido à interação entre os campos do monopolo e do capacitor fica, então

$${}_A \vec{P}_{intEM} = \frac{E_0 \quad {}_A \vec{v}_P \quad Q}{c^2 \quad 4 \pi} \gamma \iiint_{V'} \frac{{}_A y}{{}_A r^3} d{}_A V \hat{x}$$

onde ${}_A V'$ é o volume interno do capacitor, mas externo à carga. Ou seja, a integração é realizada entre a superfície da partícula (um elipsóide com eixo menor na direção do movimento) e as placas planas do capacitor. O cálculo exige uma série de substituições. A partir da dedução apresentada no Apêndice [B1.1], temos

$$\iiint_{V'} \frac{{}_A y}{{}_A r^3} d{}_A V = \frac{2 \pi}{\gamma} (d_1 - d_2)$$

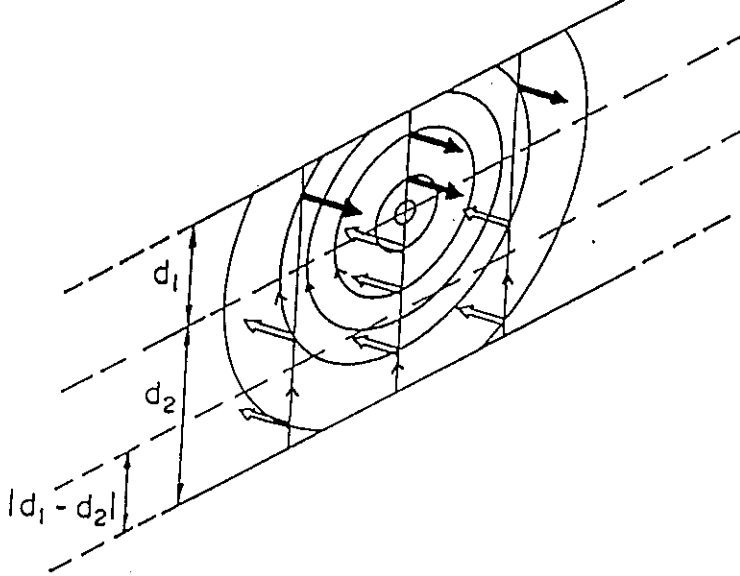
e portanto

$$\vec{p}_{intEM} = \frac{Q E e (d_1 - d_2) \hat{v}_P}{2 c^2} \hat{x}$$

(3.2.2)

Note-se que o raio da partícula não aparece nesta equação, o que não se poderia prever "a priori". Devemos, no entanto, notar que o raio da partícula deve sempre ser considerado menor que a menor distância a uma das placas ($R_0 < d_1$ e $R_0 < d_2$), que é a condição mecânica para a partícula poder mover-se. Além disso, observe-se que a equação obtida é válida tanto no caso em que o monopolo está entre as placas, quanto no caso em que está fora do capacitor. Neste último caso, a diferença ($d_1 - d_2$) adquire o valor constante $\pm D$, onde D é a distância entre as placas e onde o sinal depende do lado em que o monopolo se encontra.

A figura abaixo representa uma seção reta do capacitor, no plano em que se encontra o centro da partícula. Os círculos representam as linhas de campo magnético da partícula ($\vec{B}$) e as retas as linhas de campo elétrico do capacitor ($\vec{E}_0$). Os vetores representados nas intersecções das linhas correspondem à densidade de momento devida à interação dos campos.



Nota-se, da figura, que a contribuição efetiva para o momento eletromagnético de interação corresponde à região inferior, de largura $|d_1 - d_2|$, pois a contribuição da região acima da partícula de largura d_1 se anula com a região abaixo, de mesma largura.

Observe-se que a direção $(-\hat{x})$ do momento eletromagnético resultante concorda com a equação 3.2.2, pois, para a partícula na posição indicada na figura temos que $(d_1 - d_2)$ é negativo.

Das expressões para o produto interno (3.1.5), para os campos do monopolo (3.1.1) e do capacitor (3.2.1.), e para a densidade de energia devida à interação (3.1.4), temos que esta última neste caso fica

$${}^A\rho_{\text{intEM}} = \epsilon_0 E_0 \frac{Q \gamma {}^A y}{4 \pi \epsilon_0 {}^A r^3}$$

Logo, a energia devida à interação é dada por:

$${}^A W_{\text{intEM}} = \epsilon_0 E_0 \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \gamma \iiint_{{}^A V'} \frac{{}^A y}{{}^A r^3} d {}^A V ,$$

$$= \epsilon_0 \frac{Q E_0}{4 \pi \epsilon_0} \gamma \frac{2 \pi}{\gamma} (d_1 - d_2)$$

$$\boxed{{}_A W_{intEM} = \frac{Q E_0 (d_1 - d_2)}{2}} \quad (3.2.3)$$

Novamente, o raio da partícula não aparece na equação final.

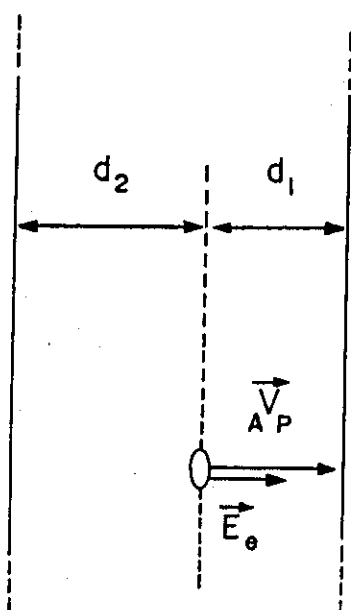
A expressão acima é exatamente a energia potencial da partícula no campo do capacitor. É igual ao trabalho necessário para levar a partícula do centro do capacitor até a posição onde ela se encontra. Assim como no caso do momento, essa relação também vale quando a partícula está fora do capacitor e $(d_1 - d_2) = D$. Se não houvesse outros momentos a serem levados em conta no sistema, pareceria (observe as expressões obtidas para o momento e energia eletromagnéticos) haver uma massa igual a ${}_A W_{intEM}/c^2$ associada à energia potencial, pois

$$\vec{{}_A P_{intEM}} = \frac{{}_A W_{intEM}}{c^2} \vec{{}_A v_P} \quad (3.2.4)$$

Portanto, até este ponto, a questão central deste trabalho - a existência de uma massa associada à energia potencial - parece receber uma resposta positiva. É preciso, no entanto, avançar mais, antes de chegar a uma resposta adequada.

3.3 - MONOPOLO ELÉTRICO EM MOVIMENTO PERPENDICULAR ÀS PLACAS DE UM CAPACITOR PLANO

Vamos considerar agora o caso em que a partícula se move dentro ou próxima ao mesmo capacitor, porém em direção perpendicular às placas.



Como a direção do movimento da partícula é sempre adotada como paralela à direção x e como, neste caso, o campo do capacitor é paralelo ao movimento da partícula, o campo do capacitor fica

$$\vec{E}^c = E_0 \hat{x} \quad (3.3.1)$$

Da equação acima, mais (3.1.6), (3.1.3) e (3.1.1), obtemos a densidade de momento de interação

$$\vec{S}_{intEM} = \frac{E_0}{c^2} \frac{\vec{V}_P Q}{4\pi} \gamma \left[\frac{\vec{r}_y}{r^3} \hat{y} + \frac{\vec{r}_z}{r^3} \hat{z} \right]$$

O momento devido à interação, será de

$$\vec{p}_{intem} = \frac{E_0}{c^2} \frac{Q}{4\pi} \gamma \left[\iiint_{V'} \frac{y}{r^3} dV \hat{y} + \iiint_{V'} \frac{z}{r^3} dV \hat{z} \right]$$

onde as integrais de volume são calculadas entre a superfície do elipsóide da partícula e as placas do capacitor. A partir dos cálculos apresentados no apêndice (B2.1) e (B2.2)), vemos que as integrais são nulas e, portanto,

$$\boxed{\vec{p}_{intem} = 0} \quad (3.3.2)$$

De (3.1.4), (3.1.1), (3.3.1) e (3.1.4), temos a densidade de energia devida à interação:

$$p_{intem} = \epsilon_0 E_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r^3} \frac{x'}{r^3}$$

A energia eletromagnética de interação dos campos será

$$W_{intem} = \epsilon_0 E_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \gamma \iiint_{V'} \frac{x'}{r^3} dV$$

A partir do valor da integral [B2.3] calculada no apêndice,

no volume entre o elipsóide e as placas, obtemos

$$A W_{intEM} = \epsilon_0 E_0 \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \gamma \frac{2 \pi}{\gamma} (d_1 - d_2)$$

$$\boxed{A W_{intEM} = \frac{Q E_0 (d_1 - d_2)}{2}} \quad (3.3.3)$$

A energia de interação eletromagnética é, como se podia esperar, igual à energia potencial eletrostática, como no caso do movimento paralelo às placas (3.2.3). No entanto não há, neste caso de movimento perpendicular às placas, um momento eletromagnético de interação. Há um aparente conflito entre as relações obtidas nos dois casos: (3.2.2) e (3.3.2).

A equação (3.2.2) parece indicar que a energia potencial contribui para a massa inercial da partícula; mas a equação (3.3.2) parece indicar que ela não contribui para a massa. Poderia o efeito depender da direção do movimento? Isso não seria muito razoável, já que a energia de interação é um escalar e não depende da direção.

A resolução deste aparente conflito depende da análise das tensões envolvidas no problema. Assim como no caso da partícula livre (sem campo exterior), o momento e a energia dependem não só dos campos eletromagnéticos, mas também dos efeitos mecânicos citados nas superfícies que transportam as cargas.

Vamos, na seção seguinte, considerar essas tensões.

3.4 - TENSÕES DE INTERAÇÃO ENTRE MONOPOLO E CAPACITOR

A interação entre o capacitor e o monopolo, no caso aqui estudado, não produz nenhuma tensão adicional na própria partícula. A princípio poder-se-ia pensar que sim, pois, do referencial do capacitor a partícula tem a forma de um elipsóide, a distribuição de cargas não é mais homogênea e há a possibilidade de haver uma pressão adicional na partícula devida às tensões da distribuição superficial de cargas da partícula, sujeita ao campo externo.

Mas, observando a partícula de seu referencial próprio, a carga elétrica desta está distribuída uniformemente pela superfície. Como o campo exterior (do capacitor) é uniforme, produz forças uniformemente distribuídas pela superfície do monopolo, imprimindo uma aceleração uniforme em todos os elementos de área da superfície. O efeito provocado é o de o corpo como um todo ser acelerado, sem criar novas tensões superficiais. As relações de Planck (apresentadas no texto entre as equações 2.2.14 e 2.2.15), que relacionam o momento e energia de um corpo submetido a pressão externa, dependem da pressão desse corpo no referencial próprio. Como vimos que a pressão no referencial próprio não muda com o campo externo, o momento e energia devidos à tensão da carga continuarão os mesmos. Assim sendo, a interação não altera o momento e a energia de tensão do monopolo.

No entanto, o monopolo produz tensões no capacitor. O campo produzido pelo monopolo não é perpendicular às placas (exceto em um ponto) e por isso tende a comprimir uma das placas (com carga de sinal oposto) e a distender a outra placa (com carga de sinal igual à do monopolo). Essas tensões não atuam sobre pontos fixos do

capacitor. Como o monopolo se desloca em relação ao capacitor, a tensão também se desloca. No caso do movimento paralelo às placas, surge uma onda de tensão que se propaga através delas. Essa onda de tensão não é uma onda mecânica clássica nem está associada a um movimento de cargas nas placas, pois foram feitas as idealizações de placas rígidas e dielétricas, com distribuição de cargas fixas.

O estudo relativístico de ondas de tensão parece não ter sido realizado até o presente. A análise dinâmica dessa situação será apresentada em detalhe na próxima seção (3.5). Vamos aqui, primeiramente, apenas aplicar os resultados da seção 3.5, de modo a resolver a aparente contradição apontada na seção anterior.

Consideremos inicialmente o caso do movimento paralelo à placa.

Existem forças agindo sobre a carga superficial das placas. Essas forças são causadas pelo campo elétrico da partícula. Devido à diferença de simultaneidade de aplicação das forças nos diferentes referenciais há um momento associado à tensão que se propaga nas placas. Esse momento tem uma fórmula semelhante ao momento associado a uma barra rígida submetida a uma força de contração, apresentada no apêndice E.

Nas direções perpendiculares à onda de tensão esta não possui momento associado, pois nestas direções as forças são aplicadas simultaneamente em ambos os referenciais.

Na direção x a onda de tensão tem seu centro em $x = 0$ ou $x' = 0$ e forças simétricas aplicadas simultaneamente (no referencial "P") a distâncias iguais do centro da onda de tensão.

Se considerarmos que para cada x' há uma força dF_x sendo aplicada simultaneamente (no referencial "P") podemos dizer que o

momento associado a essa $d_A F_x$ é dado por

$$d_A \vec{p}_{ten} = - \frac{\gamma^2 v_P}{c^2} 2 \int_A x' d_A F_x \hat{x}$$

(é como se o momento de uma barra tensionada de comprimento $2 \int_A x'$ que viajasse junto com as placas fosse instantaneamente transferido a esse pedaço das placas)

O momento total associado à tensão fica, então

$$\vec{p}_{ten} = - \frac{\gamma^2 v_P}{c^2} \iint_{S'} \int_A x' d_A F_x \hat{x}$$

onde o fator 2 é suprimido porque a integração por toda a superfície do capacitor (S') já o inclui. Escrevendo a força em função do campo, obtemos:

$$\vec{p}_{ten} = - \frac{\gamma^2 v_P}{c^2} \iint_{S'} \int_A x' E_x d_A Q \hat{x}$$

A integral é realizada sobre as placas do capacitor, que possuem densidades de carga simétricas. A partir do resultado da integração, obtido no apêndice [B1.2], têm-se

$$\vec{p}_{ten} = - \frac{\gamma^2 v_P}{c^2} \frac{Q E_0 (d_1 - d_2)}{2 \gamma^2} \hat{x}$$

$$\vec{A}_{ten} = - \frac{Q E_0 (d_1 - d_2) A_P v_P}{2 c^2} \hat{x} \quad (3.4.1)$$

Esse momento é de mesmo módulo e oposto ao momento (3.2.2) devido à interação, e, considerando-se a soma dos dois como momento total do sistema, temos que este último é zero, fazendo com que nenhuma massa seja atribuída à energia de interação.

O leitor aqui poderia perguntar-se se também não há uma energia que se possa se atribuir às tensões que se propagam nas placas, tal como há momento associado a elas. Adiantamos aqui a resposta: não. A justificativa da resposta está na seção 3.5., na altura da equação 3.5.6.

$$W_{ten} = 0 \quad (3.4.2)$$

No caso do movimento perpendicular às placas, a situação é diferente.

As forças que tensionam a placa nesse caso são simultâneas em relação ao referencial, pois agora o movimento é perpendicular às placas e estas possuem coordenada x igual para todos os pontos. Por isso, neste caso, o momento associado à tensão é nulo.

$$\vec{A}_{ten} = 0 \quad (3.4.3)$$

Portanto, o momento total de interação é nulo, como no caso do movimento paralelo às placas.

Como no caso do movimento paralelo, as forças de tensão não

realizam trabalho, no referencial do capacitor, e portanto, novamente

$$\boxed{W_{A \text{ ten}} = 0}$$

(3.4.4)

Note-se que aqui, no caso do movimento perpendicular, embora continue havendo energia devida à interação eletromagnética, o momento associado a esta é zero. Se não fossem levados em conta os efeitos devidos à tensão, no caso do movimento paralelo, esses dois casos apresentariam resultados conflitantes.

Observa-se, portanto, que levando-se em conta os efeitos dinâmicos da tensão induzida pelo monopolo no capacitor, analisa-se o momento de interação e não surge nenhum momento (e portanto nenhuma massa maupertuisiana) associado à energia potencial.

Vejamos agora a análise detalhada da onda de tensão em uma placa rígida.

3.5 - ONDA DE TENSÃO EM UM SÓLIDO RÍGIDO

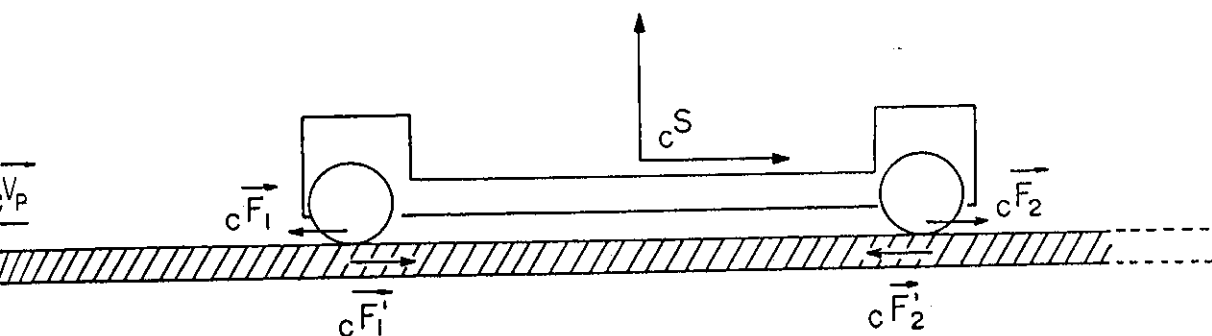
Nesta seção, através de um exemplo mecânico simples, serão analisadas as propriedades dinâmicas (relativísticas) de uma onda de tensão num sólido rígido. A análise utiliza os princípios mais básicos possíveis, o que é essencial, no caso presente, pois na dinâmica de sistemas extensos (seção 1.2) deve-se colocar em suspeita as equações usuais. De fato, um importante resultado obtido na presente seção será o de que não é válida a relação $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$ entre densidade de momento $\vec{g}$ e fluxo de energia $\vec{\sigma}$.

O exemplo a partir do qual será feita a análise é o seguinte: um carrinho move-se com velocidade constante sobre uma placa de largura constante, da mesma largura que o carrinho, e de comprimento infinito. A partir de um certo instante (de acordo com o referencial do carrinho) forças opostas de mesmo módulo são aplicadas à placa pelas rodas do carrinho. A força resultante é nula, portanto a velocidade permanece constante. Na região da placa entre as rodas é gerada uma tensão que se move com a mesma velocidade do carrinho.

São feitas as seguintes idealizações:

1. A placa comprimida é perfeitamente rígida.
2. As forças são aplicadas à placa por atrito estático (as rodas do carrinho não deslizam sobre a superfície da placa). As perdas são consideradas nulas.
3. O carrinho tem um sistema interno que gera esta tensão: um motor na região da roda dianteira e um sistema de breques eletrodinâmicos

mais um dínamo na região da roda traseira, de modo que o carrinho como um todo não sofre nenhuma perda de energia no processo.



Com relação a ${}_c S$ (o referencial próprio do carrinho) o carrinho está em repouso. A placa move-se com velocidade ${}_c v_P$ na direção x . As forças são aplicadas pelo carro nos pontos 1 e 2 da placa simultaneamente.

Ao mesmo tempo forças de reação iguais e opostas são aplicadas ao carro pela placa.

Sejam (de acordo com a figura 2) $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ as forças aplicadas à placa nos pontos 1 e 2 respectivamente, e $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ as forças aplicadas às extremidades do carrinho.

As relações entre as forças (de acordo com a figura) são:

$$\begin{aligned} {}_c \vec{F}_1 &= - {}_c \vec{F}_2 \\ {}_c \vec{F}_2 &= - {}_c \vec{F}_1 \\ {}_c \vec{F}_1 &= - \vec{F}_1 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Seja ${}_c \vec{F}_1$ escrita como

$${}_c \vec{F}_1 = F \hat{x} \tag{3.5.2}$$

onde $\hat{x}$ é o versor unitário na direção x. Como todas as forças e momentos tratados nesse trabalho (capítulo da tese) têm a mesma direção (x), a notação vetorial não precisa ser empregada. Assim

$${}_c F_1 = {}_c F'_2 = F$$

$${}_c F_2 = {}_c F'_1 = -F$$

Se as posições dos breques e do dínamo fossem trocadas, mudariam os sinais das forças.

Como as forças têm direção paralela à velocidade dos referenciais, elas são invariantes (${}_c F_1 = {}_p F_1$ e assim por diante), pelas transformações relativísticas de força. Assim, as relações acima são válidas para todos os referenciais tratados neste capítulo, e então os índices correspondentes aos referenciais podem ser omitidos também.

$$F_1 = F'_2 = -F$$

(3.5.3)

$$F_2 = F'_1 = F$$

Devido à simultaneidade de aplicação das forças, em relação a ${}_c S$, as forças resultantes que agem na placa e no carro respectivamente são nulas durante todo o tempo. Assim nenhuma das partes do sistema sofre mudança no seu momento com relação ao referencial ${}_c S$ devido à aplicação das forças.

$$\boxed{{}_c \langle \Delta p \rangle_p = {}_c \langle \Delta p \rangle_c = 0}$$

(3.5.4)

De acordo com a idealização 3, o carro não sofre perda (ou ganho) de energia nesse processo.

$$\boxed{{}_c \langle \Delta W \rangle_c = 0}$$

(3.5.5)

A força F'_2 aplicada pelo carrinho na placa produz trabalho positivo no ponto 2 e a força oposta F'_1 transfere trabalho negativo à placa no ponto 1. Como as forças têm mesmo módulo e são aplicadas simultaneamente, a energia total da placa não sofre modificação.

$${}_c \langle \Delta W \rangle_p = 0$$

(3.5.6)

Apesar do trabalho total produzido sobre a placa ser nulo, há um fluxo de energia não nulo entre os pontos 1 e 2, fluindo de 2 para 1 através da placa.

Calculemos esse fluxo de energia.

Durante um tempo ${}_c \langle \delta t \rangle$, a placa se desloca de ${}_c \langle \delta t \rangle {}_c v_p$. A energia que flui (de 1 para 2) através da placa nesse deslocamento é igual ao trabalho produzido por F'_1 em 1:

$$(3.12) \quad {}_c \langle \delta E \rangle_p = F {}_c \langle \delta t \rangle {}_c v_p$$

(note que, aqui, ${}_c v_p$ é negativa)

O fluxo de energia devido à tensão na região entre os pontos 1 e 2 é, portanto:

$${}_C(\sigma_E)_P = \frac{{}_C(\delta E)}{{}_C A_P {}_C(\delta t)}$$

onde ${}_C A_P$ é a área da seção transversal da placa.

De 3.12 e 3.13

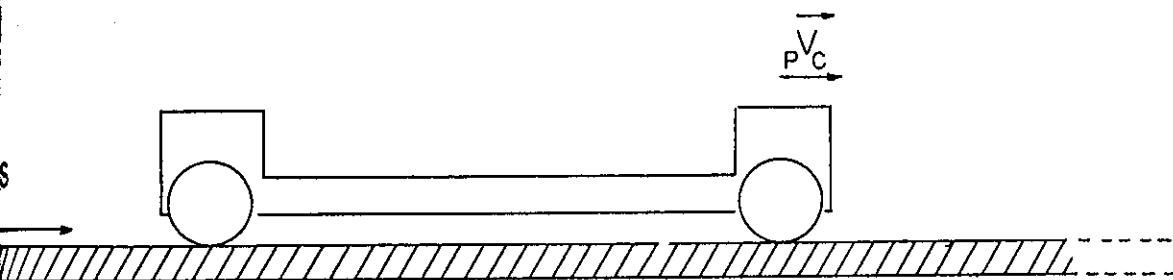
$$\boxed{{}_C(\sigma_E)_P = \frac{F_P v_C}{{}_C A_P}} \quad (3.5.7)$$

Como nenhum trabalho é realizado sobre o carrinho em 1 ou 2, porque ele está em repouso, não há fluxo de energia através deste, em relação a ${}_C S$.

$$\boxed{{}_C(\sigma_E)_C = 0} \quad (3.5.8)$$

Note que tanto o carro quanto a placa não tem um momento adicional devido à tensão, mas há um fluxo de energia através da placa, e esse fluxo de energia não tem uma densidade de momento associada.

Examinemos agora a situação em relação ao referencial da placa (${}_P S$).



Em ${}_c t_0$ as forças começaram a ser aplicadas simultaneamente pelo carrinho. Mas, com relação à placa, a aplicação das forças não é simultânea. Seja L o comprimento próprio do carrinho.

$${}_c x_2 - {}_c x_1 = L > 0 \quad (3.5.9)$$

Das transformações de Lorentz, temos

$${}_p t_1 = {}_p \gamma_C \left({}_c t_0 + \frac{{}_p v_C}{c^2} {}_c x_1 \right) \quad e$$

$${}_p t_2 = {}_p \gamma_C \left({}_c t_0 + \frac{{}_p v_C}{c^2} {}_c x_2 \right)$$

Dai, o intervalo de tempo entre a aplicação das forças com relação a ${}_p S$ é

$${}_p (\Delta t) = {}_p t_2 - {}_p t_1 = {}_p \gamma_C {}_p v_C \left({}_c x_2 - {}_c x_1 \right)$$

$${}_p (\Delta t) = {}_p \gamma_C {}_p v_C \frac{L}{c^2} \quad (3.5.10)$$

Durante o intervalo de tempo acima, somente uma força (F'_1) está sendo aplicada sobre a placa (no ponto 1). O acréscimo no

momento devido à diferença de simultaneidade relativa a $_P S$ é:

$$_P \langle \Delta p \rangle_P = F_P \langle \Delta t \rangle$$

De 4.5, temos

$$\boxed{{}_P \langle \Delta p \rangle_P = {}_P \gamma_C {}_P v_C \frac{L F}{c^2}} \quad (3.5.11)$$

É interessante notar que, embora a placa esteja sempre em repouso com relação a $_P S$, seu momento muda devido a esse efeito. Esse momento irá existir enquanto a tensão for mantida. Pode ser entendido como um momento da onda de tensão que viaja através da placa.

O carro também sofre uma mudança no seu momento devido a semelhante razão.

Há a força de reação $F_1 = -F$ aplicada pelo chão ao carrinho durante esse intervalo de tempo.

Então

$$_P \langle \Delta p \rangle_C = -F_P \langle \Delta t \rangle$$

$$\boxed{{}_P \langle \Delta p \rangle_C = -{}_P \gamma_C {}_P v_C \frac{L F}{c^2}} \quad (3.5.12)$$

Com relação a $_P S$ a placa não se move, portanto não há trabalho produzido sobre ela.

$$\boxed{{}_P \langle \Delta W \rangle_P = 0} \quad (3.5.13)$$

Contrariando as expectativas, a onda de tensão não carrega energia, embora transporte momento. Nesse caso (como normalmente ocorre na dinâmica relativística de sistemas extensos), energia e momento não formam um quadrvetor.

Como o carrinho se move, há um trabalho não nulo produzido sobre ele quando há apenas uma força aplicada.

$${}_P \langle \Delta W \rangle_C = - F {}_P \left(\Delta x_{12} \right)$$

onde ${}_P \left(\Delta x_{12} \right)$ é o deslocamento do carro entre os instantes ${}_P t_1$ e ${}_P t_2$.

$${}_P \left(\Delta x_{12} \right) = {}_C v_P \left({}_P t_1 - {}_P t_2 \right) = {}_P v_C {}_P \gamma_C {}_P v_C \frac{L F}{c^2}$$

$${}_P \left(\Delta x_{12} \right) = {}_P \gamma_C {}_P v_C^2 \frac{L F}{c^2}$$

Então

$$\boxed{{}_P \langle \Delta W \rangle_C = - {}_P \gamma_C {}_P v_C^2 \frac{L F}{c^2}} \quad (3.5.14)$$

Devido ao fato da placa estar em repouso, não há fluxo de energia através dela.

$$\boxed{{}_P \left(\sigma_E \right)_P = 0} \quad (3.5.15)$$

Mas há um fluxo de energia através do carrinho.

Durante um tempo ${}_P(\Delta t)$ o carrinho se desloca de ${}_P v_{CP}(\Delta t)$. Uma quantidade de energia igual a

$${}_P(\delta E)_C = - F_P(\delta t) {}_P v_C$$

é recebida em 1, flui através do carrinho e é transferida em 2 durante este intervalo de tempo.

O fluxo de energia correspondente a essa quantidade de energia é:

$${}_P(\sigma_E)_C = \frac{{}_P(\delta E)_C}{{}_P A_C {}_P(\delta t)}$$

onde ${}_P A_C$ é a área da seção transversal do carrinho.

$$\boxed{{}_P(\sigma_E)_C = - \frac{F_P {}_P v_C}{{}_P A_C}} \quad (3.5.16)$$

A densidade de momento associada com a tensão do carrinho é calculada dividindo o acréscimo de momento do carrinho (3.5.12) pelo volume através do qual a energia escoou. De acordo com o referencial do carrinho, a energia entra em 1 e sai em 2 instantaneamente, viajando uma distância ${}_C x_1 - {}_C x_2 = L$. Medida de ${}_P S$, essa distância fica (de acordo com as transformações de Lorentz):

$${}_P x_2 - {}_P x_1 = c \gamma_P \left({}_C x_2 - c {}_P v_C t_2 \right) - c \gamma_P \left({}_C x_1 - c {}_P v_C t_1 \right)$$

Sabendo que ${}_C t_1 = {}_C t_2$ e da relação 4.1:

$${}_c x_2 - {}_c x_1 = {}_c \gamma_P L$$

A densidade de momento associada à tensão do carrinho é, portanto, igual a seu momento dividido pelo volume ${}_c A ({}_c x_2 - {}_c x_1)$:

$${}_P \xi_C = \frac{{}_P (\Delta p)_C}{{}_c \gamma_C L {}_P A_C}$$

De 3.5.12 e da relação anterior, obtemos:

$$\boxed{{}_P \xi_C = - \frac{{}_P v_C}{{}_P A_C c^2}} \quad (3.5.17)$$

de 3.5.16 e 3.5.17, obtemos

$${}_P \xi_C = {}_P (\sigma_E)_C / c^2 \quad (3.5.18)$$

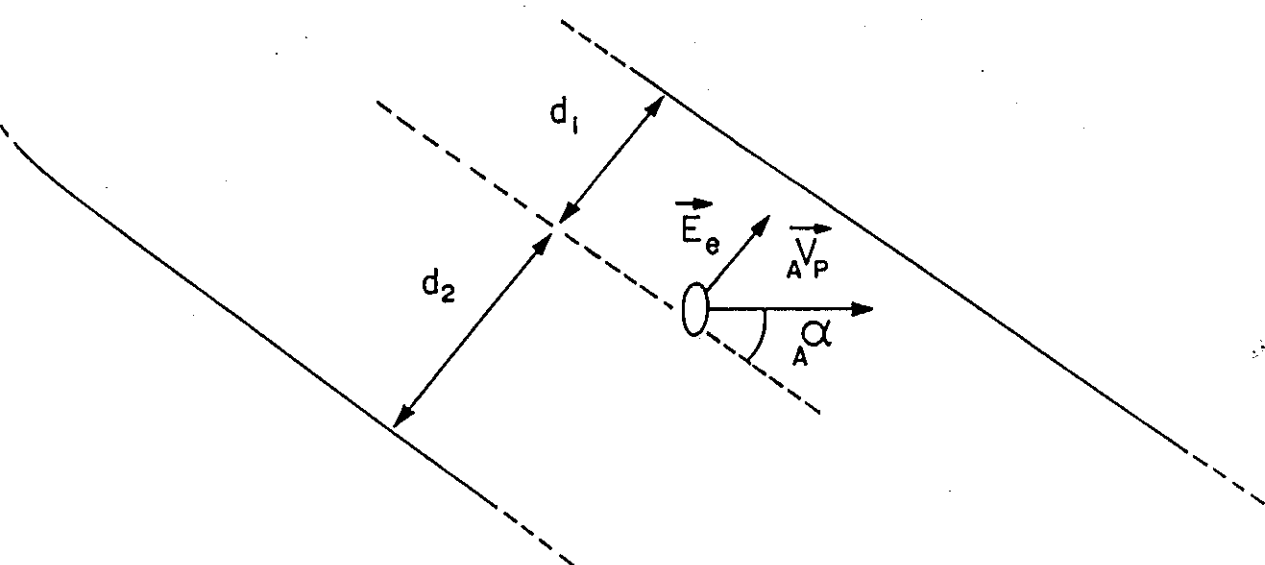
Portanto, para o carro, com relação a ${}_P S$, a relação usual entre fluxo de energia e densidade de momento é válida. Entretanto, com relação a esse mesmo referencial, a relação não se aplica à placa, uma vez que esta não possui fluxo de energia, mas tem um momento adicional.

Vejamos agora, como esses resultados se aplicam ao caso do capacitor. O monopolo faz, de certa forma, o papel do carrinho, que aplica a tensão às placas do capacitor. Assim sendo, para essas placas, a onda de tensão não contém energia mas transporta momento,

em relação ao referencial das placas (o referencial "A" utilizado anteriormente). Esse momento adicional devido à tensão obedece a uma equação (3.5.11) idêntica à do momento adicional de uma barra comprimida. A diferença é que a barra comprimida transportará, também, uma energia adicional associada à tensão.

3.6 - MONOPOLO ELÉTRICO EM MOVIMENTO OBLÍQUO EM RELAÇÃO ÀS PLACAS DE UM CAPACITOR PLANO

Os casos de movimento paralelo e perpendicular às placas do capacitor são os mais significativos; mas é útil analisar também o caso geral em que o movimento do monopolo forma um ângulo arbitrário com a normal às placas. A análise desse caso geral será feita na presente seção, na qual será introduzido também um novo método para o cálculo do momento mecânico de interação entre o monopolo e as placas.



O caso oblíquo é mais difícil de se tratar porque a inclinação do capacitor é diferente para os dois referenciais. Deve-se observar bem as coordenadas usadas nas integrações feitas no apêndice. Além disso, os limites de integração não possuem uma simetria que auxilie os cálculos.

Em relação ao referencial "A", o campo gerado pelas placas na

região interna do capacitor é

$$\vec{E}_0 = E_0 \sin_A \alpha \hat{x} + E_0 \cos_A \alpha \hat{y} \quad (3.6.1)$$

onde $_A \alpha$ é o ângulo formado entre a direção do movimento do monopolo (eixo x) e sua projeção sobre as placas.

Da expressão acima, utilizando-se (3.1.3), (3.1.6) e (3.1.1), obtemos a densidade de momento eletromagnético de interação entre o monopolo e o capacitor.

$$\vec{g}_{intEM} = \frac{E_0 \cdot \frac{V_P}{c^2} \cdot Q}{4 \pi} \gamma \left[\cos_A \alpha \frac{y}{r^3} \hat{x} - \sin_A \alpha \frac{y}{r^3} \hat{y} - \sin_A \alpha \frac{z}{r^3} \hat{z} \right]$$

O momento devido à interação dos campos será

$$\vec{P}_{intEM} = \frac{E_0 \cdot \frac{V_P}{c^2} \cdot Q}{4 \pi} \gamma \left[\cos_A \alpha \iiint_{V'} \frac{y}{r^3} d_A V \hat{x} - \sin_A \alpha \iiint_{V'} \frac{y}{r^3} d_A V \hat{y} - \sin_A \alpha \iiint_{V'} \frac{z}{r^3} d_A V \hat{z} \right]$$

onde $_A V'$ continua sendo o volume interno do capacitor, externo à carga; a integração é realizada, portanto, entre um elipsóide cujo eixo está inclinado em relação às placas e estas placas. O cálculo é mostrado no apêndice. Utilizando-se os resultados [B3.1]

e [B3.2], obtemos

$$\vec{p}_{intem}^A = \frac{E \cdot Q}{4\pi c^2} \vec{v}_P \frac{2\pi \cos_P \alpha (d_1^* - d_2^*)}{\gamma} (\cos_A \alpha \hat{x} - \sin_A \alpha \hat{y})$$

onde d_1^* e d_2^* são as distâncias do centro do monopolo às placas, medidas do referencial da partícula, como indicado na figura anterior. A partir da transformação [D2] apresentada no apêndice, temos

$$\vec{p}_{intem}^A = \frac{E \cdot Q}{2 c^2} \vec{v}_P \cos_P \alpha (d_1 - d_2) \gamma \frac{\sin_A \alpha}{\sin_P \alpha} (\cos_A \alpha \hat{x} - \sin_A \alpha \hat{y})$$

mas pode-se escrever

$$\cos_P \alpha \gamma \sin_P \alpha \sin_A^{-1} \alpha = \cos_P^2 \alpha \gamma \operatorname{tg}_P \alpha \sin_A^{-1} \alpha$$

e utilizando a transformação [D1] mostrada no apêndice, a expressão fica:

$$\cos_P^2 \alpha \operatorname{tg}_A \alpha \sin_A^{-1} \alpha = \cos_P^2 \alpha \cos_A^{-1} \alpha$$

Daí, obtemos

$$\vec{p}_{intem}^A = \frac{E \cdot Q}{2 c^2} \vec{v}_P (d_1 - d_2) \frac{\cos_P^2 \alpha}{\cos_A \alpha} (\cos_A \alpha \hat{x} - \sin_A \alpha \hat{y})$$

(3.6.2)

A expressão contém o ângulo α medido em relação a "A" e em

relação à partícula; sua forma fica muito mais complicada se expressa em função apenas de ${}_A\alpha$.

Da forma expressa acima percebe-se que em relação ao referencial "A" o momento eletromagnético resultante é paralelo às placas do capacitor. Como ele não é paralelo à velocidade da partícula, não se pode escrever uma relação do tipo $\vec{p} = m \vec{v}$ para o momento eletromagnético de interação.

Note-se que, fazendo ${}_A\alpha = 0$ ou ${}_A\alpha = \pi/2$, temos também ${}_P\alpha = 0$ ou ${}_P\alpha = \pi/2$ e obtemos a partir de (3.6.2) os mesmos resultados do momento eletromagnético de interação para os casos e movimento paralelo e perpendicular.

Calculemos agora a energia eletromagnética de interação.

De (3.1.5), (3.1.1), (3.6.1) e (3.1.4), obtemos

$${}_A\rho_{intEM} = \epsilon_0 E_0 \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \left[\text{sen } {}_A\alpha \frac{{}_A x'}{{}_A r^3} + \cos {}_A\alpha \frac{{}_A y}{{}_A r^3} \right]$$

A energia devida à interação fica

$${}_A W_{intEM} = E_0 \frac{Q \gamma}{4\pi} \left[\text{sen } {}_A\alpha \iiint_{V'} \frac{{}_A x'}{{}_A r^3} d{}_A V + \cos {}_A\alpha \iiint_{V'} \frac{{}_A y}{{}_A r^3} d{}_A V \right]$$

onde as integrais de volume são, como antes, correspondentes ao espaço entre o elipsóide e as placas do capacitor. A partir dos resultados [D1] e [D3] do apêndice, obtemos

$$W_{intEM} = \frac{E_0 Q}{4\pi} \left[\sin_A \alpha \, 2\pi \, \gamma^{-1} \sin_P \alpha \, (d_1^* - d_2^*) \right. \\ \left. + \cos_A \alpha \, 2\pi \, \gamma^{-1} \cos_P \alpha \, (d_1^* - d_2^*) \right]$$

E utilizando a substituição [D2] do apêndice, obtemos

$$W_{intEM} = \frac{E_0 Q}{4\pi} \gamma \, (d_1 - d_2) \, 2\pi \left[\gamma^{-2} \sin_A \alpha \sin_P \alpha \gamma \frac{\sin_A \alpha}{\sin_P \alpha} \right. \\ \left. + \cos_A \alpha \cos_P \alpha \gamma^{-1} \gamma \frac{\sin_P \alpha}{\sin_A \alpha} \right] \\ = \frac{E_0 Q}{2} \gamma \, (d_1 - d_2) \left[\gamma^{-1} \sin_P^2 \alpha + \cos_P \alpha \sin_P \alpha \, \text{tg}_A^{-1} \alpha \right]$$

E utilizando agora a transformação [D1], obtemos

$$W_{intEM} = \frac{E_0 Q}{2} \gamma \, (d_1 - d_2) \left[\gamma^{-1} \sin_P^2 \alpha + \cos_P \alpha \sin_P \alpha \, \gamma^{-1} \text{tg}_P^{-1} \alpha \right] \\ = \frac{E_0 Q}{2} \gamma \, (d_1 - d_2) \, \gamma^{-1} \left[\sin_P^2 \alpha + \cos_P^2 \alpha \right]$$

$$\boxed{W_{intEM} = \frac{Q E_0 (d_1 - d_2)}{2}} \quad (3.6.3)$$

Obtemos assim, mais uma vez, como era de se esperar, a mesma fórmula para a energia eletromagnética de interação já encontrada antes e que se reduz à energia potencial eletrostática do sistema.

Nesse caso nem levando em conta apenas a parte da interação

dos campos não se pode associar uma massa à energia potencial da maneira usual como o formalismo de quadrivetores.

A partir de (3.6.2) e (3.6.3), podemos escrever

$$\vec{A} \vec{p}_{intEM} = \frac{A W_{intEM}}{c^2} \frac{\cos^2 P \alpha}{\cos A \alpha} (\cos A \alpha \hat{x} - \sin A \alpha \hat{y}) A v_P$$

que difere bastante da relação que se esperaria se houvesse uma massa associada à energia potencial e que conduziria a

$$\vec{A} \vec{p}_{intEM} = \frac{A W_{intEM}}{c^2} A v_P \hat{x}$$

Passemos agora à análise das tensões induzidas pela partícula nas placas. Quando o movimento é oblíquo, a onda de tensão tem comportamento complexo, pois o módulo das forças de tensão varia em função do tempo. Nesse caso, não é possível aplicar diretamente o processo da seção 3.4 para calcular o momento devido à tensão.

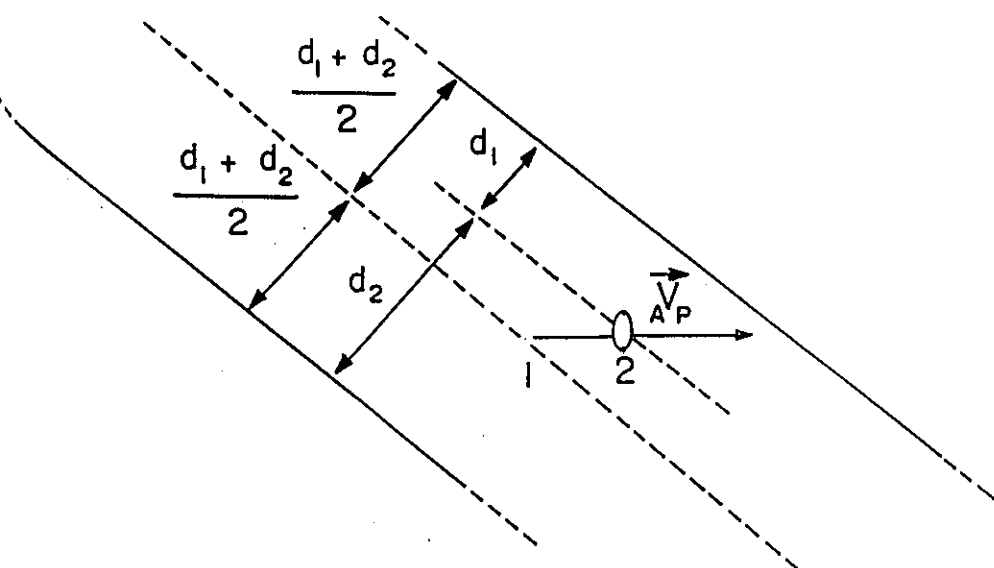
Vamos optar por um método mais simples: a integração no referencial "A" do impulso total recebido nas placas, devido à força exercida pela partícula, supondo que a partícula faça um caminho reto, sempre com a mesma inclinação $A \alpha$ em relação às placas do capacitor.

Esse método é, porém, menos direto, pois só permite calcular a diferença entre os momentos associados a dois pontos. Resta estabelecer um ponto onde saibamos o valor exato do momento.

Em analogia com (3.4.1), que foi calculado por um método mais adequado, façamos o momento associado à tensão ser zero quando a partícula se encontra no centro do capacitor (isto é, quando $d_1 =$

d_2). Deste modo, o resultado obtido reduzir-se-á ao do caso paralelo quando fizermos $\alpha = 0$.

Vamos supor então que o nosso intervalo de integração na reta sob a qual a partícula caminha é a extensão que vai do centro até o ponto caracterizado pelas distâncias d_1 e d_2 . Esse ponto pode estar dentro ou fora do capacitor. Nesse intervalo a partícula caminha sempre com velocidade constante v_P na direção x .



De acordo com a figura acima, a partícula se desloca do ponto 1 ao 2 num tempo Δt e a variação do momento associada às tensões nesse deslocamento é dado pelo impulso recebido pelas placas nesse tempo, ou seja:

$$\vec{p}_{ten} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{ten} dt \quad (3.6.4)$$

onde $\vec{F}_{ten}$ é a força total devida à tensão nas placas. A partir de cálculos mostrados no apêndice, essa força resultante sobre as placas, a partir de [B3.4] e [B3.5], só não é nula quando

a partícula está na região entre as placas, e é dada por

$$\vec{F}_{len} = \iint_{S'} \vec{E}_{//} dQ = \frac{Q \sigma \gamma}{\epsilon_0} \sin_P \alpha \cos_P \alpha \frac{v_P}{c^2} \hat{e}_{//} \quad (3.6.5)$$

Como a força é independente do tempo, a expressão anterior fica

$$\vec{p}_{len} = \vec{F}_{len} \Delta_A t$$

como no intervalo 1-2 a velocidade é constante, temos

$$v_P = \frac{\left(d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2} \right)}{\Delta_A t}$$

Portanto

$$\Delta_A t = \frac{d_2 - d_1}{2 v_A \sin_A \alpha} \quad (3.6.6)$$

(esse cálculo não teria sentido para $\alpha = 0$ e portanto não se aplica, de forma rigorosa, ao caso do movimento paralelo às placas)

Temos então

$$\vec{p}_{len} = - \frac{Q E_0}{2} \frac{v_P}{c^2} \frac{\sin_P \alpha \cos_P \alpha}{\sin_A \alpha} \left(d_1 - d_2 \right) \hat{e}_{//}$$

(3.6.7)

Mas, utilizando a relação [D1] do apêndice, obtém-se:

$$\frac{\sin_P \alpha \cos_P \alpha}{\sin_A \alpha} = \frac{\sin_P \alpha}{\cos_P \alpha} \frac{\cos_P^2 \alpha}{\sin_A \alpha} = \gamma^{-1} \frac{\sin_A \alpha}{\cos_A \alpha} \frac{\cos_P^2 \alpha}{\sin_A \alpha} = \gamma^{-1} \frac{\cos_P^2 \alpha}{\cos_A \alpha}$$

e portanto

$$\vec{p}_{ten} = - \frac{Q E_0}{2} \frac{v_P}{c^2} \frac{\cos_P^2 \alpha}{\cos_A^2 \alpha} \left[d_1 - d_2 \right] \hat{e}_{//}$$

que é um resultado de igual módulo e direção, mas sentido oposto ao momento eletromagnético de interação.

Da relação acima, vê-se que este momento somado ao momento eletromagnético de interação dá um momento de interação total nulo, ou seja, levando em conta as tensões, não há momento adicional no sistema.

Nesse caso também há energia associada à tensão, pois, como no caso paralelo, o capacitor não se move em relação a seu referencial e $\int_A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ se $d\vec{l} = 0$:

$$\boxed{W_{ten} = 0}$$

(3.6.8)

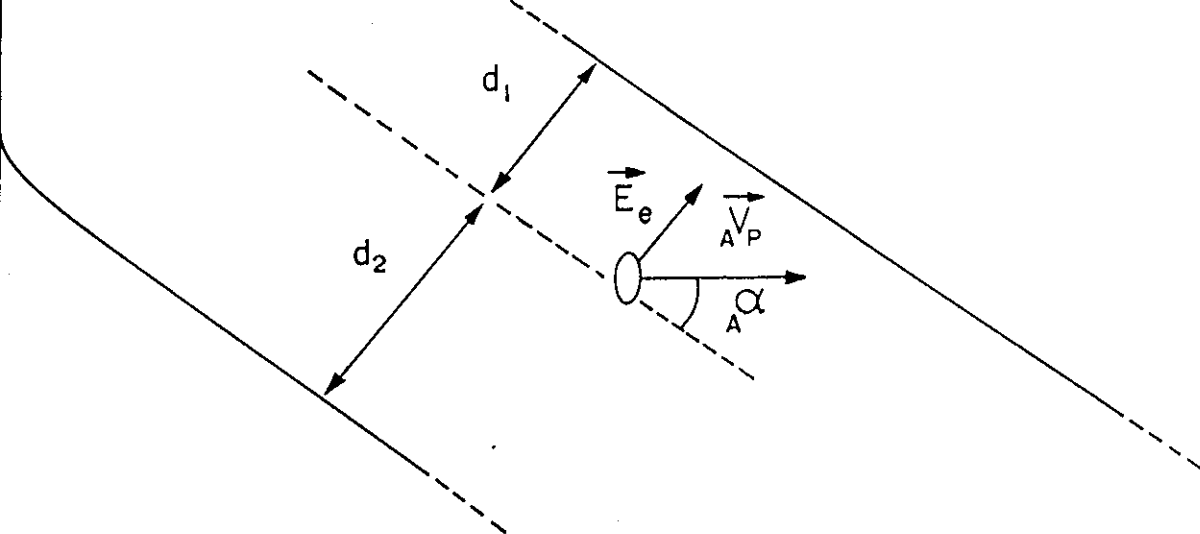
Portanto, também no caso geral de movimento em uma direção qualquer, verifica-se que não há momento adicional nem massa inercial adicional associados à energia potencial.

OUTRAS SITUAÇÕES DE INTERAÇÃO

4.1 - MONOPOLO MAGNÉTICO CLÁSSICO EM INTERAÇÃO COM UM CAPACITOR PLANO PARALELO INFINITO

Para confirmar, em outras situações, os resultados obtidos no capítulo anterior, vamos estudar no presente capítulo outros casos de interação eletromagnética. O primeiro caso é o de um monopolo magnético em interação com um capacitor plano infinito, como o do capítulo anterior. Este caso, embora trabalhe com uma situação que viola a segunda lei de Maxwell, tem particular interesse porque, em contraste com a partícula eletrizada, trata de um caso no qual a energia potencial é nula; e, no entanto, como se verá, existe um momento eletromagnético de interação - o qual, é claro, não pode ser associado à energia potencial.

Devido à concordância do tratamento oblíquo com os casos paralelo e perpendicular quando se faziam os ângulos α tenderem a 0 e $\pi/2$ nos cálculos de momento e energia eletromagnéticos, resolvemos tratar o monopolo magnético diretamente no caso oblíquo e apenas verificar o resultado para esses ângulos particulares.



De acordo com a figura, na região interna do capacitor

$$\vec{E}_e = E_e \sin_{\mathbf{A}} \alpha \hat{x} + E_e \cos_{\mathbf{A}} \alpha \hat{y} \quad (4.1.2)$$

Da expressão acima, utilizando-se (3.1.3), (3.1.6) e (3.1.1), obtemos a densidade de momento devido à interação entre o campo do capacitor e o do monopolo (deve-se ter em mente que agora se trata de um monopolo magnético e não elétrico):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{G}}_{\text{intEM}} = & \frac{E_e G}{c^2 4 \pi} \gamma \left[\cos_{\mathbf{A}} \alpha \frac{\mathbf{A}^z}{\mathbf{r}^3} \hat{x} - \sin_{\mathbf{A}} \alpha \frac{\mathbf{A}^z}{\mathbf{r}^3} \hat{y} \right. \\ & \left. + \left[\sin_{\mathbf{A}} \alpha \frac{\mathbf{A}^y}{\mathbf{r}^3} - \cos_{\mathbf{A}} \alpha \frac{\mathbf{A}^{x'}}{\mathbf{r}^3} \right] \hat{z} \right] \end{aligned}$$

O momento devido à interação dos campos será

$$\vec{P}_{intEM} = \frac{E_0 G}{c^2 4 \pi} \gamma \left[\cos_A \alpha \iiint_{V'} \frac{\hat{z}}{r^3} \hat{x} - \sin_A \alpha \iiint_{V'} \frac{\hat{z}}{r^3} \hat{y} + \left(\sin_A \alpha \iiint_{V'} \frac{\hat{y}}{r^3} - \cos_A \alpha \iiint_{V'} \frac{\hat{x}}{r^3} \right) \hat{z} \right]$$

onde V' continua sendo o volume interno do capacitor, externo ao monopolo.

Utilizando-se os resultados [B3.1], [B3.2] e [B3.3] obtidos no apêndice, chega-se a

$$\begin{aligned} \vec{P}_{intEM} &= \frac{E_0 G}{c^2 4 \pi} \gamma \left[\sin_A \alpha \frac{2\pi}{\gamma} \cos_P \alpha \left(d_1^* - d_2^* \right) - \cos_A \alpha \frac{2\pi}{\gamma} \sin_P \alpha \left(d_1^* - d_2^* \right) \right] \hat{z} \\ &= \frac{E_0 G}{2 c^2} \left(d_1^* - d_2^* \right) \left[\sin_A \alpha \cos_P \alpha - \frac{1}{\gamma} \sin_A \alpha \cos_P \alpha \right] \\ &= \frac{E_0 G}{2 c^2} \left(d_1^* - d_2^* \right) \left[\frac{\sin_P \alpha}{\sin_A \alpha} \sin_A \alpha \cos_P \alpha - \frac{1}{\gamma} \cos_A \alpha \sin_P \alpha \right] \\ &= \frac{E_0 G}{2 c^2} \left(d_1^* - d_2^* \right) \left[\gamma \sin_P \alpha \cos_P \alpha - \frac{\sin_P^2 \alpha}{\tan_A \alpha} \right] \end{aligned}$$

O termo dependente dos ângulos, entre parênteses na expressão acima, pode ser transformado:

$$\gamma \sin_p \alpha \cos_p \alpha - \frac{\sin_p^2 \alpha}{\tan_A \alpha} = \gamma \sin_p \alpha \cos_p \alpha - \frac{\cos_p \alpha \sin_p^2 \alpha}{\gamma \sin_p \alpha}$$

$$= \sin_p \alpha \cos_p \left[\gamma - \frac{1}{\gamma} \right] = \sin_p \alpha \cos_p \alpha \frac{v_p^2}{c^2}$$

Daí obtém-se

$$\vec{A}_{\text{intem}} = \frac{E \cdot G}{2 c^4} \left(d_1 - d_2 \right) \gamma \frac{v_p^2}{c^2} \sin_p \alpha \cos_p \alpha \hat{z} \quad (4.1.2)$$

De acordo com o tratamento do monopolo elétrico em interação com o capacitor plano, era de se esperar que essa expressão para o momento eletromagnético de interação fosse proporcional a $\frac{v_p}{c}$ (ou a uma potência ímpar sua), como é em (3.6.2). Isso não acontece porque a dimensão da carga magnética é diferente da da carga elétrica. Comparando as definições dos campos do monopolo elétrico (2.2.1) e do monopolo magnético (2.3.1) em termos das cargas e sabendo a relação dimensional entre campo elétrico e indução magnética,

$$[E] = L T^{-1} [B]$$

temos que

$$[G] = L T^{-1} [Q]$$

ou seja, a carga magnética tem dimensão de velocidade vezes carga elétrica. Isso explica a ausência da potência ímpar de A^v_P na expressão.

Outro fato a se notar é o de o momento eletromagnético ser na direção z! Não apenas não é paralelo à velocidade da partícula, como também não é paralelo à projeção dessa velocidade sobre as placas, como foi o caso no capítulo anterior.

De 2.3.3, 3.1.4, 3.1.6 e 4.1.2, a densidade de energia da interação é

$$A^{\rho}_{intEM} = \epsilon_0 E_0 \frac{\mu_0}{4\pi} G \gamma A^v_P \left[\sin_A \alpha \, 0 + \cos_A \alpha \, \frac{A^z}{r^3} \right]$$

A energia devida à interação é portanto dada por

$$A^W_{intEM} = \epsilon_0 E_0 \frac{\mu_0}{4\pi} G \gamma A^v_P \cos_A \alpha \iiint_{V'} \frac{A^y}{r^3} d_A V$$

e como a integral é nula, conforme observa-se em [B3.3], no apêndice, obtém-se

$$\boxed{A^W_{intEM} = 0} \quad (4.1.3)$$

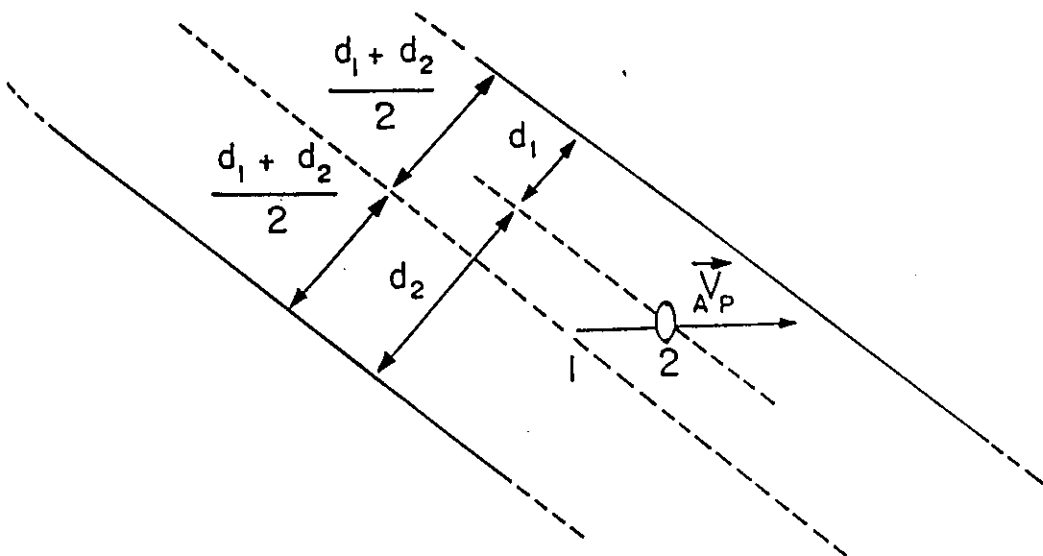
Vê-se, a partir desses resultados (4.1.1 e 4.2.2) que, se for considerada apenas a interação eletromagnética, surge um momento

adicional (perpendicular ao movimento do monopolo e ao campo elétrico do capacitor) que não pode ser atribuído a uma massa inercial devida à energia potencial, já que a energia de interação é nula e o momento nem sequer tem componente paralela à velocidade do monopolo. Note-se que o momento de interação eletromagnética é máximo para $\alpha = \pi/4$ e que ele se anula para ângulos de 0 e $\pi/2$.

Em analogia com o tratamento do monopolo elétrico com movimento oblíquo ao capacitor plano, também aqui calcularemos o momento devido à tensão pela integração no referencial "A" da força total nas placas, supondo que a partícula faça um caminho reto, sempre com a mesma inclinação α em relação às placas do capacitor.

Mais uma vez precisamos estabelecer um ponto onde saibamos o valor exato do momento, já que por esse método só se calcula a diferença entre valores de diferentes pontos. Esse ponto é, novamente, o centro do capacitor ($d_1 = d_2$), por razão semelhante à já citada.

Supomos então que o nosso intervalo de integração na reta sobre a qual a partícula caminha é a extensão que vai do centro até o ponto caracterizado pelas distâncias d_1 e d_2 . Nesse intervalo a partícula caminha sempre com velocidade constante v_p na direção x.



Ao se deslocar, de acordo com a figura acima, a partícula se move do ponto 1 ao 2 num tempo $\Delta_A t$ e o momento associado às tensões na placa nesse deslocamento é dado por

$$\vec{P}_{ten} = \int_0^{\Delta_A t} \vec{F}_{ten} d_A t$$

onde $\vec{F}_{ten}$ é a força resultante exercida pelo monopolo nas placas, que de [B3.7] e [B3.8] é não nula só na região entre as placas, e é dada por

$$\vec{F}_{ten} = \iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{Q} = - \frac{G \gamma A^V_P}{c^2} \sin_p \alpha \cos_p \alpha \hat{z}$$

Como a força é independente do tempo, a expressão anterior fica

$$\vec{P}_{ten} = \vec{F}_{ten} \Delta_A t$$

onde, como no caso do monopolo elétrico, temos:

$$\Delta t_A = \frac{d_2 - d_1}{2 \frac{v}{c} \sin \alpha}$$

e então

$$\vec{p}_{ten} = - \frac{E_0 G}{2 c^4} (d_1 - d_2) \gamma \frac{v^2}{c^2} \sin \alpha \cos \alpha \hat{z} \quad (4.1.4)$$

Da relação acima, vê-se que este momento somado ao momento eletromagnético de interação dá uma momento de interação total nulo,

ou seja, levando em conta as tensões, não há momento total adicional resultante no sistema.

Aqui, como no caso do monopolo elétrico se movendo em relação ao capacitor plano, também não há energia associada à onda de tensão que se move sobre as placas.

$$W_{ten} = 0 \quad (4.1.5)$$

Este é, portanto, um caso interessante, já que a energia de interação eletromagnética é nula mas existe momento de interação associado às tensões.

4.2 - MONOPOLO ELÉTRICO CLÁSSICO EM INTERAÇÃO COM UM CAPACITOR CILÍNDRICO INFINITO

Para efeito de comparação, vamos tratar um caso com uma nova simetria: um monopolo elétrico em um capacitor cilíndrico.

O capacitor com o qual o monopolo interage agora é formado por duas superfícies cilíndricas rígidas e não condutoras, coaxiais infinitas, com densidades de cargas homogêneas e de sinais opostos, com campo externo nulo. A superfície interna tem raio R_1 e densidade superficial de cargas σ_1 , e a externa, R_2 e σ_2 . As densidades são tais que a carga total do capacitor seja nula:

$$\iint_{S_1} \sigma_1 dA + \iint_{S_2} \sigma_2 dA = 0$$

Para uma superfície de integração que seja um corte reto do capacitor de comprimento l , a expressão acima fica

$$\sigma_1 2\pi R_1 l + \sigma_2 2\pi R_2 l = 0$$

Daí temos

$$\sigma_2 = -\frac{R_1}{R_2} \sigma_1 \quad (4.2.1)$$

Como o campo do capacitor é necessariamente cilíndrico, dada a simetria das superfícies, usemos a lei de Gauss para ter o seu valor. Seja uma superfície cilíndrica $\mathcal{S}$ de comprimento l , também de

seção reta circular de raio r e coaxial às superfícies do capacitor. Como para $r > R_2$ e $r < R_1$ a carga total contida na superfície é zero, o campo elétrico nessas regiões é zero também. Já na região $R_1 < r < R_2$ o campo não é nulo. Calculemo-lo:

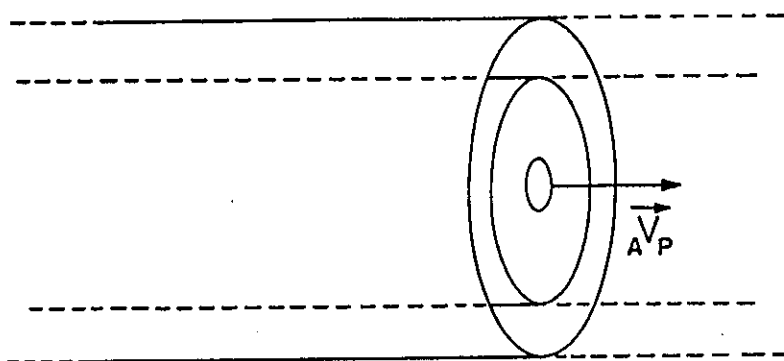
$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E}^C \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_1} \sigma_1 dS$$

$$\vec{E}^C 2\pi r \ell = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} 2\pi R_1 \ell$$

$$\vec{E}^C = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} \vec{r}, \quad (4.2.2)$$

onde $\hat{r}$ é o versor radial cilíndrico.

4.2.1 - MOVIMENTO PARALELO AO EIXO DO CAPACITOR



Quando o movimento da partícula é paralelo ao eixo do capacitor, temos que o campo deste, já calculado acima, se

relaciona com as coordenadas cartesianas como abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} E_y^C &= \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} y \\ \mathbf{A} E_z^C &= \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} z \\ \mathbf{A} E_x^C &= 0 \end{aligned} \tag{4.2.1.1}$$

onde r , o raio das coordenadas cilíndricas, se relaciona com $\mathbf{A} y$ e $\mathbf{A} z$ da seguinte forma:

$$r^2 = \mathbf{A} y^2 + \mathbf{A} z^2$$

Da expressão acima para o campo do capacitor, mais (3.1.3), (3.1.6) e (3.1.1) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \vec{E}_{intEM} &= \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \mathbf{A} r^3 c^2} \mathbf{A}^V_P \gamma r^2 \hat{x} \\ \mathbf{A} \vec{E}_{intEM} &= \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0 4\pi \mathbf{A} r^3 c^2} \mathbf{A}^V_P \gamma \hat{x} \\ \mathbf{A} \vec{D}_{intEM} &= \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0 4\pi c^2} \mathbf{A}^V_P \gamma \iiint_{\mathbf{A} V'} \frac{1}{\mathbf{A} r^3} d\mathbf{A} V \hat{x} \end{aligned}$$

onde $\mathbf{A} V'$, como no caso anterior, é a região onde ambos os capos são não nulos, que é a região entre as duas superfícies cilíndricas do capacitor.

Pelo fato de não conseguirmos ter soluções analíticas para o caso de a partícula estar em qualquer posição (o ajuste dos limites de integração é impraticável num tratamento não numérico, como também a resolução das integrais, que são hiperbólicas), tratamos apenas o caso em que ela está se movendo no eixo do cilindro.

Também cabe acrescentar que apesar da restrição que é a partícula se mover somente no eixo, não é absolutamente inútil fazer esse tratamento, pois seus resultados já são suficientes para esclarecer as questões investigadas neste trabalho.

De acordo com [C1.1], temos

$$\vec{A} \vec{p}_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0 4\pi} \frac{A^v_P \gamma}{c^2} \frac{4\pi}{\gamma} \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{A} \vec{p}_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0} \frac{A^v_P \gamma}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{x}} \quad (4.2.1.2)$$

De (3.1.1), (3.1.4), (3.1.5) e (4.2.1.1), a densidade de energia devida a interação neste caso é dada por

$$A \rho_{intEM} = \epsilon_0 \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0 A r^3} r^2$$

$$A \rho_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q \gamma}{4\pi \epsilon_0 A r^3}$$

Daí

$${}^A W_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{1}{r^3} d_A V$$

que novamente de [C1.1] fica

$${}^A W_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (4.2.1.3)$$

Como no tratamento anterior, da partícula se movendo paralelamente ao capacitor de placas paralelas, neste caso também a energia de interação eletromagnética é igual à energia potencial da partícula no campo do capacitor. Novamente aqui se se levasse em conta somente a parte eletromagnética pareceria haver uma massa associada à energia potencial, pois as quantidades em (4.2.1.2) e (4.2.1.3) se relacionam da forma usual:

$$\vec{P}_{intEM} = \frac{{}^A W_{intEM}}{c^2} {}^A v_P \hat{x}$$

Porém, a exemplo também do caso anterior, há uma tensão se propagando longitudinalmente nas placas, resultante das forças geradas pelo campo da partícula nas cargas superficiais, e a essa tensão se associa um momento

$$\begin{aligned} d_A \vec{p}_{ten} &= -\gamma^2 {}^A v_P^2 {}^A x' d_A \vec{F}_x \hat{x} \\ &= -\gamma^2 {}^A v_P^2 {}^A x' E_x d_A Q \hat{x} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \vec{p}_{ten} = - \gamma^2 \vec{A} v_P \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{A} x'^2}{r^3} dQ \hat{x}$$

De [C1.2] temos

$$\vec{A} \vec{p}_{ten} = - \gamma^2 \vec{A} v_P \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\pi}{\gamma^3} 2 \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{x}$$

$$\vec{A} \vec{p}_{ten} = \frac{\sigma_1 R_1 Q \vec{A} v_P}{\epsilon_0 c^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{x}$$

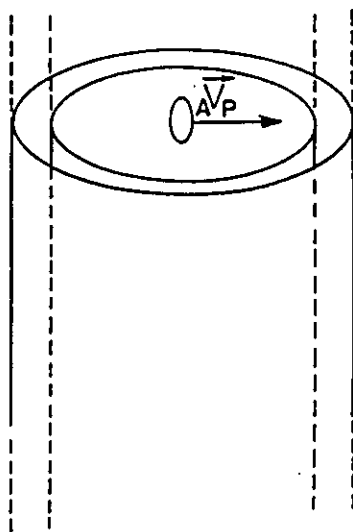
Este momento anula o momento de interação eletromagnética, o que mostra, novamente, que não há efeito de massa associada à energia potencial.

Como visto anteriormente (seção 3.5), a onda de tensão que se propaga não é associada nenhuma energia, no referencial do capacitor.

$$\vec{A} \vec{W}_{ten} = 0$$

4.2.2 - MOVIMENTO PERPENDICULAR AO EIXO DO CAPACITOR, NO EIXO DESTA

Vamos agora considerar o movimento perpendicular ao eixo do capacitor



Vão ser repetidos nesse caso os cálculos de momento e energia causados pelos dois agentes de interação do problema (o campo eletromagnético e as tensões mecânicas). Mas novamente aqui os cálculos serão restritos a quando a partícula se encontra no eixo do cilindro. Isso é feito para tornar os cálculos mais facilmente interpretáveis (isso quando algebricamente factíveis). O leitor que já acompanhou os apêndices compreenderá facilmente a razão.

Nesse caso, usando como referência a figura acima, temos que o campo do capacitor se relaciona agora com as novas coordenadas cartesianas por

$${}_A E_x^C = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 z^2} x$$

$${}_A E_z^C = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 z^2} z \quad (4.2.2.1)$$

$${}_A E_y^C = 0$$

Novamente, das expressões acima, (3.1.3), (3.1.6) e (3.1.1),

$$\vec{A}^{\text{intEM}} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 A r^3} \frac{A^V_P \gamma}{c^2} (A^Z^2 \hat{x} - A^X A^Y \hat{y})$$

e logo

$$\vec{A}^{\text{intEM}} = \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0 4\pi} \frac{A^V_P \gamma}{c^2} \left[\iiint_{A^V} \frac{A^Z^2}{r^2 A r^3} d_A V \hat{x} - \iiint_{A^V} \frac{A^X A^Z}{r^2 A r^3} d_A V \hat{y} \right]$$

De [C2.1] e [C2.2] do apêndice, temos

$$\vec{A}^{\text{intEM}} = \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0 4\pi} \frac{A^V_P \gamma}{c^2} \frac{4\pi c^2}{\gamma^3 A^V_P^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{A}^{\text{intEM}} = \frac{\sigma_1 R_1 Q}{\epsilon_0 \gamma^2 A^V_P} \ln \frac{R_2}{R_1} \hat{x}} \quad (4.2.2.2)$$

De (3.1.1), (3.1.4), (3.1.5) e (4.2.2.1), a densidade de energia devida a interação neste caso é dada por

$$\rho^{\text{intEM}} = \epsilon_0 \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 r^2} \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0 A r^3} (A^X A^X + A^Y A^Z)$$

De onde temos

$$W_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \left[\iiint_{V'} \frac{A^x A^{x'}}{r^2 r^3} dV + \iiint_{V'} \frac{A^y A^z}{r^2 r^3} dV \right]$$

Utilizando [C2.3] e [C2.4] do apêndice, a expressão fica

$$W_{intEM} = \frac{\sigma_1 R_1 Q c^2}{\epsilon_0 \gamma^2 A V_P} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (4.2.2.3)$$

Conforme não se esperava, observando-se as equações 4.2.2.2 e 4.2.2.3, nota-se que a relação

$$\vec{P}_{intEM} = \frac{W_{intEM}}{c^2} \hat{x}$$

que atribui uma massa à energia eletromagnética de interação parece ser válida. Mas com o capacitor cilíndrico acontece algo que não acontece com o capacitor plano, quando a partícula se move perpendicularmente às placas. O capacitor plano tem extensão desprezível na direção da velocidade da partícula, enquanto o cilindro tem uma extensão a ser considerada. Então nas placas deste, possivelmente a tensão não simultânea provocada pelo campo da partícula gere um momento mecânico resultante. Como a superfície a ser tratada é curva, não sabemos como calcular esse momento (para uma superfície reta pudemos calcular partindo do exemplo da barra rígida). Também há o fato das forças aplicadas ao capacitor variarem com o tempo, conforme a partícula se move em relação ao capacitor. Seria necessário um estudo bastante detalhado para computar tal efeito.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÃO

Este trabalho investigou dois pontos ainda não bem esclarecidos na teoria da relatividade restrita: a atribuição (ou não) de massa à energia potencial (de acordo com a equação de Einstein, $E = mc^2$) e a possibilidade de extensão do formalismo quadrivetorial a sistemas extensos em interação.

Estas questões foram analisadas através de exemplos envolvendo eletromagnetismo clássico e relatividade restrita. Primeiro, foram tratados sistemas extensos isolados (o monopolo elétrico clássico, já tratado antes por Lorentz, e o monopolo magnético clássico) e depois sistemas em interação (monopolos em interação com um capacitor plano paralelo infinito e com um capacitor cilíndrico).

A contribuição essencialmente nova deste trabalho é o estudo das propriedades dinâmicas de sistemas onde há interação entre campos eletromagnéticos. Comumente, admite-se que a massa e o momento de uma partícula são iguais, se a velocidade for a mesma, esteja ela isolada ou em um campo externo. Mas não basta admitir isso: é necessário averiguar se é ou não verdade. E como se verificou, não é de forma alguma óbvio que o campo externo não pudesse alterar essas grandezas.

No capítulo 2 analisamos completamente os casos dos movimentos retilíneos no espaço do monopolo elétrico e do suposto monopolo

magnético. Os monopolos, nesse tratamento, são considerados esferas dielétricas com a carga (elétrica e magnética respectivamente) distribuída uniformemente em sua superfície. Embora neste ponto ainda não se possa falar em energia potencial, já se pode ter como lição que sempre ao se tratar sistemas extensos é necessário levar em conta os efeitos mecânicos do sistema: sem se levar em conta o momento e a energia associados à pressão (equações 2.2.15 e 2.2.16 para o monopolo elétrico e 2.3.7 e 2.3.8 para o monopolo magnético), o momento e energia somente eletromagnéticos do sistema (equações 2.2.9 e 2.2.12 para o monopolo elétrico e 2.3.4 e 2.3.6 para o magnético) não obedecem às relações usuais da dinâmica relativística de partículas. Já somando os dois efeitos (eletromagnético e mecânico), vemos que o momento e a energia totais atribuídos ao sistema obedecem a essas relações (equações 2.2.17 e 2.2.18; 2.3.9 e 2.3.10).

A análise do monopolo movendo-se no vácuo indica já o procedimento a ser feito ao se tratarem os casos de interação: o acréscimo do momento e da energia devidos às tensões levam a valores totais associados ao monopolo que formam um quadrivetor nesse caso, o que se espera de um sistema isolado.

Deve-se, portanto, ao analisar-se os casos de interação, sempre levar em conta também momentos e energias associados a fenômenos mecânicos que resultem da interação (e não apenas os eletromagnéticos).

Esse procedimento nos leva à conclusão, no estudo do monopolo em interação com o capacitor plano paralelo infinito, de que não há uma massa associada à energia potencial.

Nesse caso, vamos supor que as duas partes do sistema

(digamos, parte 1 e parte 2) que interagem mantêm, isoladas, as relações usuais da dinâmica relativística (momento e energia totais de cada parte isolada formando um quadrivetor), o que torna possível a associação de uma massa maupertuisiana a cada uma das partes. Chamemos esses quadrivetores de Q_1^i e Q_2^i . Eles, na sua forma contravariante, satisfazem às regras de transformação

$${}_A Q_1^j = \frac{\partial {}_A x^j}{\partial {}_P x^i} {}_P Q_1^i$$

$${}_A Q_2^j = \frac{\partial {}_A x^j}{\partial {}_P x^i} {}_P Q_2^i$$

onde usamos acima a notação de Einstein (repetição de um índice indica somatória com respeito ao índice que foi repetido).

Quando as duas partes interagem, surge um momento Δp e uma energia ΔE adicionais, devidos à interação. Formemos com essa quantidade um vetor quadridimensional e chamemo-lo ΔQ :

$$\Delta Q^\alpha = \Delta p^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\Delta Q^4 = i \Delta E/c$$

Das relações de transformação para Q_1 e Q_2 temos que o momento e energia totais do sistema formam também um quadrivetor, isto é,

$${}_A (Q_1 + Q_2 + \Delta Q)^j = \frac{\partial {}_A x^j}{\partial {}_P x^i} {}_P (Q_1 + Q_2 + \Delta Q)^i$$

se e somente se ΔQ também for quadrivetor, ou seja, se

$${}_A(\Delta Q)^i = \frac{\partial {}_A X^j}{\partial {}_P X^i} {}_P(\Delta Q)^i$$

Podemos verificar da seção 3.5, onde vemos, das equações (3.5.11, 12, 13 e 14) que para o carrinho e para a placa, respectivamente, a variação de energia (ΔW) e de momento (Δp) devidos à interação não formam um quadrivetor, pois não possuem módulo invariante:

$${}_P(\Delta W^2 - \Delta p^2 c^2)_C = - F^2 L^2 \frac{T_{VC}^2}{c^2}$$

$${}_P(\Delta W^2 - \Delta p^2 c^2)_P = \left[\frac{T_{VC}^\gamma}{T_{VP}^\gamma} \right]^2 F^2 L^2 \frac{T_{VC}^2}{c^2}$$

Como vemos, ambas as expressões acima são dependentes da velocidade.

No capítulo 3 analisamos completamente um caso onde há sistemas eletromagnéticos extensos em interação: o caso de um monopolo elétrico movendo-se na região de um capacitor plano paralelo infinito. Analisamos os casos em que o movimento é paralelo, perpendicular e oblíquo às placas.

Ao considerar apenas os movimento paralelo e perpendicular do monopolo elétrico em relação às placas do capacitor plano, vemos que se só fosse considerado o momento de interação eletromagnético, o momento seria assimétrico:

- para uma mesma velocidade, no mesmo ponto, em direções

diferentes, o momento seria diferente (equações 3.2.2 e 3.3.2);

- para uma mesma energia (3.2.3 e 3.3.3), em diferentes direções, o momento seria diferente;

- dentro do capacitor, para uma mesma velocidade, o momento no caso paralelo dependeria do ponto onde estivesse a carga (mais próximo do centro ou mais próximo das placas); fora do capacitor esse efeito dependeria apenas da distância entre as placas.

Não é de se esperar que existam esses efeitos, pois todas as experiências de dinâmica de elétrons em campos eletromagnéticos nunca levaram em conta esse momento adicional e parece haver boa concordância entre teoria e experiência.

O problema pode ser resolvido, neste caso, levando-se em conta o efeito de tensão nas placas. O momento total associado ao movimento da partícula está, em parte, na onda de tensão que se propaga na placa. O momento total, no caso paralelo, é

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}^0 + \vec{p}_{\text{intEM}} + \vec{p}_{\text{ten}}$$

e de 3.2.2 e 3.4.1 se reduz, portanto ao momento da partícula isolada, coincidindo com o resultado do caso perpendicular (3.3.2 e 3.4.2). Portanto, quando se leva em conta o momento associado à onda de tensão, o momento total deixa de ser assimétrico.

Se o momento da onda de tensão não fosse levado em conta, poder-se-ia, no caso paralelo, atribuir uma massa maupertuisiana à energia potencial, pois, nesse caso,

$$\frac{A^P_{\text{intEM}}}{A^V_P} = \frac{A^W_{\text{intEM}}}{c^2}$$

como se pode observar das equações 3.3.2 e 3.2.3.

Pode-se pensar na possibilidade de fazer uma experiência para averiguar se há variação de massa com a energia potencial, de acordo com o movimento paralelo da partícula perto do capacitor plano.

Vê-se, da equação 3.2.3, que a energia de interação eletromagnética (e conseqüentemente a massa maupertuisiana possivelmente associada a ela, da expressão 3.2.2. para o momento eletromagnético de interação) dependem da diferença $d_1 - d_2$. Essa diferença vale D e $-D$ para quando a partícula se move fora do capacitor, respectivamente do lado da placa com densidade positiva e do lado da negativa.

Então, o possível acréscimo à massa da partícula seria positivo para quando a partícula se move ao lado da placa positiva e negativo quando se move ao lado da negativa, de forma que a possível diferença de massa entre partículas se movendo de um e do outro lado seria

$$\Delta_A m = 2 \frac{A W_{int}}{c^2} = \frac{2}{c^2} \frac{Q E_0 D}{2} = \frac{Q V}{c^2}$$

onde V é a diferença de potencial entre as placas. Para um elétron com uma diferença de potencial de 50000 volts, temos

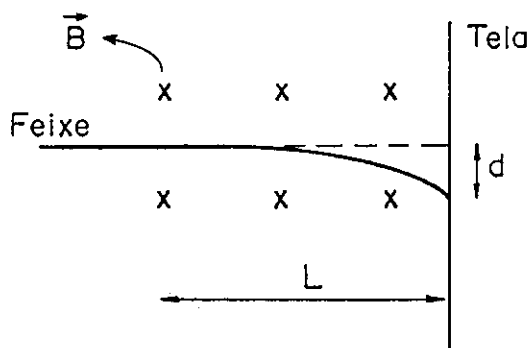
$$\frac{\Delta_A m}{m_0} \approx \frac{0,05 \text{ MeV} / c^2}{0,5 \text{ MeV} / c^2} = 10\%$$

Estamos utilizando a massa de repouso do elétron, supondo que sua energia cinética é pequena.

Podemos então observar a hipotética diferença que esse

acréscimo de massa causaria na deflexão por um campo magnético (que não altera a energia potencial da partícula).

Vamos supor um feixe de partículas defletido por um campo magnético:



Em primeira aproximação, vamos considerar que a deflexão   pequena e que a força magnética F_y que atua sobre a partícula é expressa são com relação à velocidade da carga Q na direção x (v_x):

$$F_y \cong Q v_x B_z \cong \frac{p_y}{t}$$

onde p_y é o momento adquirido na direção y durante o tempo t em que a partícula passa na região de campo magnético. Sendo a distância que a partícula viaja nessa região igual a L ,

$$t \cong \frac{L}{v_x}$$

e conseqüentemente

$$p_y \cong Q B_z L$$

A deflexão d sofrida pelo feixe é dada por

$$\frac{d}{L} \cong \frac{v_y}{v_x}$$

Nessa aproximação a velocidade na direção não muda, portanto podemos associá-la com a diferença de potencial inicial que forneceu energia cinética às partículas, E_c :

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = E_c$$

onde m é a massa das partículas.

Relacionando p_y à massa, temos

$$p_y = m v_y$$

e a deflexão sofrida fica

$$d = \frac{Q B_z L \sqrt{m}}{(2 E_c \sqrt{m})^{1/2}} = \frac{Q B_z L}{(2 m E_c)^{1/2}}$$

Dessa expressão temos que a uma variação relativa de massa se relaciona uma variação relativa na deflexão da seguinte forma:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m}$$

Para o valor estimado da possível variação relativa de massa espera-se que, caso esse efeito ocorra, o feixe sofra um desvio

relativo de 5%.

Então, se se puder construir um capacitor plano grande o suficiente para ser considerado infinito em comparação com os aparatos de deflexão, ao se alternar a voltagem do capacitor espera-se um desvio na deflexão do feixe da ordem de 5%.

A rigor a teoria desenvolvida no trabalho se aplica apenas a partículas clássicas, no entanto, como é difícil imaginar um exemplo com partículas macroscópicas, foram feitos os cálculos acima para um elétron.

As conclusões anteriormente obtidas a respeito das grandezas momento e energia para os movimentos paralelo e perpendicular do monopolo são confirmadas no estudo do movimento oblíquo, na seção 3.6 (ver equações 3.6.2, 3 e 7).

Na análise da interação do capacitor plano com o monopolo elétrico, contando com as alterações eletromagnéticas e mecânicas no momento e energia do sistema, vemos que o fato dos sistemas interagirem implica numa alteração na energia total do sistema, (o sistema ganha uma energia $\Delta W = {}_A W_{intEM}$, dada pela equação 3.6.3) sem que haja um momento a ela associado ($\vec{p}_{intEM} = - \vec{p}_{ten}$, logo $\Delta \vec{p}_{int} = 0$). De acordo com o raciocínio acima, também neste caso $\Delta W^2 - \Delta p^2 c^2$ não é um quadrivetor,

$${}_A \Delta W_{int}^2 - {}_A \Delta p_{int}^2 c^2 = {}_A W_{intEM}^2 = \gamma {}_P {}_A {}_P W_{int}^2$$

mas depende de γ , que varia com a velocidade.

Ao se analisar, no capítulo 4, o movimento oblíquo de um monopolo magnético na região de um capacitor plano paralelo infinito, se não se considerasse o momento da onda de tensão, o

resultado seria ainda mais surpreendente: haveria um momento adicional que não seria nem paralelo às placas nem à direção do movimento do monopolo (equação 4.1.2). Esse momento não seria associado a nenhuma energia potencial (pois $W_{intEM} = 0$ nesse caso). Mas novamente o momento atribuído às tensões anula o momento de interação eletromagnético.

Conclusões idênticas ao caso do monopolo elétrico em interação com o capacitor plano são obtidas na análise do movimento paralelo do monopolo elétrico no eixo de um capacitor cilíndrico infinito. O movimento perpendicular não foi completamente analisado pela dificuldade de computar o momento devido às tensões numa superfície curva, devido a tensões variáveis com o tempo.

Embora o procedimento empregado no cálculo das grandezas empregue conceitos de uma teoria bem conhecida, cabe ressaltar possíveis problemas conceituais:

- Alguns autores chamam a atenção para a possibilidade de descrever-se a localização e o fluxo de energia no campo eletromagnético de forma diferente da que foi feita por Poynting; basicamente, qualquer outro vetor que tenha a mesma divergência que o vetor de Poynting descreve igualmente bem o fluxo de energia através de uma superfície fechada; o uso desses vetores alternativos pode levar a resultados diferentes dos usuais, em certas aplicações. Utilizando uma descrição alternativa, por exemplo, Wilson mostrou que é possível eliminar-se o fator $4/3$ da massa eletromagnética do elétron, sem ser necessário levar em conta as tensões de Poincaré (WILSON, 1936).

- Mesmo admitindo-se as equações de densidade de momento e fluxo de energia usualmente empregadas, é possível efetuar-se a

integração sobre todo o espaço de duas maneiras: utilizando-se uma integração sincrônica ou assincrônica. Embora usualmente se utilize a integração sincrônica, alguns autores têm defendido o uso da integração assincrônica, em especial no cálculo da energia e massa de um elétron em movimento (GAMBA, 1965, 1967; CAVALLERI e SALGARELLI, 1969).

- O tratamento feito aqui não leva em conta quaisquer efeitos quânticos. O tratamento é totalmente clássico e, a rigor, aplica-se a cargas elétricas macroscópicas. Não se pode inferir que o comportamento de um elétron obedeça rigorosamente à teoria aqui desenvolvida.

- Na nossa análise o objeto de estudo tem sempre velocidade constante; não poderíamos estender as conclusões para o sistema próton + elétron, nem considerando-os como cargas clássicas, pois aí a velocidade muda de direção. Nesse caso não seria trivial calcular os efeitos mecânicos usando cálculos de grandezas dinâmicas que empregam somente relações fundamentais entre as grandezas.

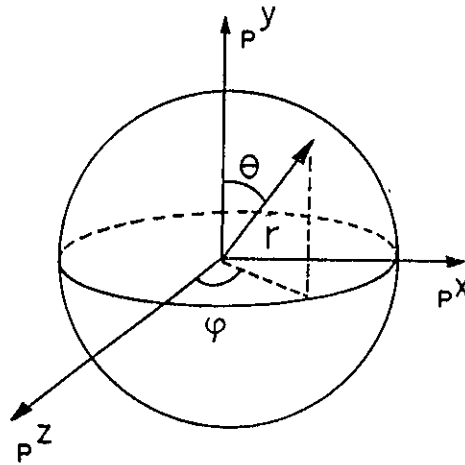
- As conclusões obtidas são aplicáveis ao eletromagnetismo clássico apenas, não sendo imediatamente extensíveis a outros tipos de interação (forte, fraca, gravitacional,...). Se se deseja esclarecer a questão aqui abordada para outros tipos de interação, deverá ser feita uma análise minuciosa.

APÊNDICES

Nos apêndices abaixo são feitos cálculos e desenvolvidos raciocínios cujos resultados foram empregados no texto anterior.

A - MONOPOLOS ELÉTRICO E MAGNÉTICO LIVRES

Seja ${}_P x$, ${}_P y$ e ${}_P z$ um sistema de coordenadas cartesiano com seu centro no monopolo. Suas relações com as coordenadas esféricas são:



$$\begin{cases} {}_P x = r \sin \theta \sin \varphi \\ {}_P y = r \cos \theta \\ {}_P z = r \sin \theta \cos \varphi \end{cases}$$

Dai podemos obter as relações entre as coordenadas do referencial da partícula e as coordenadas cartesianas no referencial "A".

$$\begin{cases} {}_A x' = \gamma^{-1} r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ {}_A y = r \cos \theta \\ {}_A z = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \end{cases}$$

O jacobiano da transformação entre as coordenadas do referencial "A" com as coordenadas esféricas é:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial ({}_A x', {}_A y, {}_A z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} \\ &= \begin{vmatrix} \gamma^{-1} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \gamma^{-1} \cos \theta \operatorname{sen} \varphi & -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \cos \varphi \\ \gamma^{-1} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi & 0 & -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} \\ &= \gamma^{-1} r^2 \operatorname{sen} \theta = \gamma^{-1} \frac{\partial ({}_P x, {}_A y, {}_A z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} \end{aligned}$$

O módulo deste Jacobiano será utilizado para os cálculos das integrais de volume, onde $d_A V$ poderá ser

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{{}_A y^2}{{}_A r^3} d_A V &= \iiint_V \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^3} \frac{r^2 \operatorname{sen} \theta}{\gamma} dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{R_0}^\infty \frac{1}{r^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma} \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right] \Big|_0^\pi \left[-\frac{1}{r} \right] \Big|_{R_0}^\infty (\varphi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\gamma} \frac{2}{3} \frac{1}{R_0} 2\pi$$

$$\boxed{\iiint_V \frac{A_y^2}{A r^\sigma} d_A V = \frac{4 \pi}{3 \gamma R_o}}$$

[A1]

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{z^2}{A r^\sigma} d_A V &= \iiint_V \frac{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{r^\sigma} \frac{r^2 \sin \theta}{\gamma} dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_{R_o}^\infty \frac{1}{r^2} dr \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right] \Big|_0^\pi \left[-\frac{1}{r} \right] \Big|_{R_o}^\infty \left[\frac{1}{2} \varphi - \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(2 - \frac{2}{3} \right) \frac{1}{R_o} \pi \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_V \frac{A_z^2}{A r^\sigma} d_A V = \frac{4 \pi}{3 \gamma R_o}}$$

[A2]

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{A_x A_y}{A r^\sigma} d_A V &= \iiint_V \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi}{r^\sigma} \frac{r^2 \sin \theta}{\gamma} dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} \iint \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} dr d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} \iint \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} dr d\theta (-\cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_V \frac{A_x A_y}{A r^\sigma} d_A V = 0}$$

[A3]

$$\begin{aligned}
 \iiint_{A V} \frac{A^X A^Z}{A^{r^6}} d_A V &= \iiint_{A V} \frac{r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi}{r^6} \frac{r^2 \sin \theta}{r} dr d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{r} \iint \frac{\sin^3 \theta}{r^2} dr d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\
 &= \frac{1}{r} \iint \frac{\sin^3 \theta}{r^2} dr d\theta \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{A V} \frac{A^X A^Z}{A^{r^6}} d_A V = 0} \quad [A4]$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_{P V} \frac{1}{P^{r^4}} d_P V &= \iiint_{P V} \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{R_0}^\infty \frac{1}{r^2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2 \frac{1}{R_0} 2\pi
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{P V} \frac{1}{P^{r^4}} d_P V = \frac{4\pi}{R_0}} \quad [A5]$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_{A V} \frac{A^{X^2}}{A^{r^6}} d_A V &= \iiint_{A V} \frac{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{r^2 r^6} \frac{r^2 \sin \theta}{r} dr d\theta d\varphi \\
 &= \frac{1}{r^3} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_{R_0}^\infty \frac{1}{r^2} dr \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\gamma^3} \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Big|_0^\pi \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_0}^\infty \left(\frac{1}{2} \varphi - \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$\frac{1}{\gamma^3} \left(2 - \frac{2}{3} \right) \frac{1}{R_0} \pi$$

$$\iiint_V \frac{A_{x',2}}{A_{r^3}} d_A V = \frac{4 \pi}{3 \gamma^3 R_0}$$

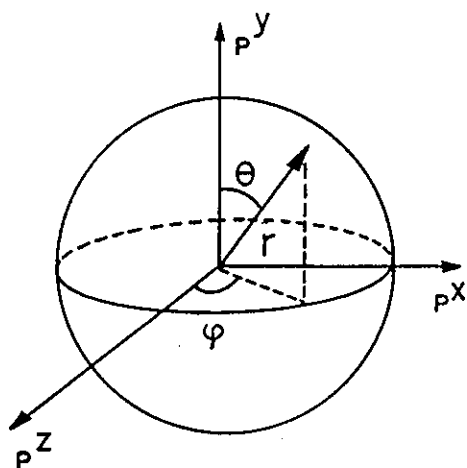
[A6]

B - MONOPOLOS EM INTERAÇÃO COM O CAPACITOR PLANO PARALELO

INFINITO

B1 - MOVIMENTO PARALELO

Seja ${}_P x, {}_P y, {}_P z$ um sistema de coordenadas cartesiano com centro no monopolo. as relações com as coordenadas esféricas são:



$$\begin{cases} {}_P x = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ {}_P y = r \cos \theta \\ {}_P z = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \end{cases}$$

Então

$$\begin{cases} {}_A x' = \gamma^{-1} r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ {}_A y = r \cos \theta \\ {}_A z = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \end{cases}$$

$$\iiint_{V'} {}_A y {}_A r^{-3} d{}_A x' d{}_A y d{}_A z = \iiint_{V'} r \cos \theta r^{-3} \gamma^{-1} r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_{R_0}^{d_1 \cos\theta} \gamma^{-1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_{R_0}^{d_2 \cos\theta} \gamma^{-1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi \gamma^{-1} d_1 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta - 2\pi \gamma^{-1} d_2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \\
&\quad + 2\pi R_0 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta + 2\pi R_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi \gamma^{-1} d_1 (-\cos\theta) \Big|_0^{\pi/2} - 2\pi \gamma^{-1} d_2 (-\cos\theta) \Big|_{\pi/2}^{\pi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_A y_A r^{-3} d_A V = \frac{2\pi}{\gamma} (d_1 - d_2)} \quad [B1.1]$$

$$\iint_A x'_A E_x d_A Q$$

Para o cálculo dessa integral a superfície de integração será separada em duas:

$${}_A S' = {}_A S'_{\text{sup}} + {}_A S'_{\text{inf}}$$

os índices sup e inf referindo-se às placas superior e inferior respectivamente.

$$\text{Para } S_{\text{sup}} \begin{cases} r = d_1 / \cos\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ d_A Q = - \sigma d_A S \end{cases}$$

$$\text{Para } S_{\text{inf}} \begin{cases} r = -d_2 / \cos \theta \\ \pi/2 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ d_A Q = +\sigma d_A S \end{cases}$$

$$d_A S = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

Na superfície $r = d / \cos \theta$

$$\text{Daí } \begin{cases} x' = \gamma^{-1} d \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y = d \\ z = d \operatorname{tg} \theta \operatorname{coss} \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \gamma^{-1} d \sec^2 \theta \operatorname{sen} \varphi & 0 & d \sec^2 \theta \operatorname{coss} \varphi \\ \gamma^{-1} d \operatorname{tg} \theta \operatorname{coss} \varphi & 0 & -d \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix}$$

$$\text{Daí } d_A S = \gamma^{-1} d^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta d\theta d\varphi$$

$$\iint_{S'_{A \text{ sup}}} x'_A E_x d_A Q = \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \iint_{S'_{A \text{ sup}}} x'_A r^{-3} \sigma d_A S$$

$$= \frac{Q \gamma}{4\pi \epsilon_0} \iint_{S'_{A \text{ sup}}} \frac{\gamma^{-2} d_1^2 \operatorname{tg}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \varphi \gamma^{-1} d_1^2 \operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta d\theta d\varphi}{d_1^2 \cos^{-3} \theta}$$

$$= \frac{Q \sigma d_1}{4\pi \epsilon_0 \gamma^2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{d_1}{\gamma^2} \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \sec^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{d_1}{\gamma^2} \left[(-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} - (\cos^{-1} \theta) \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{d_1}{\gamma^2} \left[2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(R^2 + d_1^2)^{1/2}}{d_1} \right]$$

onde a parte da integral que diverge foi substituída por um limite onde se tomam as placas do capacitor como se fossem circulares de raio R que tende a infinito.

$$\iint_{S'_{inf}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' \, E_x \, dA \, Q = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \iint_{S'_{inf}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}' \, r^{-3} (-\sigma) \, dA \, S$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \iint_{S'_{inf}} \frac{\gamma^{-2} d_2^2 \, \text{tg}^2 \theta \, \sin^2 \varphi (-\sigma) \, \gamma^{-1} d_2^2 (-\text{tg} \theta) \sec^2 \theta \, d\theta \, d\varphi}{-d_2^3 \cos^{-3} \theta}$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-d_2)}{\gamma^2} \int_{\pi/2}^{\pi} \text{tg}^2 \theta \, \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-d_2)}{\gamma^2} \left[(-\cos \theta) \Big|_{\pi/2}^{\pi} - (\cos^{-1} \theta) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-d_2)}{\gamma^2} \left[2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{(R^2 + d_2^2)^{1/2}}{d_2} \right]$$

Daí
$$\iint_{S'} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{E}_x \, d\mathbf{A} Q = \frac{Q \sigma}{4 \epsilon_0 \gamma^2} 2 (d_1 - d_2)$$

$$+ \frac{Q \sigma}{4 \epsilon_0 \gamma^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[(R^2 + d_2^2)^{1/2} - (R^2 + d_1^2)^{1/2} \right]$$

$$(R^2 + d_2^2)^{1/2} - (R^2 + d_1^2)^{1/2}$$

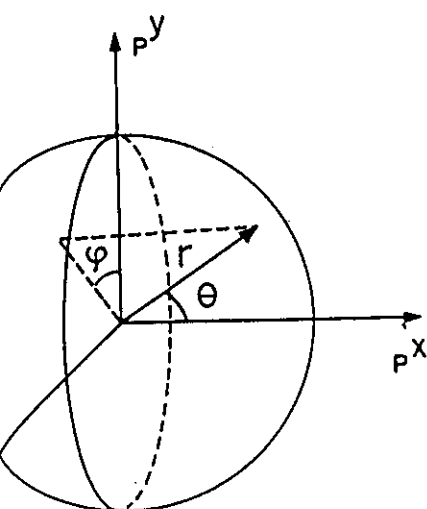
$$= R \left[\left(1 + d_2^2 R^{-2} \right)^{1/2} - \left(1 + d_1^2 R^{-2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\cong R \left[\left(1 + \frac{1}{2} d_2^2 R^{-2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} d_1^2 R^{-2} \right) \right]$$

Portanto o limite é zero e como $\sigma = \epsilon_0 E_0$

$$\boxed{\iint_{S'} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{E}_x \, d\mathbf{A} Q = \frac{Q E_0 (d_1 - d_2)}{2 \gamma^2}}$$

[B1.2]



Seja

$$\begin{cases} x' = \gamma^{-1} r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} y_A r^{-3} dV &= \iiint_{V'} r \sin \theta \cos \varphi r^{-3} \gamma^{-1} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \iint \sin^2 \theta dr d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{V'} y_A r^{-3} dV = 0} \quad [B2.1]$$

$$\boxed{\iiint_{V'} z_A r^{-3} dV = 0} \quad [B2.2]$$

[B2.2] é zero pelo mesmo motivo que [B2.1]: a integração da parte em φ é zero.

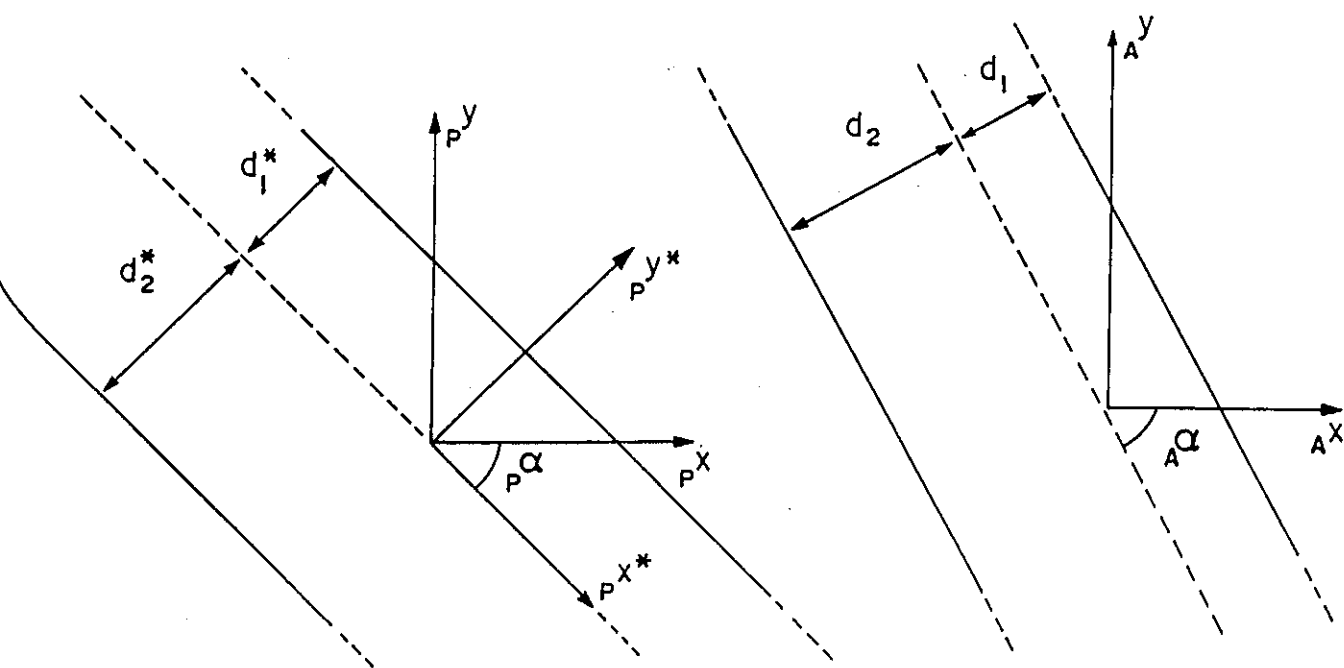
$$\iiint_{V'} x'_A r^{-3} dV = \iiint_{V'} \gamma^{-1} r \cos \theta r^{-3} \gamma^{-1} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma^{-2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_{R_0}^{d_1^* \cos^{-1}\phi} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&\quad + \gamma^{-2} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_{R_0}^{-d_2^* \cos^{-1}\phi} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= 2\pi \gamma^{-2} \left(d_1 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta - d_2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \right) \\
&\quad + 2\pi R_0 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta + 2\pi R_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_A x_A' r_A^{-3} \, d_A V = \frac{2\pi}{\gamma} (d_1 - d_2)}$$

[B2.3]

B3 - MOVIMENTO OBLÍQUO



como a simetria do campo é esférica no referencial da partícula, as coordenadas esféricas serão relacionadas com $_Px$, $_Py$ e $_Pz$ (também para facilitar as condições de contorno)

$$(1) \quad \begin{cases} {}_Px^* = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ {}_Py^* = r \cos \theta \\ {}_Pz^* = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \end{cases}$$

Da figura

$$(2) \quad \begin{cases} {}_Px = {}_Px^* \cos {}_P\alpha + {}_Py^* \operatorname{sen} {}_P\alpha \\ {}_Py = -{}_Px^* \operatorname{sen} {}_P\alpha + {}_Py^* \cos {}_P\alpha \\ {}_Pz = {}_Pz^* \end{cases}$$

Das transformações de Lorentz

$$(3) \quad \begin{cases} {}_A x' = \gamma^{-1} {}_P x \\ {}_A y = {}_P y \\ {}_A z = {}_P z \end{cases}$$

De (1), (2) e (3)

$$(4) \quad \begin{cases} {}_A x' = \gamma^{-1} (r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos {}_P \alpha + r \cos \theta \operatorname{sen} {}_P \alpha) \\ {}_A y = -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} {}_P \alpha + r \cos \theta \cos {}_P \alpha \\ {}_A z = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial ({}_A x', {}_A y, {}_A z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} &= \frac{\partial ({}_A x, {}_A y, {}_A z)}{\partial ({}_P x, {}_P y, {}_P z)} \frac{\partial ({}_P x, {}_P y, {}_P z)}{\partial ({}_P x^*, {}_P y^*, {}_P z^*)} \frac{\partial ({}_P x^*, {}_P y^*, {}_P z^*)}{\partial (r, \theta, \varphi)} \\ &= \gamma^{-1} r^2 \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} {}_A y' r^{-3} d_A V &= \iiint_{V'} (-r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} {}_P \alpha + r \cos \theta \cos {}_P \alpha) r^{-3} \\ &\quad \times \gamma^{-1} r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \gamma^{-1} \operatorname{sen} {}_P \alpha \iint \operatorname{sen}^2 \theta dr d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \\ &\quad + \gamma^{-1} \cos {}_P \alpha \iint \cos \theta \operatorname{sen} \theta dr d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \gamma^{-1} \cos {}_P \alpha 2\pi \left[\int_0^{\pi/2} \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{R_0}^{d_1^* \cos^{-1} \phi} dr \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \int_{R_0}^{-d_2^* \cos^{-1} \phi} dr \right] \end{aligned}$$

$$= 2\pi \gamma^{-1} \cos {}_P \alpha \left[d_1^* \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta d\theta - d_2^* \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta \right]$$

$$+ R_0 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta \Bigg]$$

$$= 2\pi \gamma^{-1} \cos_p \alpha \left(d_1^* - d_2^* \right)$$

$$\boxed{\iiint_{A V'} y_A r^{-3} \, dV = \frac{2\pi}{\gamma} \cos_p \alpha \left(d_1^* - d_2^* \right)} \quad [B3.1]$$

$$\iiint_{A V'} z_A r^{-3} \, dV = \iiint_{A V'} r \sin \theta \cos \varphi \, r^{-3} \gamma^{-1} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \iint \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi$$

$$\boxed{\iiint_{A V'} z_A r^{-3} \, dV = 0} \quad [B3.2]$$

$$\iiint_{A V'} x_A r^{-3} \, dV$$

$$= \iiint_{A V'} \gamma^{-1} \left(r \sin \theta \sin \varphi \cos_p \alpha + r \cos \theta \sin_p \alpha \right) \\ \times r^{-3} \gamma^{-1} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \gamma^{-2} \left[\cos_p \alpha \iint \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \right. \\ \left. + \sin_p \alpha \iint \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= 2\pi \gamma^{-2} \sin_p \alpha \left[\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_{R_0}^{d_1^* \cos^{-1} \phi} dr \right. \\ \left. + \int_{\pi/2}^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_{R_0}^{-d_2^* \cos^{-1} \phi} dr \right]$$

$$= 2\pi \gamma^{-2} \text{sen}_p \alpha \left[d_1^* \int_0^{\pi/2} \text{sen} \theta \, d\theta - d_2^* \int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen} \theta \, d\theta - R_0 \int_0^{\pi} \cos \theta \, \text{sen} \theta \, d\theta \right]$$

$$= 2\pi \gamma^{-2} \text{sen}_p \alpha (d_1^* - d_2^*)$$

$$\boxed{\iiint_A y_A r^{-3} dV = \frac{2\pi}{\gamma^2} \text{sen}_p \alpha (d_1^* - d_2^*)}$$

[B3.3]

Tal como no caso paralelo, para fazer as integrais sobre a superfície total do capacitor, vamos separá-la em superior e inferior. Como no caso é importante saber explicitamente o valor das integrais quando a partícula se encontra fora da região entre as placas (porque as integrais referem-se à força total agora, através da qual o momento será calculado por uma integral de linha), vamos separar também essas duas regiões (dentro e fora). Por questão de simetria, é óbvio que é apenas necessário calcular só de um dos lados, quando a partícula está fora.

$$\text{Para } S_{\text{sup}} \begin{cases} r = d_1^* / \cos \theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (\text{dentro e fora}) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ d_A Q = - \sigma d_A S \end{cases}$$

$$\text{Para } S_{\text{inf}} \begin{cases} r = d_2^* / \cos \theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ (dentro)} \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi \text{ (fora)} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ d_A Q = - \sigma d_A S \end{cases}$$

Como na superfície temos $r \cos \theta = d^*$,

$$(5) \quad \begin{cases} x'_A = \gamma^{-1} (d^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos_p \alpha + d^* \operatorname{sen}_p \alpha) \\ y_A = -d^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}_p \alpha + d^* \cos_p \alpha \\ z_A = d^* \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} =$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \gamma^{-1} d^* \sec^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \cos_p \alpha & \gamma^{-1} d^* \sec^2 \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}_p \alpha & d \sec^2 \theta \cos \varphi \\ \gamma^{-1} d^* \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \cos_p \alpha & \gamma^{-1} d^* \operatorname{tg} \theta \cos \varphi \operatorname{sen}_p \alpha & -d \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix}$$

$$= (d^*)^2 \operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta \left[\hat{x} (\operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}_p \alpha + \cos^2 \varphi \operatorname{sen}_p \alpha) + \hat{y} (\cos^2 \varphi \cos_p \alpha + \operatorname{sen}^2 \varphi \cos_p \alpha) + \hat{z} 0 \right]$$

Dai

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (d^*)^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta (\operatorname{sen}_p^2 \alpha + \gamma^{-2} \cos_p^2 \alpha)^{1/2}$$

$$\text{mas } \operatorname{sen}_p^2 \alpha + \gamma^{-2} \cos_p^2 \alpha = \operatorname{sen}_p^2 \alpha (1 + \gamma^{-2} \operatorname{tg}_p^{-2} \alpha)^{1/2}$$

que de [F1] fica

$$\operatorname{sen}_p^2 \alpha \quad \operatorname{sen}_A^{-2} \alpha$$

$$\text{Então } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (d^*)^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha / \operatorname{sen}_A \alpha$$

Quando a partícula está fora do capacitor

$$\begin{aligned} \iint_{S'_A} E_{//} d_A Q &= \iint_{S'_{\text{sup}}} (E_x \cos_A \alpha - E_y \operatorname{sen}_A \alpha) \sigma d_A S \\ &\quad + \iint_{S'_{\text{inf}}} (E_x \cos_A \alpha - E_y \operatorname{sen}_A \alpha) (-\sigma) d_A S \\ &= \frac{Q \sigma \gamma}{4 \pi \epsilon_0} \left[\cos_A \alpha \iint_{S'_{\text{sup}}} x'_A r^{-3} d_A S - \operatorname{sen}_A \alpha \iint_{S'_{\text{sup}}} y'_A r^{-3} d_A S \right. \\ &\quad \left. - \cos_A \alpha \iint_{S'_{\text{inf}}} x'_A r^{-3} d_A S + \operatorname{sen}_A \alpha \iint_{S'_{\text{inf}}} y'_A r^{-3} d_A S \right] \quad (5) \end{aligned}$$

Calculamos agora cada uma das integrais acima:

$$\begin{aligned} \iint_{S'_{\text{sup}}} x'_A r^{-3} d_A S &= \iint_{S'_{\text{sup}}} \frac{\gamma^{-1} (d_1^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha_P + d_1^* \operatorname{sen} \alpha_P)}{(d_1^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times \\ &\quad \times (d_1^*)^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha d\theta d\varphi \\ &= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \gamma^{-1} \left[\cos \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \\ &= - \frac{2\pi}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}_P^2 \alpha}{\operatorname{sen}_A \alpha} \end{aligned}$$

$$\iint_{S'_{\text{sup}}} y_A r^{-3} d_A S = \iint_{S'_{\text{sup}}} \frac{(-d_1^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha_P + d_1^* \cos \alpha_P)}{(d_1^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times$$

$$\times (d_1^*)^2 (-\operatorname{tg} \theta) \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha d\theta d\varphi$$

$$= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \left[\operatorname{sen} \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \right.$$

$$\left. + \cos \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= -2\pi \frac{\operatorname{sen}_P \alpha \cos \alpha_P}{\operatorname{sen}_A \alpha}$$

$$\iint_{S'_{\text{inf}}} x'_A r^{-3} d_A S = \iint_{S'_{\text{inf}}} \frac{\gamma^{-1} (d_2^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha_P + d_2^* \operatorname{sen} \alpha_P)}{(d_2^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times$$

$$\times (d_2^*)^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha d\theta d\varphi$$

$$= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \gamma^{-1} \left[\cos \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= -\frac{2\pi}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}_P^2 \alpha}{\operatorname{sen}_A \alpha}$$

$$\iint_{S'_{\text{inf}}} y_A r^{-3} d_A S = \iint_{S'_{\text{inf}}} \frac{(-d_2^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha_P + d_2^* \cos \alpha_P)}{(d_2^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times$$

$$\times (d_2^*)^2 (-\operatorname{tg} \theta) \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha d\theta d\varphi$$

$$= \sin_P \alpha \sin_A^{-1} \alpha \left[\sin_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \tan^2 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right. \\ \left. + \cos_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= -2\pi \frac{\sin_P \alpha \cos_P \alpha}{\sin_A \alpha}$$

Substituindo esses resultados em (5) temos, para a partícula fora do capacitor:

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{Q} = 0$$

* fora, para o monopolo elétrico

[B3.4]

Quando a partícula está dentro do capacitor

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{Q} = \iint_{S'_{sup}} (E_x \cos_A \alpha - E_y \sin_A \alpha) \sigma d_A S \\ + \iint_{S'_{inf}} (E_x \cos_A \alpha - E_y \sin_A \alpha) (-\sigma) d_A S \\ = \frac{Q \sigma \gamma}{4 \pi \epsilon_0} \left[\cos_A \alpha \iint_{S'_{sup}} x' r^{-3} d_A S - \sin_A \alpha \iint_{S'_{sup}} y' r^{-3} d_A S \right. \\ \left. - \cos_A \alpha \iint_{S'_{inf}} x' r^{-3} d_A S + \sin_A \alpha \iint_{S'_{inf}} y' r^{-3} d_A S \right] \quad (6)$$

Calculamos novamente cada uma das integrais na expressão acima:

$$\iint_{S'_{sup}} x' r^{-3} d_A S = \iint_{S'_{sup}} \frac{\gamma^{-1} (d_1^* \tan \theta \sin \varphi \cos \alpha_P + d_1^* \sin \alpha_P)}{(d_1^*)^2 \cos^2 \theta} \times$$

$$\times (d_1^*)^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \, \gamma^{-1} \left[\cos \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \right. \\ \left. + \operatorname{sen}_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= \frac{2\pi}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}_P^2 \alpha}{\operatorname{sen}_A \alpha}$$

$$\iint_{S'_{\sup}} y_A r^{-3} d_A S = \iint_{S'_{\sup}} \frac{(-d_1^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha_P + d_1^* \cos \alpha_P)}{(d_1^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times \\ \times (d_1^*)^2 (-\operatorname{tg} \theta) \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \left[\operatorname{sen} \alpha_P \int_0^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \right. \\ \left. + \cos \alpha_P \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= 2\pi \frac{\operatorname{sen}_P \alpha \cos \alpha_P}{\operatorname{sen}_A \alpha}$$

$$\iint_{S'_{\inf}} x'_A r^{-3} d_A S = \iint_{S'_{\inf}} \frac{\gamma^{-1} (d_2^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha_P + d_2^* \operatorname{sen} \alpha_P)}{(d_2^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times \\ \times (d_2^*)^2 |\operatorname{tg} \theta| \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \, \gamma^{-1} \left[\cos \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \right.$$

$$+ \operatorname{sen}_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \right]$$

$$= -\frac{2\pi}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}_P^2 \alpha}{\operatorname{sen}_A \alpha}$$

$$\iint_{S'_{\text{inf}}} y_A r^{-3} dA S = \iint_{S'_{\text{inf}}} \frac{(-d_2^* \operatorname{tg} \theta \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha_P + d_2^* \cos \alpha_P)}{(d_2^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times \\ \times (d_2^*)^2 (-\operatorname{tg} \theta) \sec^2 \theta \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \operatorname{sen}_P \alpha \operatorname{sen}_A^{-1} \alpha \left[\operatorname{sen} \alpha_P \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \right. \\ \left. + \cos_P \alpha \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$= -2\pi \frac{\operatorname{sen}_P \alpha \cos_P \alpha}{\operatorname{sen}_A \alpha}$$

Esses resultados em (6) nos dão, para a partícula dentro,

$$\iint_A E_{//} dQ = \frac{Q \sigma \gamma}{4 \pi \varepsilon_0} 2\pi \frac{\operatorname{sen}_P \alpha}{\operatorname{sen}_A \alpha} \\ \times \left[2 \frac{\cos_A \alpha \operatorname{sen}_P \alpha}{\gamma} - 2 \operatorname{sen}_A \alpha \cos_P \alpha \right] \\ = \frac{Q \sigma \gamma}{\varepsilon_0} \operatorname{sen}_P \alpha \left[\frac{\operatorname{sen}_P \alpha}{\gamma \operatorname{tg}_A^2 \alpha} - \cos_P \alpha \right] = \frac{Q \sigma \gamma}{\varepsilon_0} \operatorname{sen}_P \alpha \left[\frac{\operatorname{sen}_P \alpha}{\gamma \operatorname{tg}_P^2 \alpha} - \cos_P \alpha \right] \\ = \frac{Q \sigma \gamma}{\varepsilon_0} \operatorname{sen}_P \alpha \cos_P \alpha \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right]$$

$$\iint_{A S'} \vec{E}_{//} d_A Q = \frac{Q \sigma \gamma}{\epsilon_0} \sin_p \alpha \cos_p \alpha \frac{v^2}{c^2}$$

* dentro, [B3.5]
para o monopolo
elétrico

Façamos agora o cálculo da força total aplicada pelo monopolo magnético às placas: para ele, da expressão para o campo (2.3.3), temos que

$$\iint_{A S'} \vec{E}_{//} d_A Q = \iint_{A S'} \left(E_z \hat{z} - E_y \sin_p \alpha \hat{e}_{//} \right) \sigma d_A S$$

onde $\hat{e}_{//}$ é o vetor paralelo às placas, na direção da projeção sobre as mesmas da velocidade da partícula.

$$\iint_{A S'} \vec{E}_{//} d_A Q = \frac{\mu_0 \sigma \gamma v_p}{4 \pi c^2} \iint_{A S'} \left[- \sin_p \alpha z_A r_A^{-3} \hat{e}_{//} - y_A r_A^{-3} \right] d_A Q$$

Façamos as integrais que ainda não foram feitas quando tratávamos o monopolo elétrico.

Quando a partícula está fora do capacitor

$$\iint_{A S'} z_A r_A^{-3} d_A Q = \iint_{S'_{sup}} z_A r_A^{-3} \sigma d_A S + \iint_{S'_{inf}} x_A r_A^{-3} (-\sigma) d_A S$$

$$\iint_{S'_{sup}} z_A r_A^{-3} d_A S = \iint_{S'_{sup}} \frac{(d_1^* \operatorname{tg} \theta \cos \varphi)}{(d_1^*)^3 \cos^{-3} \theta} \times$$

$$\times (d_1^*)^2 (-\operatorname{tg} \theta) \sec^2 \theta \sin_p \alpha \sin^{-1}_p \alpha d\theta d\varphi$$

$$= \sin_p \alpha \sin^{-1}_A \alpha \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^\pi |\operatorname{tg} \theta| \sin \theta \, d\theta = 0$$

A integração na variável φ é que leva ao resultado nulo. Como o intervalo de variação dessa variável é o mesmo quando se trata da placa inferior, e o mesmo se repete para as duas placas quando a partícula se encontra dentro do capacitor, temos:

$$\iint_{S'_A} z_A r_A^{-3} d_A Q = 0 \quad [B3.6]$$

Usando os resultados já calculados para o monopolo elétrico, temos então

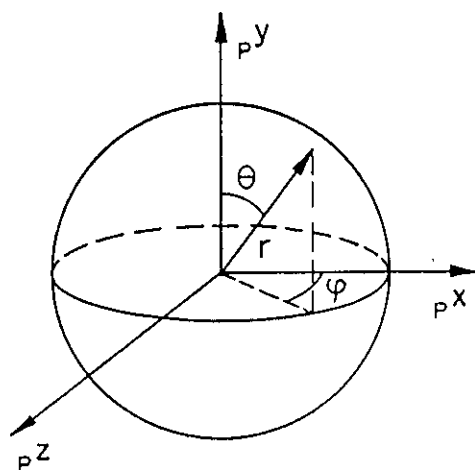
$$\boxed{\iint_{S'_A} \vec{E}_A // d_A Q \equiv - \frac{G \gamma_A v_P}{c^4} \hat{z}} \quad \begin{array}{l} * \text{ dentro, para o} \\ \text{monopolo magnético} \end{array} \quad [B3.7]$$

$$\boxed{\iint_{S'_A} E_A // d_A Q \equiv 0} \quad \begin{array}{l} * \text{ fora, para o monopolo} \\ \text{magnético} \end{array} \quad [B3.8]$$

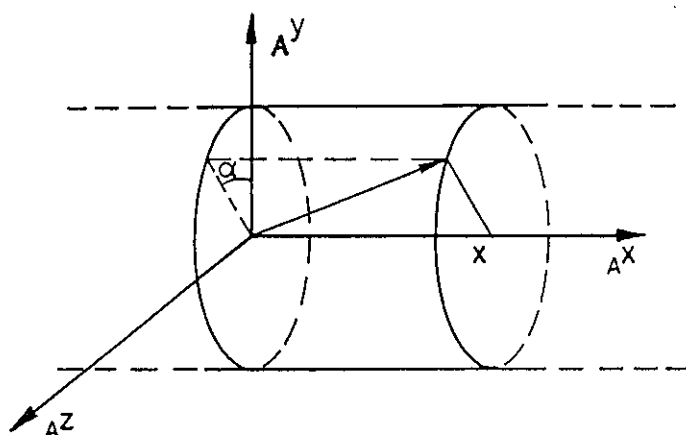
C - MONOPOLO ELÉTRICO EM INTERAÇÃO COM O CAPACITOR CILÍNDRICO

C1 - CASO PARALELO

As coordenadas se relacionam da seguinte forma:



$$\begin{cases} p_x = r \cos\theta \\ p_y = r \sin\theta \cos\varphi \\ p_z = r \sin\theta \sin\varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} {}_A x' = x \\ {}_A y = r \cos \alpha \\ {}_A z = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}_A x' = \gamma^{-1} {}_P x \\ {}_A y = {}_P y \\ {}_A z = {}_P z \end{cases}$$

Dai temos

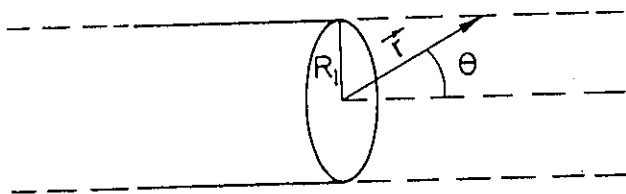
$$\frac{\partial ({}_A x', {}_A y, {}_A z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = \frac{\partial ({}_A x', {}_A y, {}_A z)}{\partial ({}_P x', {}_P y, {}_P z)} \frac{\partial ({}_P x', {}_P y, {}_P z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = \gamma^{-1} r^2 \sin \theta$$

Assim

$$\iiint_{{}_A V'} \frac{1}{{}_A r^3} d{}_A V = \iiint_{{}_A V'} \frac{1}{r^3} \gamma^{-1} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Os limites de integração que descrevem o cilindro em coordenadas esféricas são dados pela relação

$$r \sin \theta = R_1 \text{ (ou } R_2 \text{)}$$



como se observa na ilustração ao lado.

Assim

$$\begin{aligned}
 \iiint_{A V'} \frac{1}{r^2} d_A V &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_{R_1/\sin\theta}^{R_2/\sin\theta} \frac{1}{r} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi d\theta \sin\theta (\ln r) \Big|_{R_1/\sin\theta}^{R_2/\sin\theta} \varphi \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \ln \frac{R_2}{R_1} 2\pi = \frac{2\pi}{\gamma} \ln \frac{R_2}{R_1} (-\cos\theta) \Big|_0^\pi
 \end{aligned}$$

Temos, portanto

$$\boxed{\iiint_{A V'} \frac{1}{r^2} d_A V = \frac{4\pi}{\gamma} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [C1.1]$$

Agora vem o cálculo da integral

$$\iint_{A S} \frac{A^{x,z}}{r^2} d_A Q$$

Para se calcular essa integral a superfície de integração é separada em duas:

$$A S = A S_1 + A S_2$$

onde o índice 1 refere-se à placa interna e o índice 2 à externa.

$$\text{Para } S_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} d_A Q = \sigma_1 d_A S \\ -\infty < {}_A x' < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ {}_A r^2 = R_1^2 + \gamma^2 {}_A x'^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Para } S_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} d_A Q = \frac{R_1}{R_2} \sigma_1 d_A S \\ -\infty < {}_A x' < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ {}_A r^2 = R_1^2 + \gamma^2 {}_A x'^2 \end{array} \right.$$

$$\iint_{_A S} \frac{{}_A x'^2}{{}_A r^3} d_A Q = \iint_{_A S_1} \frac{{}_A x'^2}{{}_A r^3} \sigma_1 d_A S + \iint_{_A S_2} \frac{{}_A x'^2}{{}_A r^3} \sigma_2 d_A S$$

onde os índices 1 e 2 referem-se às placas interna e externa respectivamente.

Para se fazer a integração em coordenadas esféricas é necessário transformar o elemento de área.

As superfícies cilíndricas são descritas em coordenadas esféricas pela relação

$$r \sin \theta = R$$

(onde R pode ser R_1 ou R_2)

Isso faz com que as relações das coordenadas fiquem

$$\begin{cases} x' = \gamma^{-1} R \cotg \theta \\ y = R \cos \varphi \\ z = R \sen \varphi \end{cases}$$

Temos então que

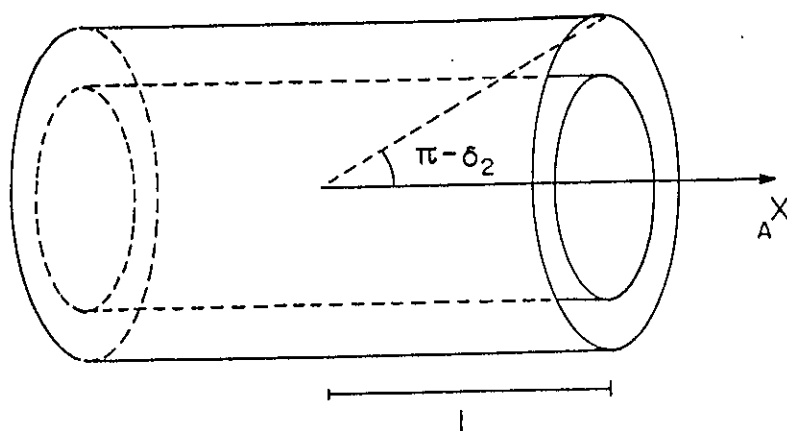
$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\frac{R}{\gamma} \operatorname{cosec}^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & -R \sen \varphi & -R \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \frac{R^2}{\gamma} \operatorname{cosec}^2 \theta (\cos \varphi \hat{y} + \sen \varphi \hat{z}) \end{aligned}$$

$$\text{Logo} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \frac{R^2}{\gamma} \operatorname{cosec}^2 \theta$$

e, tendo em conta também a relação entre as densidades (5.1.1)

$$\begin{aligned} \iint_{A_S} \frac{A_{x'}^2}{A_{r^3}} d_A Q &= \iint_{A_1} \frac{\gamma^{-2} R_1^2 \cotg^2 \theta}{R_1^3 \sen^{-3} \theta} \sigma_1 \frac{R_1^2}{\gamma} \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta d\varphi \\ &+ \iint_{A_2} \frac{\gamma^{-2} R_2^2 \cotg^2 \theta}{R_2^3 \sen^{-3} \theta} \left(-\frac{R_1}{R_2} \sigma_1 \right) \frac{R_2^2}{\gamma} \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta d\varphi \\ &= \sigma_1 \frac{R_1}{\gamma^3} \iint_{A_1} \frac{\cos^2 \theta}{\sen \theta} d\theta d\varphi - \sigma_1 \frac{R_1}{\gamma^3} \iint_{A_2} \frac{\cos^2 \theta}{\sen \theta} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Para realizar a integração nas superfícies, primeiro vamos supor dois cilindros concêntricos de comprimento finito $2L$ e depois faremos L tender a infinito, para evitar as divergências.



Assim, de acordo com a figura, usando o índice i , que pode ser 1 ou 2, referindo-se às placas interna ou externa, temos que o intervalo de variação das variáveis de integração é

$$\text{Para } S_i \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \delta_i \leq \theta \leq \pi - \delta_i \end{cases}$$

onde

$$\text{tg } \delta_i = \frac{R_i}{L}$$

Chamemos

$$\frac{R_i}{L} = a_i$$

Fazer o limite $L \rightarrow \infty$ é o mesmo que fazer $a_i \rightarrow 0$ ou $\delta_i \rightarrow 0$.

Temos então que

$$\iint_{AS} \frac{A^{X,2}}{r^3} d_A Q = \sigma_1 \frac{R_1}{r^3} \left(\iint_{AS_1} \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} d\theta d\varphi - \iint_{AS_2} \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} d\theta d\varphi \right)$$

$$= \frac{\sigma_1 R_1}{r^3} \varphi \Big|_0^{2\pi} \left[\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right) \Big|_{\delta_1}^{\pi - \delta_1} - \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right) \Big|_{\delta_2}^{\pi - \delta_2} \right]$$

$$= \frac{2\pi \sigma_1 R_1}{r^3} \left\{ \left[\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left(\cos(\pi - \delta_1) - \cos \delta_1 \right) - \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \left(\cos(\pi - \delta_2) - \cos \delta_2 \right) \right] + \left[\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \Big|_{\delta_1}^{\pi - \delta_1} - \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \Big|_{\delta_2}^{\pi - \delta_2} \right] \right\}$$

Verifica-se que o valor da primeira expressão entre colchetes é zero. A segunda expressão entre colchetes já deve ser trabalhada mais detalhadamente:

Vamos, com o auxílio de expressões para funções trigonométricas para o arco duplo, expressar $\operatorname{tg} \frac{\delta_i}{2}$ em termos de a_i .

Se

$$\operatorname{tg} \delta_i = a_i$$

temos

$$\cos \delta_i = \frac{1}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

e

$$\operatorname{sen} \delta_i = \frac{a_i}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

Utilizando expressões para o cosseno da soma e subtração de ângulos, temos

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a_i^2}} = \cos^2 \frac{a_i}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a_i}{2}$$

$$1 = \cos^2 \frac{a_i}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a_i}{2}$$

e daí obtemos

$$I- \quad 2 \cos^2 \frac{a_i}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

Da expressão para seno de arco duplo, temos

$$\text{II-} \quad 2 = \cos \frac{a_i}{2} \quad \text{sen} \frac{a_i}{2} = \frac{a_i}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

De I e II,

$$\text{tg} \frac{a_i}{2} = \frac{a_i}{\sqrt{1 - a_i^2} + 1}$$

Assim, como $\text{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cotg} x$, temos

$$\text{tg} \frac{\pi}{2} - \frac{a_i}{2} = \frac{\sqrt{1 - a_i^2} + 1}{a_i}$$

Assim, temos

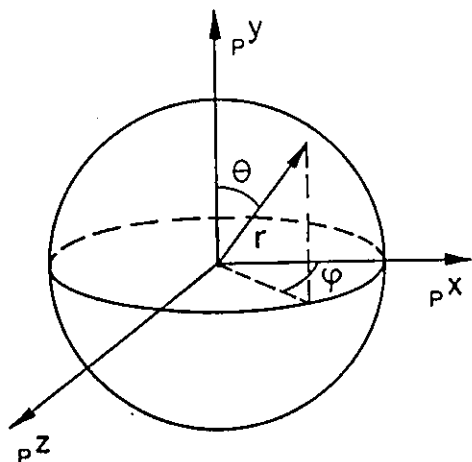
$$\begin{aligned} \iint_{AS} \frac{A x'^2}{A r^3} d_A Q &= \frac{2\pi \sigma_1 R_1}{r^3} \left\{ \lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \left[\ln \frac{\sqrt{1 - a_1^2} + 1}{a_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \frac{a_1}{\sqrt{1 - a_1^2} + 1} \right] + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0} \left[\ln \frac{a_2}{\sqrt{1 - a_2^2} + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \frac{\sqrt{1 - a_2^2} + 1}{a_2} \right] \right\} = \frac{2\pi \sigma_1 R_1}{r^3} \left(\ln \frac{4}{a_1^2} - \ln \frac{a_2^2}{4} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi \sigma_1 R_1}{\gamma^3} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

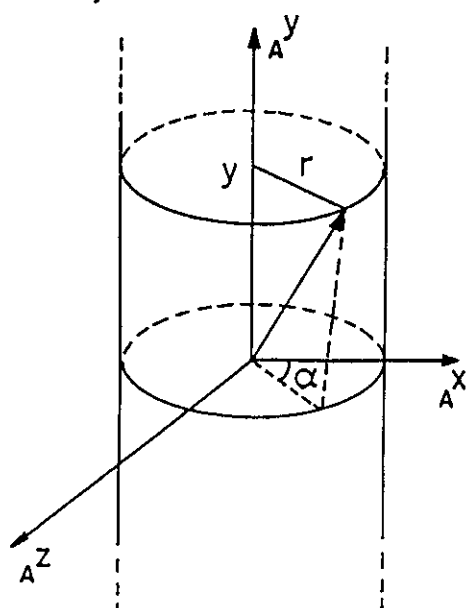
$$\boxed{\iint_S \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}'^2}{r^3} d\mathbf{A} Q = \frac{4\pi \sigma_1 R_1}{\gamma^3} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

C2 - CASO PERPENDICULAR

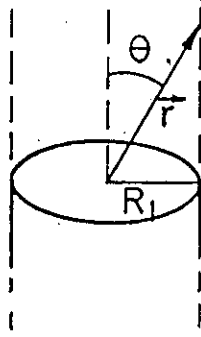
Agora as coordenadas se relacionam da seguinte forma:



$$\begin{cases} p_x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ p_y = r \cos \theta \\ p_z = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} Ax' = r \cos \alpha \\ Ay = y \\ Az = r \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$



Assim

$$\iiint_{V'} \frac{A z^2}{r^2 A r^3} d_A V$$

$$= \int_0^\pi \gamma^{-1} \sin \theta d\theta \int_{R_1/\cos \theta}^{R_2/\cos \theta} \frac{1}{r} dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\gamma^{-2} \tan^2 \varphi + 1)} d\varphi$$

$$= \frac{1}{\gamma} 2 \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \frac{1}{1 - \gamma^2} [\varphi - \gamma \arctg(\gamma \tan \varphi)] \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2}{\gamma} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \frac{1}{\gamma^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} \right)} (2\pi - 0)$$

$$\boxed{\iiint_{V'} \frac{A z^2}{r^2 A r^3} d_A V = - \frac{4\pi c^2}{\gamma^3 A v^2} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]} \quad [C2.1]$$

$$\iiint_{V'} \frac{A x^i A y}{r^2 A r^3} d_A V$$

$$= \iiint_{V'} \frac{\gamma^{-1} r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \theta (\gamma^{-2} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) r^3} \gamma^{-1} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{\gamma^2} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_{R_1/\sin\theta}^{R_2/\sin\theta} \frac{1}{r} \, dr \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{(\gamma^{-2} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \, d\varphi$$

A integração na variável φ é de uma função periódica ímpar, integrada num período, portanto é nula

$$\boxed{\iiint_{V'} \frac{{}_A x' {}_A y}{r^2 {}_A r^3} \, d_A V = 0} \quad [C2.2]$$

Como só trataremos o caso perpendicular com a partícula no centro, podemos escolher a origem de ${}_A t$ de modo que neste ponto, ${}_A x' = {}_A x$. Assim

$$\begin{aligned} \iiint_{V'} \frac{{}_A x' {}_A x}{r^2 {}_A r^3} \, d_A V &= \iiint_{V'} \frac{{}_A x'^2}{r^2 {}_A r^3} \, d_A V \\ &= \iiint_{V'} \frac{\gamma^{-2} r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{r^2 \sin^2\theta (\gamma^{-2} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \frac{\gamma^{-1} r^2 \sin\theta}{r^3} \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_{R_1/\sin\theta}^{R_2/\sin\theta} \frac{1}{r} \, dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\gamma^{-2} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\gamma} 2 \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \frac{2\pi}{1 - \gamma^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{V'} \frac{{}_A x {}_A x'}{r^2 {}_A r^3} \, d_A V = - \frac{4\pi c^2}{\gamma^3 {}_A v_P^2} \ln \left[\frac{R_2}{R_1} \right]} \quad [C2.3]$$

$$\iiint_{\mathbf{A} V'} \frac{A^z A^y}{r^2 A r^3} d_{\mathbf{A}} V$$

$$= \iiint_{\mathbf{A} V'} \frac{r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \operatorname{sen} \varphi}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta (\gamma^{-2} \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) r^3} \gamma^{-1} r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \int_{R_1/\operatorname{sen} \theta}^{R_2/\operatorname{sen} \theta} \frac{1}{r} dr \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \varphi}{(\gamma^{-2} \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)} d\varphi$$

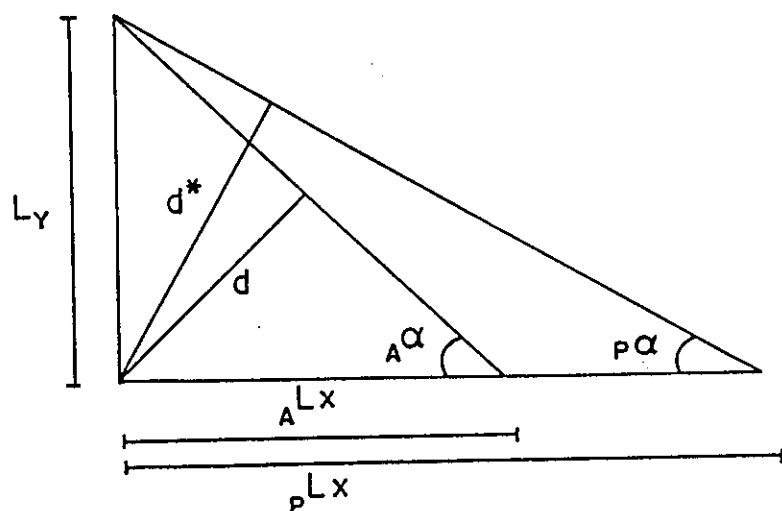
Novamente a integração na variável φ é de uma função periódica ímpar num período, sendo portanto nula.

$$\boxed{\iiint_{\mathbf{A} V'} \frac{A^z A^y}{r^2 A r^3} d_{\mathbf{A}} V = 0}$$

[G2.4]

D - RELAÇÕES ENTRE ÂNGULOS E DISTÂNCIAS NO CAPACITOR

Para um tempo fixo, temos



Da figura acima temos

$$\operatorname{tg}_A \alpha = L_y / L_x$$

$$\operatorname{tg}_P \alpha = L_y / P L_x$$

Como $P L_x = \gamma L_x$

$$\text{temos } \operatorname{tg}_A \alpha = \gamma \operatorname{tg}_P \alpha$$

[D1]

Também da figura

$$\operatorname{sen}_A \alpha = d / L_x$$

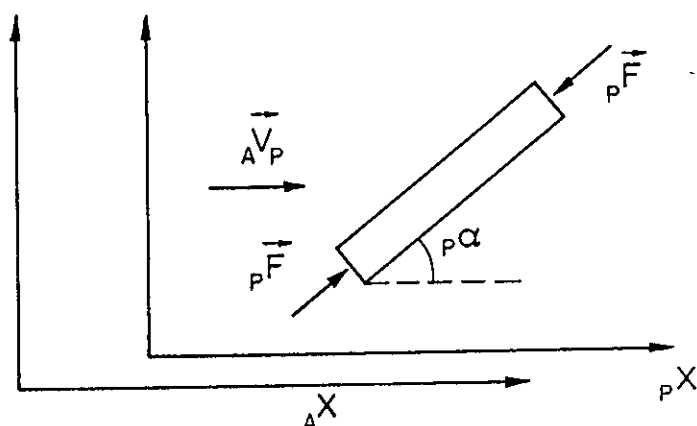
$$\operatorname{sen}_P \alpha = d / P L_x$$

Daí $d^* = {}_P L_x \operatorname{sen}_P \alpha$

mas ${}_P L_x = \gamma {}_A L_x = \gamma d / \operatorname{sen}_A \alpha$

Portanto $d^* = \gamma d \operatorname{sen}_P \alpha / \operatorname{sen}_A \alpha$ [D2]

E - MOMENTO ASSOCIADO À TENSÃO PARA UMA BARRA



O esquema acima mostra uma barra rígida de comprimento próprio L inclinada de ${}_P\alpha$ em relação a seu referencial próprio, e que viaja com velocidade constante ${}_A V_P$ na direção x com relação a um referencial "A".

Forças iguais de módulo ${}_P F$ e direção paralela à barra são aplicadas simultaneamente à barra em relação a seu referencial próprio.

Como os pontos de aplicação têm diferentes coordenadas x em relação a "A", há uma diferença de tempo entre a aplicação das forças aos diferentes pontos.

Essa diferença de tempo (das transformações de Lorentz) é dada por

$$\Delta t_A = \gamma \Delta x_P \frac{{}_A V_P}{c^2}$$

onde Δx_P é o comprimento da projeção da barra na direção x no referencial próprio.

Novamente, das transformações de Lorentz,

$$p_L = \gamma_A L_x$$

$$\text{e} \quad \Delta_A t = \gamma^2_{AP} v_{AP} c^{-2} L_x$$

Durante o tempo dado pela expressão acima, só a força aplicada em uma das extremidades estará atuando sobre a barra, em relação ao referencial "A". Isso implica num ganho de momento para a barra dado por

$$\Delta_A p_x = F_x \Delta_A t$$

$$\Delta_A p_x = F_y \Delta_A t$$

$$\text{ou} \quad \Delta_A p_x = \gamma^2_{AP} v_{AP} c^{-2} F_x L_x \quad [E1]$$

$$\Delta_A p_x = \gamma^2_{AP} v_{AP} c^{-2} F_y L_x \quad [E2]$$

REFERÊNCIAS

- ABRAHAM, M. *Rend. Cir. Mat. Palermo* 28: 1, 1909.
- ABRAHAM, M. *Rend. Cir. Mat. Palermo* 30: 33, 1910.
- ABRAHAM, M. & FÖPPL, A. *Theorie der Elektrizität*. 3. ed., Teubner, Leipzig, 1914.
- ARNAUD, J.A. *Am. J. Phys.* 42: 71, 1974.
- ARZELLIÈS, H. *Relativistic points dynamics*, Oxford, Pergamon, 1972.
- BARTOLI, S. *Sopra i movimenti prodotti della luce e dal calore*. Florence, Monnier, 1876.
- BOLTZMANN, L. *Ann. Phys. Chem.* 22(3): 31-72, 1884.
- BONDI, Sir H. & SPURGIN, G.B. *Phys. Bull.*, 38:62-3, 1879.
- BRILLOUIN, L. *C. Rend. Acad. Sci. Paris* 259: 2361-2, 1964.
- BRILLOUIN, L. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 53: 475-82, 1965a.
- BRILLOUIN, L. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 53: 1280-4, 1965b.
- BRILLOUIN, L. *Relativity Reexamined*, New York, Academic, 1970.
- BROGLIE, L. de. *Ann. Phys.* 10(3): 22-128, 1925.
- BROGLIE, L. de. *C. Rend. Acad. Sci. Paris* 275B: 899-901, 1972.
- BURT, M.G. & PEIERLS, Sir R. *Proc. R. Soc. London A* 333: 149, 1973.
- CAVALLERI, G. & SALGARELI, G. *Nuovo Cimento* 62A: 722, 1969.
- CAVALLERI, G. & SPINNELLI, G. *Nuovo Cimento* 18:256-6, 1976.
- DONBEY, N. , McCREA, Sir W. & ROSSEAU, J., *Phys. Bull.*, 38:260-1, 1987.
- EINSTEIN, A. *Ann. Phys.* 4(23): 371, 1907.
- EINSTEIN, A. *Ann. Phys.* 17(4): 891-921, 1905(a).
- EINSTEIN, A. *Ann. Phys.* 18(4): 639-41, 1905(b).
- EINSTEIN, A. *Ann. Phys.* 20(4): 627-33, 1906.

- EINSTEIN, A. *Ann. Phys.* 4(23): 371, 1907.
- EINSTEIN, A. *Jarb. Rad. Elektr.* 4: 411, 1907.
- FARADAY, M. Experimental researches in electricity.
Enciclopedia Britannica. University of Chicago, 1952. v. 45.
- GAMBA, A. *Nuovo Cimento* 37: 1792, 1965.
- GAMBA, A. *Am. J. Phys.* 35: 83, 1967.
- GOLDBERG, S. *Am. J. Phys.* 37: 498-513, 1969.
- GOLDBERG, S. *Arch. Hist. Ex. Sci.* 7: 7-25, 1970.
- GOLDBERG, S. *Hist. St. Phys. Sci.* 7:125-60, 1976.
- GORDON, J.P. *Phys. Rev. A* 8: 14, 1973.
- HANSENÖHRL, R. *Ann. Phys.* 15(4): 344-70, 1904
- HANSENÖHRL, R. *Ann. Phys.* 16: 833-4, 1905.
- HEAVISIDE, O. *Electrician* 14: 178-81, 1885.
- HELMHOLTZ, H. *Ann. Phys. Chem.* 2(13): 385, 1881.
- IVES, H.E. *J. Opt. Soc. Am.* 42: 520-43, 1952.
- KENNEDY, R.J. & THORNDYKE, E.M., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 17:620-2,
 1931.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. *Theorie du Champ*, Mir, Moscou, 1966.
- LANGEVIN, P. *J. Phys. Théor.* 3(4): 553-91, 1913.
- LAUE, M. von. *Phys. Z.* 12:85-7, 1911(a).
- LAUE, M. von. *Ann. Phys.* 35: 524-42, 1911(b).
- LAUE, M. von. *Proc. R. Acad. Amsterdam* 14: 825-31, 1912.
- LAUE, M. von. *Z. Phys.* 128: 387, 1950.
- LEBEDEW, P. *Ann. Phys.* 6(4): 433-58, 1901.
- LEIBOVITZ, G. *Am. J. Phys.* 37: 834-5, 1969.
- LEWIS, G.N. *Phil. Mag.* 16(4): 705-17, 1908.
- LORENTZ, H.A. *Arch. Néerl.* 2: 139-55, 1912.

- LORENTZ, H.A. *Enciclopaedie der Mathetmatischen Wissenschaften*, Teubner, Leipzig, 1904.
- LORENTZ, H.A. *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegter Koerpern*. Leiden, Brill, 1895.
- LORENTZ, H.A. *Phys. Z.* 2: 78-80, 1901.
- LORENTZ, H.A. *Proc. R. Acad. Amsterdam* 6: 809-36, 1904b.
- LORENTZ, H.A. *Arch Néerl.* 2: 139, 1912.
- LORENTZ, H.A. *Lectures on theoretical Physics*, MacMillan, London, 1931.
- LORRAIN, R.C. & CORSON, D., *Electromagnetic Fields and Waves*, Freeman, San Francisco, 1970.
- LUCAS, R. C. *Rend. Acad. Sci. Paris* 259: 2359-60, 1964.
- LUCAS, R. C. *Rend. Acad. Sci. Paris B* 268:17, 129-33,1969.
- LUCAS, R. C. *Rend. Acad. Sci. Paris B* 282: 43-5, 1976.
- MARTINS, R.A. *As teorias relativísticas de sistemas extensos e a proporcionalidade entre massas inercial e pesante*, tese de doutoramento, Rio de Janeiro, CBPF, 1985.
- MAXWELL, J.C. *A treatise on electricity and magnetism*, 3. ed., Dover, New York, 1954.
- MIE, G. *Sitz. K. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, 107: 1115-82, 1898.
- MIE, G. *Verh. d. Gesellschaft Deutsch., Naturf. u. Aertze (II)*, 1: 78-80, 1899.
- MILLER, A.I. *Albert Einstein's special theory of relativity*. Reading, Addison-Wesley, 1981.
- MINKOWSKI, H. *Nach. kgl. Ges. Wiss. Goettingen, mat.-phys.* K1: 53, 1908.
- MINKOWSKI, H. *Nach. kgl. Ges. Wiss. Goettingen, mat-phys.* K1:53,

1908.

MOSENGEIL, K von, *Ann. Phys.*, 22:876, 1907.

MØLLER, C. *Kgl. Vidensk Selskab Mat-fys. Medd* 36(1):1-27, 1967.

NICHOLS, E.F. & HULL, G.F. *Phys. Review* 13: 307-20, 1901.

NICHOLS, E.F. & HULL, G.F. *Astroph. J.* 17:315-51, 1903.

PAGE, L. & ADAMS, N.I. *Electrodynamics*, Van Nostrand, New York, 1940.

PALACIOS, J. *Rev. Real Acad. Cienc. Exat. Fis Nat. Madrid* 62: 69-132, 1968.

PANOFSKI, W. & PHILLIPS, M. *Classical electricity and magnetism*, Addison-Wesley, REading MA, 1962.

PAULI, W. *Theory of relativity*, Pergamon, New York, 1958.

PLANCK, M. *Sitz. k. preuss. Akad. Wiss. Berlin* 29: 542, 1908

PLANCK, M. *Ann. Phys.* 4(26): 1, 1908.

PLANCK, M. *Verh. dtsh. Phys. Ges.* 9: 301-5, 1907.

POYNTING, J.H. *Phil. Mag.* 19: 475, 1905.

POINCARRÉ, H. (1900) *Oeuvres de Henri Poincarré*. Paris, Gauthier-Villars, 1934-53. v. 9, p. 464-88.-88.

POYNTING, J.H. *Phil. Trans. R. Soc. London A* 175: 343-61, 1884.

RITZ, W. *Ann. Chem. Phys.* 13(8): 1145-275, 1908.

ROBINSON, F.N.H. *Phys. Rep.* 16: 313, 1975.

SATCHEL, J & TORRETI, R. *Am. J. Phys.* 50: 760, 1982.

SEARLE, G.F. *Phil. Trans. R. Soc. London A* 187: 675-713, 1896.

SEARLE, G.F. *Phil. Mag.* 6(13): 118-48, 1907.

SOMMERFELD, A. *Ann. Phys.* 4(51): 1-94, 1916.

SYNGE, J.J. *Relativity: The special Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1972. THOMSON, J.J. *Phil. Mag.* 28(5): 1-12, 1889.

THOMSON, J.J. *Phil. Mag.* 25(8)1-12, 1889.

THOMSON, J.J. *Phil. Mag.* 31(5): 149-71, 1891.

THOMSON, J.J. *Recent researches in electricity and magnetism.*
Oxford, Oxford University, 1893.

TOLMAN, R.C. *Phil. Mag.* 6(28): 572-82, 1914.

TOLMAN, R.C. *Relativity, thermodynamics and cosmology*, Oxford,
Clarendon, 1950.

WHEELER, J.A., MISNER, C.W. & THORNE, K.S., *Gravitation*, Freeman,
San Francisco, 1973.

WHITTAKER, Sir E. *A history of theories of aether and electricity.*
New York, Humanities, 1973. 2 v.

WIEN, W. *Ann. Phys. Chem.* 56(2): 684-728, 1892.

WILSON, H.A. *Astroph. J.* 56: 34-9, 1922a.

WILSON, H.A. *Proc. R. Soc. A* 102: 9-20, 1922.

ZINK, J.W. *Am. J. Phys.* 35: 771-3, 1967.