

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA "GLEB WATAGHIN"

*Este exemplar
corresponde a redação final
da tese de Manoel M. Ferreira
Júnior e foi aprovado pela Comissão Julgadora.*

29/07/96

Aspectos Visuais de
Objetos Condensados *em relógio*
na Teoria da Relatividade
Geral

28534 (IF/1035)

Manoel M. Ferreira Júnior

Orientador: Prof. Dr. Roberto de
Andrade Martins

Fevereiro de 1995

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP

F413a Ferreira Júnior, Manoel Messias
Aspectos visuais de objetos condensados em
rotação na teoria da relatividade geral / Ma-
noel M. Ferreira Júnior. -- Campinas, SP :
[s.n.], 1995.

Orientador: Roberto de Andrade Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade
Estadual de Campinas, Instituto de Física
"Gleb Wataghin".

1. Movimento rotacional. 2. Relatividade
geral (Física). 3.*Kerr, solução de. I. Mar-
tins, Roberto de Andrade. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Física
"Gleb Wataghin". III. Título.

Aspectos Visuais de Objetos Condensados em Rotação na Teoria da Relatividade Geral

Manoel M. Ferreira Júnior

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Andrade Martins

**Dissertação apresentada ao Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual
de Campinas como parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Física -
Fevereiro de 1995.**

AGRADECIMENTOS

Aos meus queridos pais, Ana e Messias, pela minha vida, minha educação e criação; e também por terem construído uma família maravilhosa.

Aos meus irmãos: Neuza, Eugênio, Carlinhos e Márcio, por fazerem parte desta família maravilhosa.

Ao meu orientador, pelo auxílio preciosíssimo, pela disponibilidade, pelo eterno bom humor e compreensão, e finalmente por ter me ensinado um pouco da física que sabe.

Ao prof. Erasmo Recami, pela ajuda na minha formação e por ter se mostrado um amigo de todas as horas.

A todos os meus amigos de moradia e estudo que comigo conviveram e me encheram muito o saco durante estes longos anos. Especialmente a Emílio, Rafael, Erlon, Cláudio, Ebenézer, Hans, AOD, Carlos, Jordan, Ettore, Ricardo, Reinaldo, Vieira, Econômico, Anderson, Agnaldo, etc...

À amiga "especial" Aurélia Adriana por si e por nós dois.

Aos amigos de corredor: Cibelle, Alexandra, Lorena, Oliveira, Ximenes, Ivan, Delano, Harry, Abbade, Gerias, Henrique, Dalton, pelo convívio agradável de todos estes dias.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro bem aplicado.

À tia Fátima pelo apoio e estímulo contínuos.

Resumo

Admitimos a métrica de Kerr como sendo a solução (externa) das equações de campo de Einstein para uma estrela em rotação. Partindo desta solução, e impondo as condições para a superfície estelar se mostrar em equilíbrio, obtemos uma equação de quarto grau (implícita em θ) para seu contorno.

Para abordar o processo de formação da imagem de uma fonte distante, trabalhamos com as equações de movimento no campo de Kerr (geodésicas de Kerr), obtidas pelo método de Hamilton-Jacobi. Para fótons temos geodésicas nulas, em relação as quais determinamos retas assintóticas que estabelecem a direção através da qual o observador enxerga cada um dos fótons de interesse. Desta forma relacionamos o 'dragging effect' (efeito de arrastamento) da luz a um desvio geométrico em relação à posição real da fonte no espaço.

Considerando que os fótons deixam a superfície da fonte sob condições iniciais diversas, obtemos para alguns deles (que se mostrem de interesse) os desvios correspondentes. Observando que fótons que partem tangencialmente conduzem a pontos extremos da imagem, conseguimos estabelecer limites para as extensões visuais de uma fonte de radiação e determinar as condições especiais para as quais os desvios conduzem a grandes deformações. Com o conhecimento destes desvios podemos então obter um esboço da imagem da fonte para um observador distante.

Para fontes de radiação que não proporcionam a nenhum dos seus fótons emitidos a condição especial de larga deformação, os desvios ópticos avaliados são todos desprezíveis, configurando a imagem estelar convencional: um ponto de luz.

Algumas fontes, entretanto, para as quais massa e raio equatorial de Boyer-Lindquist obedecem uma relação específica, apresentam deflexão e deformação de imagem bastante elevadas, proporcionando um aspecto visual alongado, como um risco no céu com um ponto de luminosidade muito intensa em uma de suas extremidades.

Conteúdo

1 Aspectos Gerais	3
1.1 Motivação	3
1.2 Exposição de objetivos	6
2 Métrica de Kerr: Dedução e Propriedades	9
2.1 Dedução da solução de Kerr	9
2.2 Propriedades da solução de Kerr	18
3 Obtenção de Geodésicas no Campo de Kerr	24
3.1 Equação de movimento de fótons que partem radialmente do plano estelar equatorial : um exemplo trivial das geodésicas de Kerr.	24
3.2 Dedução das Geodésicas de Kerr segundo o Método de Hamilton-Jacobi	28
4 Solução Algébrica para Superfície de uma Estrela em Rotação	35
4.1 Introdução ao problema	35
4.2 Desenvolvimento da equação algébrica	36
4.3 Limites de estabilidade da equação algébrica	42
4.4 Confrontação com modelos numéricos	44
5 Cálculo de Desvios e Deformações da Imagem de uma Estrela Distante em Rotação	50
5.1 Equações de Movimento para Fótons no Campo de Kerr	50
5.2 Análise visual para um observador distante situado no plano equatorial da estrela	51
5.2.1 Fótons Equatoriais	51
5.2.2 Fótons não-equatoriais	59
5.2.3 Fótons tangenciais	62
5.3 Análise visual para um observador distante fora do plano equatorial	63
6 Conclusão	70
Bibliografia	72

Capítulo 1

Aspectos Gerais

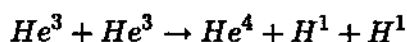
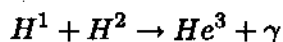
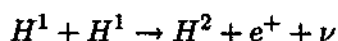
1.1 Motivação

Nos últimos trinta anos, com o advento de modernas técnicas de observação astronômica, novos objetos celestes, que antes existiam apenas como fruto de conjecturas de modelos teóricos, começaram a ser de fato descobertos. Entre estes situam-se as estrelas de nêutrons e as anãs brancas, por exemplo. As evidências experimentais que confirmaram a existência destes novos corpos celestes vieram a reforçar os modelos teóricos que propunham-lhes uma explicação. Entre estes está a maioria dos modelos propostos para analisar estrutura, evolução e morte de estrelas. As estrelas de nêutrons e anãs brancas adquirem, dentro deste cenário, realidade física. Ao mesmo tempo que a existência de entidades previsíveis foi sendo confirmada, estruturas astronômicas totalmente desconhecidas foram surgindo e excitando a imaginação dos astrofísicos. Dentre as mais curiosas cita-se os chamados 'jatos de matéria', detectados como jatos luminosos (ou riscos de luz) por sensíveis técnicas de interferometria astronômica. A explicação dos 'jatos de matéria' para tais fenômenos enfrenta dificuldades teóricas que se mostram insuperáveis. A polêmica levantada pelas observações destes riscos luminosos aliada ao fracasso dos sucessivos modelos teóricos apresentados, levam a suposição de que a explicação do fenômeno jaz sobre outros fundamentos. Não nos cabe aqui discutir nem descrever os aspectos observacionais destas estruturas astronômicas, que se encontram descritos em farta literatura. A referência [7] pode ser tomada como guia, pois cita diversos outros trabalhos sobre o tema.

Motivados não só por esta controvérsia, mas também pela possibilidade de obtenção de resultados novos e inesperados, desponta o interesse acerca da investigação do processo

de constituição da imagem de corpos celestes condensados em rotação (incluindo aqui estrelas, buracos negros, núcleos de galáxias) a fim de saber se as imagens destas estruturas (em relação a um observador distante) não se apresentam distintas da pontual sob quaisquer hipóteses. Pois a presença de deformações acentuadas nestas imagens poderia ser o primeiro indicativo de que fenômenos astronômicos ainda inexplicados (como os 'riscos de luz') têm origem basicamente óptica, ou seja, na maneira como a luz que parte da fonte de radiação impressiona o observador distante. Ao longo desta dissertação desenvolveremos o estudo de formação de imagem para uma estrela em rotação rápida emissora de intensa radiação, enquadrando-se nesta descrição temos as estrelas de nêutrons.

Para melhor entendimento do que é, e de como se forma uma estrela de nêutrons, torna-se necessário apresentar um breve resumo qualitativo do ciclo de evolução de estrelas. Suponhamos assim uma estrela comum, como por exemplo o Sol, cuja atividade interna é responsável pela manutenção do seu estado de equilíbrio. Na verdade esta atividade se constitui de um processo de reações nucleares através das quais elementos químicos leves vão sendo gradativamente transformados em outros de número atômico mais pesado. Como o hidrogênio é o elemento mais leve e abundante numa estrela 'jovem', o processo se inicia com a sua transformação em hélio, proporcionando liberação de enormes quantidades de energia em forma de fótons, que por sua vez exercem uma pressão (de saída) suficiente para contrabalançar a tendência gravitacional de contração da massa estelar sobre si mesma. Ao mesmo tempo estes fótons geram a luminosidade das estrelas que se encontram neste estágio de evolução. Desta maneira a estrela consegue se manter numa configuração estática caracterizada por grandezas físicas (temperatura, densidade de energia e densidade de pressão) bem definidas ao longo da sua extensão radial. Na verdade, esta reação de conversão de hidrogênio em hélio ocorre através de uma série de outras reações intermediárias:



Porém com o decorrer do tempo, a reserva de hidrogênio vai se esvaindo; enquanto isto a pressão gravitacional se conserva praticamente inalterada, requerendo o mesmo fluxo contrário de energia para não haver quebra do equilíbrio. Como consequência o caroço estelar (parte mais interna, quente, e densa da estela) começa a se contrair elevando a

sua pressão e temperatura até um nível em que a fusão de elementos químicos de núcleos mais pesados se torne possível. Desta maneira hélio se converte em carbono e oxigênio liberando energia suficiente para estimular uma grande expansão estelar. Nesta fase a estrela aumenta várias vezes seu raio, transformando-se numa 'gigante vermelha'. E novamente, quando o hélio se extingue, uma nova reação deve ser estabelecida para preservar o equilíbrio, levando à conversão de carbono em silício e de silício em ferro. Esta fase é denominada de 'sequência principal' da vida da estrela, cujo ponto extremo é ocupado pelo ferro (e alguns dos seus vizinhos na tabela periódica), por este ser o elemento conhecido de núcleo mais estável. Como consequência, qualquer reação que busque obter sua conversão em outro elemento qualquer, tem ganho de energia negativo. Fica também implícito que diversas são as reações intermediárias que constituem o caminho do carbono ao ferro, havendo, portanto, a formação dos elementos que se localizam entre eles dois na tabela periódica.

Lógico que aqui se trata a questão de uma forma meramente qualitativa, sem se considerar sua riqueza de detalhes e os vários parâmetros que são relevantes ao estudo da sequência principal de uma dada estrela. Entre estes destacam-se, por exemplo, a massa e o momento angular, por estabelecerem limites de estabilidade após o término da mesma.

Extinto todo combustível nuclear, não resta outra alternativa à estrela a não ser se contrair até o ponto em que os seus átomos constituintes estejam tão próximos, que a pressão de degenerescência dos elétrons, avaliada pela estatística de Fermi-Dirac, suba a um patamar que obstrua o colapso gravitacional. Ao contrário do anterior, este é um colapso que ocorre a 'frio', pela inexistência de outras fontes de energia. A estas estrelas, originadas a partir do resfriamento de gigantes vermelhas, deu-se o nome de 'anãs-brancas'. Porém nem sempre as coisas acontecem desta maneira, uma gigante-vermelha só evolui para uma anã-branca quando sua massa não excede o patamar de $1.4 M_{\odot}$, conhecido como 'limite de Chandrasekhar'. Em caso contrário a sua evolução se torna muito mais conturbada, havendo a possibilidade de perda de massa por explosões, entre outras instabilidades internas. A explosão de gigantes-vermelhas é que origina as chamadas supernovas, a partir das quais se formam as estrelas de nêutrons. Nestas a pressão gravitacional é suficientemente grande para superar a pressão de degenerescência de elétrons, fazendo a estrela comprimir-se mais ainda até que a energia cinética dos elétrons seja tal que proporcione obtenção de energia a partir da reação de fusão de um elétron com um próton, que produz um nêutron. Deste modo pode-se concluir que estas estrelas são de fato constituídas apenas, ou quase totalmente, de nêutrons, sendo a pressão de degenerescência deles, e a força nuclear forte, as responsáveis

pelo equilíbrio estelar. Não é de se estranhar, portanto, que a desidade destas estrelas seja realmente estupenda: da ordem da densidade do núcleo atômico (10^{23} kg/cm^3).

E ainda existe um outro limite, pois caso a massa de uma estrela de nêutrons seja maior que $2.5 M_{\odot}$, então se encadeia uma nova contração, agora sem retorno, já que todos os obstáculos físicos impostos pelas interações do tipo matéria-matéria já foram vencidos. Esta contração avança além do limite de Schwarzschild, $R = 2M$, originando-se, desta forma, os famosos buracos negros.

As estrelas de nêutrons observadas, destacam-se por apresentarem uma rápida rotação em torno do próprio eixo de simetria, que pode se originar em consequência da conservação do momento angular da estrela original (a partir da qual a estrela de nêutrons se formou por um processo de contração das suas dimensões). Além do mais observou-se que algumas destas estrelas super-condensadas se caracterizavam pela emissão altamente regular de ondas de rádio, ou seja emitiam radiação em pulsos regularmente separados por intervalos de tempo fixos que variavam de 0.033 até alguns segundos, sendo por isso estas estrelas chamadas de pulsares.

1.2 Exposição de objetivos

Esta dissertação se destaca por abordar um assunto até então obscuro na literatura: os aspectos visuais de corpos celestes em rotação. Credita-se este desinteresse pelo tema à crença generalizada de que estrelas ou fontes de radiação sempre se apresentam visualmente como pontos. No entanto quando abandonado este caráter pontual ao longo do estudo do processo de formação da imagem de uma estrela (para um observador distante) observa-se que, para o caso onde existe rotação, a luz que parte de diferentes pontos da estrela sofre também diferentes deflexões, podendo proporcionar formação de um aspectos visuais inusitados. Iremos, portanto, tratar estas fontes como sendo corpos extensos com formato de superfície conhecido e então analisar os desvios (relativos à posição real da fonte no espaço) sofridos por cada feixe de fótons de interesse.

A partir da descoberta da métrica de Kerr em 1963, deu-se início a uma enorme quantidade de publicações envolvendo estrelas em rotação e principalmente buracos negros, entre estas pode-se citar vários trabalhos que se envolveram na aplicação das equações de movimento no campo de Kerr, descobertas por Brandon Carter no seu famoso artigo 'Global

Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields¹. Entre estes, alguns ([11], [12], [13], [14], [15], [19]) se destacaram por apresentarem cálculos detalhados de órbitas de fótons no campo de buraco negros. Alguns outros artigos (ver por exemplo referência [16]) chegaram mais perto dos nossos objetivos, aplicando as equações de movimento de fótons para corpos em rotação.

Apesar de todas estas citações, não foi encontrado nenhum trabalho que tenha se proposto a analisar as equações de movimento de fótons no campo uma estrela em rotação e suas implicações na formação da imagem estelar para um observador distante.

Desde a sua descoberta, a métrica de Kerr acabou sendo identificada como a solução para as equações de campo de Einstein para o vácuo, axialmente simétrica e assintoticamente chata. Sabia-se também que esta solução podia ser interpretada como aquela correspondente a um objeto de simetria axial em rotação. No entanto esta correspondência só estava definida para o vácuo, ou seja, sabia-se que Kerr era a solução para o campo externo de uma estrela em rotação, mas para a região estelar interna nenhuma solução algébrica havia ainda sido encontrada como decorrência da complexidade das equações diferenciais não-homogeneas resultantes. Desta maneira qualquer descrição referente à estrutura estelar, envolvendo grandezas como densidade de energia e pressão interna, ficava a cargo de métodos numéricos. Esta dificuldade para encontrar uma resolução interna algébrica permanece até os dias de hoje, o que mantém Kerr apenas como uma solução externa.

Levando em conta esta restrição, iremos tecer considerações acerca da superfície de uma estrela em rotação, sendo possível impor algumas condições relacionadas ao campo gravitacional correspondente nas proximidades limite da superfície estelar. Por meio destas conjecturas se conclui que o campo gravitacional deve ser ortogonal à superfície da estrela para que se estabeleça equilíbrio em cada ponto da mesma, ou seja, não ocorram deslocamentos superficiais. Sabendo que cada ponto desta superfície está submetido a uma 4-aceleração (determinada pela velocidade angular da estrela), esta deve se manifestar também ortogonalmente para não quebrar o estado de equilíbrio. Estabelecendo esta condição para a superfície estelar, consegue-se obter para ela uma equação algébrica de quarto grau (implícita em θ) que relaciona suas grandezas de interesse.

A partir desta equação chega-se à conclusão que a forma destas estrelas corresponde a uma aproximação de um elipsóide de dois eixos iguais (x, y) - devido à simetria

¹Carter, B., Phys. Review, 174, 1559 (1968)

em ϕ - diferindo em extensão apenas na direção z . A função $r(\theta)$, explícita em θ , para esta superfície pode ser otimamente aproximada por uma elipse de eixos polar e radial conhecidos, mais uma correção em $\sin^2(2\theta)$. Estes procedimentos serão tratados com detalhes no capítulo 4. Por enquanto permaneceremos apenas apresentando a questão.

Conhecida a função explícita $r(\theta)$ podemos finalmente nos ater nos objetivos da dissertação propriamente ditos: determinar o aspecto visual de uma estrela ou outra fonte de radiação em rotação para um observador distante a partir dos desvios sofridos pelos feixes de fótons emitidos de sua superfície sob diversas condições iniciais. De cada ponto da superfície estelar partem fótons em todas as direções, cada uma destas correspondendo a uma condição inicial (de saída) distinta, em termos da qual se determina as constantes das equações de movimento no campo de Kerr, que serão introduzidas no capítulo 3. Felizmente, a maior parte destes fótons não se mostram relevantes para nossos propósitos, por determinarem, em relação ao observador distante, pontos intermediários da configuração óptica da imagem. Os pontos verdadeiramente importantes são aqueles que estabelecem os extremos da configuração observada. É em cima destas famílias de fótons que trabalharemos, pois a partir do conhecimento destes pontos extremos torna-se possível avaliar a extensão da imagem e as conseqüentes deformações relativas ao formato geométrico original da fonte. Veremos que em alguns casos estes desvios podem ser bem expressivos, levando à possibilidade de ocorrer deslocamentos e (principalmente) deformações da imagem estelar bastante acentuados, que por sua vez conduzem a um aspecto visual totalmente distinto do pontual.

Capítulo 2

Métrica de Kerr: Dedução e Propriedades

No presente capítulo apresentamos uma breve introdução ao conceito de tétrada: conjunto de quatro 4-vetores, que por satisfazerem entre si determinadas relações de 'normalização', torna possível simplificar a representação de uma dada métrica. Primeiramente tomamos a tétrada nula que corresponde à solução de Schwarzschild nas coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein. Em cima desta efetua-se um 'truque' para nos conduzir a outra tétrada nula que represente a métrica de Kerr nestas mesmas coordenadas. Logo em seguida aplicamos uma transformação de coordenadas, obtendo então a métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist, forma esta que será a adotada durante este trabalho. Tendo estudado estas novas coordenadas, e suas relações com as coordenadas geométricas usuais de Schwarzschild, parte-se para o estudo das principais propriedades desta métrica, cujo conhecimento mostrar-se-á útil nos capítulos posteriores. É através do estudo destas propriedades que ocorre o reconhecimento da métrica de Kerr como solução externa de uma estrela em rotação, o que nos indica que historicamente primeiro aconteceu a descoberta da métrica ¹, e só depois observou-se tal correspondência.

2.1 Dedução da solução de Kerr

A métrica de Kerr corresponde à solução das equações de campo de Einstein para o vácuo com simetria axial e assintoticamente chato. Várias são as soluções axialmente

¹Kerr, R.P., Phys. Rev.Letters 11, 237 (1963)

simétricas que satisfazem as equações de campo, no entanto a unicidade de Kerr está assegurada pelo fato de proporcionar espaço-tempo assintótico Minkowskiano:

$$\eta_{\alpha\beta} = (1, -1, -1, -1)$$

A obtenção da métrica de Kerr a partir das equações de campo tem se revelado tarefa extremamente árdua e trabalhosa. Outros caminhos, todavia, conduzem à solução procurada. Entre eles pode-se citar, por exemplo, a resolução da equação de Ernest², que envolve o formalismo de teoria de campos, ou a utilização de tétradas, que por se tratarem de uma ferramenta mais acessível, serão exploradas logo de início. Um estudo mais detalhado e profundo sobre o formalismo de tétradas e seu uso na dedução da métrica de Kerr pode é encontrado na referência [2]. Na verdade apresentaremos aqui uma espécie de artifício bem-sucedido descoberto por Newman and Janis³ baseado na idéia de tétradas. Necessário se faz, portanto, que uma introdução ao assunto seja apresentada⁴.

Seja assim um conjunto de quatro 4-vetores linearmente independentes $e_i^{(a)}$ satisfazendo a seguinte relação :

$$e_i^{(a)} e_{(a)j} = \eta_{ij} \quad (2.1)$$

Onde η_{ij} corresponde à matriz da métrica de Minkowski.

A cada um destes vetores associamos o seu recíproco ou inverso $e_{(a)}^i$, de tal modo que :

$$e_{(a)}^i e_i^{(b)} = \delta_b^a \quad (2.2)$$

Multiplicando esta equação por $e_{(b)}^k$, obtém-se :

$$e_{(b)}^k e_i^{(b)} e_{(a)}^i = e_{(a)}^k$$

Que por sua vez nos mostra que:

$$e_{(b)}^k e_i^{(b)} = \delta_i^k \quad (2.3)$$

Multiplicando 2.1 por η^{jk} , e sabendo que $\eta_{ij}\eta^{jk} = \delta_i^k$, temos :

$$\eta^{jk} e_i^{(a)} e_{(a)j} = \delta_i^k \quad (2.4)$$

Comparando 2.4 com a equação abaixo:

$$e_{(a)}^k e_i^{(a)} = \delta_i^k$$

²Carmeli, M. Classical Fields : General Relativity and Gauge Theory, p.373, Wiley, N.Y. (1993)

³Newman, E.T. and Janis, A.I, J. Math. Phys. 6, 915, (1965)

⁴d'Inverno, R. Introducing Einstein Relativity, p.139, Claredon, Oxford (1992)

Concluimos que :

$$e_{(a)}^k = \eta^{jk} e_{(a)j} \quad (2.5)$$

E de maneira análoga :

$$e_k^{(a)} = \eta_{kj} e^{(a)j} \quad (2.6)$$

Percebemos assim que as matrizes η^{jk} e η_{jk} assumem o mesmo papel em relação aos índices de 'rótulo' ($a, b = 0, 1, 2, 3$) da tétrada que o tensor métrico desempenha perante os índices de coordenadas ($i, j, k, l = 0, 1, 2, 3$) . Portanto se torna possível expressar este último em termos dos novos vetores da tétrada . E daí que surge a utilidade e relevância deste formalismo, pois geralmente estes vetores são escolhidos de maneira a simplificar o problema . Vejamos agora como relacionar o tensor métrico às matrizes de base das tétradas.

Dado que:

$$e_{(a)j} = g_{ab} e_j^{(b)} \quad (2.7)$$

Multiplicando esta equação por $e_k^{(a)} = \eta_{ki} e^{(a)i}$ obtemos:

$$e_k^{(a)} e_{(a)j} = \eta_{kj} = g_{ab} e_j^{(b)} \eta_{ki} e^{(a)i}$$

E portanto:

$$\eta_{kj} = g_{ab} e_k^{(a)} e_j^{(b)} \quad (2.8)$$

Por analogia também temos:

$$g_{ab} = \eta_{kj} e_{(a)}^k e_{(b)}^j \quad (2.9)$$

A matriz dos vetores da tétrada pode ser escolhida arbitrariamente de maneira que mais simplifique um dado problema. No caso da matriz diagonal Minkowskiana (1,-1,-1,-1) os vetores $e_i^{(a)}$ são todos ortogonais entre si . Neste ponto é interessante observar que o objetivo desta abordagem é tomar um conjunto de 4-vetores tal que eles gerem o espaço de Minkowski, ou seja, dada uma certa métrica ($g_{\mu\nu}$) arbitrariamente complicada, sempre é possível escolher em um ponto do espaço uma tétrada que nos proporcione a geometria de espaço chato. Porém não há motivo para esta ser sempre a escolha mais apropriada, pois em algumas situações o uso de uma tétrada não ortogonal pode ser mais interessante. Tendo em vista este novo formalismo, podemos expressar as componentes de tétrada de um 4-vetor como sendo:

$$A^{(a)} = e_i^{(a)} A^i \implies A^i = e_{(a)}^i A^{(a)} \quad (2.10)$$

$$A_{(a)} = e_{(a)}^i A_i \implies A_i = e_i^{(a)} A_{(a)} \quad (2.11)$$

Estas expressões acima evidenciam uma outra interpretação das tétradas ainda não citada: como matriz transformação de base. Um tratamento mais rigoroso do assunto leva à conclusão que tétradas fazem a transformação de uma base coordenada de vetores para outra base de vetores não-coordenada⁵. Na verdade podemos dizer mais: quando tomamos uma tétrada cuja matriz de métrica é equivalente à matriz de Minkowski, estamos adotando um novo sistema de coordenadas localmente inercial. Desta forma deixamos de tratar o problema dentro de um sistema de coordenadas onde a complexidade tensorial é maior, para abordá-lo num outro sistema de coordenadas no qual a geometria inicial cede lugar a simplicidade de um espaço chato.

Finalmente para iniciarmos a dedução da métrica de Kerr, vamos introduzir o conceito de tétrada nulas⁶: aquelas compostas por 4-vetores nulos.

Dada a tétrada $e_i^{(a)} = (v^a, i^a, j^a, k^a)$ que conduz à métrica de Minkowski :

$$\eta_{ij} = e_i^{(a)} e_{(a)j} = (1, -1, -1, -1)$$

Definimos uma segunda tétrada cujos 4-vetores sejam nulos :

$$(l^a, n^a, m^a, m^{*a}) \quad (2.12)$$

Onde estes vetores estejam definidos da maneira abaixo:

$$\begin{aligned} l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^a + i^a) \\ n^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v^a - i^a) \\ m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(j^a - ik^a) \\ m^{*a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(j^a + ik^a) \end{aligned}$$

Pelas duas últimas expressões acima percebe-se que os 4-vetores m^{*a} e m^a são ambos complexos, sendo um o complexo conjugado do outro. A partir da tétrada inicial $e_i^{(a)} = (v^a, i^a, j^a, k^a)$ verifica-se que os estes últimos vetores obedecem as seguintes relações de normalização:

$$l^a n_a = 1 \quad (2.13)$$

⁵Carmeli, M. Classical Fields : General Relativity and Gauge Theory, p. 557, Wiley, N.Y. (1993)

⁶d'Inverno, R. Introducing Einstein Relativity, p.249, Clarendon, Oxford (1992)

$$m^a m_a^* = -1 \quad (2.14)$$

E que ainda são todos nulos, ou seja :

$$l^a l_a = n^a n_a = m^a m_a = m^{*a} m_a^* = 0 \quad (2.15)$$

Com estes vetores chega-se à matriz de métrica ($g_{ij} = e_i^{(a)} e_{(a)j}$) abaixo :

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

De posse desta matriz, podemos agora obter o tensor métrico g_{ab} , dado pela relação:

$$g_{ab} = g_{ij} e_{(a)}^i e_{(b)}^j \quad (2.17)$$

Portanto temos:

$$g_{ab} = l_a n_b + l_b n_a - m_a m_b^* - m_b m_a^* \quad (2.18)$$

Ou ainda em sua forma contravariante:

$$g^{ab} = l^a n^b + l^b n^a - m^a m^{*b} - m^b m^{*a} \quad (2.19)$$

Antes de continuarmos, precisamos apresentar a métrica de Schwarzschild, que é a solução das equações de campo de Einstein para o vácuo com simetria esférica e assintoticamente chato. Façamo-lo inicialmente em termos das coordenadas geométricas usuais (t, R, θ, ϕ) , com as quais a esta solução se apresenta na forma abaixo:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dr^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Pelo fato desta métrica ser diagonal, as componentes contravariantes do tensor métrico ($g^{\mu\nu}$) correspondem exatamente ao inverso das componentes covariantes ($g_{\mu\nu}$), de tal modo que:

$$\begin{aligned} g^{tt} &= \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} \\ g^{rr} &= -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) \\ g^{\theta\theta} &= -R^{-2} \end{aligned}$$

$$g^{\phi\phi} = -\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}$$

Sejam agora as coordenadas avançadas de Eddington-Finkelstein : (v, R, θ, ϕ)

$$(v, R, \theta, \phi)$$

Onde :

$$v = \bar{t} + R$$

$$\bar{t} = t + 2M \ln(R - 2M)$$

Enquanto as outras três coordenadas (R, θ, ϕ) continuam as mesmas e preservam seu sentido geométrico próprio usual.

A solução de Schwarzschild nestas coordenadas é dada pelas seguintes componentes não-nulas do tensor métrico contravariante:

$$g^{01} = g^{vr} = -1$$

$$g^{11} = g^{rr} = -(1 - \frac{2M}{R})$$

$$g^{22} = g^{\theta\theta} = -\frac{1}{R^2}$$

$$g^{33} = g^{\phi\phi} = -\frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}$$

Por inspeção podemos verificar que a métrica acima pode ser perfeitamente representada pela tétrada nula abaixo:

$$l^a = (0, 1, 0, 0) = \delta_1^a$$

$$n^a = (-1, -\frac{1}{2}(1 - \frac{2M}{R}), 0, 0) = -\delta_0^a - \frac{1}{2}(1 - \frac{2M}{R})\delta_1^a$$

$$m^a = \frac{1}{R\sqrt{2}}(0, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta}) = \frac{1}{R\sqrt{2}}(\delta_2^a + \frac{i}{\sin \theta}\delta_3^a)$$

$$m^{*a} = \frac{1}{R\sqrt{2}}(0, 0, 1, \frac{-i}{\sin \theta}) = \frac{1}{R\sqrt{2}}(\delta_2^a - \frac{i}{\sin \theta}\delta_3^a)$$

Como foi dito anteriormente apresentaremos um truque para alcançar o resultado desejado. A artimanha começa tornando a coordenada R complexa, sendo R^* o seu complexo conjugado. Embora R agora pertença ao plano complexo, l^a e n^a devem continuar reais e m^{*a} , m^a complexos conjugados. Desta maneira esta tétrada é reescrita como:

$$l^a = \delta_1^a$$

$$n^a = -\delta_0^a - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M}{R} - \frac{M}{R^*}\right)\delta_1^a$$

$$m^a = \frac{1}{R^*\sqrt{2}}\left(\delta_2^a + \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^a\right)$$

$$m^{*a} = \frac{1}{R\sqrt{2}}\left(\delta_2^a - \frac{i}{\sin\theta}\delta_3^a\right)$$

Façamos agora a seguinte transformação de coordenadas:

$$v \rightarrow v' = v + ia \cos \theta$$

$$R \rightarrow R' = R + ia \cos \theta$$

$$\theta \rightarrow \theta'$$

$$\phi \rightarrow \phi'$$

Já que R foi estendido ao plano complexo, podemos exigir que R' e v' sejam reais, o que nos leva a:

$$l'^a = \delta_1^a$$

$$n'^a = -\delta_0^a - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2Mr'}{R'^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)\delta_1^a$$

$$m'^a = \frac{1}{\sqrt{2}(R' + ia \cos \theta)}\left(-ia \sin \theta (\delta_0^a + \delta_1^a) + \delta_2^a + \frac{i}{\sin \theta}\delta_3^a\right)$$

Usando-se a equação 2.18 para g^{ab} , obtemos finalmente o tensor métrico da solução de Kerr nas coordenadas reais (v', R', θ', ϕ') . Podemos retirar o índice superior (') destas coordenadas, já que a extensão ao plano complexo nada mais é que um truque, e ao mesmo tempo trocar R por r , uma vez que o sentido geométrico desta já se extraviou, não faz sentido manter a representação antiga. Tomando suas componentes covariantes, temos:

$$g_{00} = g_{vv} = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)$$

$$g_{01} = g_{vr} = -1$$

$$g_{03} = g_{v\phi} = \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2}$$

$$g_{13} = g_{r\phi} = a \sin^2 \theta$$

$$g_{22} = g_{\theta\theta} = -\rho^2$$

$$g_{\phi\phi} = g_{33} = - \left((r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^4 \theta \right)$$

Onde :

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

De tal modo que :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dv^2 - 2 dv dr + \frac{2Mr}{\rho^2} 2a \sin^2 \theta dv d\phi + 2a \sin^2 \theta dr d\phi - \rho^2 d\theta^2 + \\ - \left((r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^4 \theta \right) d\phi^2$$

Esta é conhecida como a forma avançada de Eddington-Finkelstein para a solução de Kerr. Existem, porém, diversas outras coordenadas através das quais se pode expressar esta métrica. Dentre estas, três formas ganharam especial destaque por apresentarem vantagens operacionais em relação às demais. A primeira já foi apresentada acima. A segunda é tida como o análogo de Kerr à Schwarzschild, pois quando tomamos o limite de um de seus termos (que será indicado mais adiante) tendendo a zero, recai-se na forma clássica de Schwarzschild, com as suas coordenadas geométricas usuais. Por último citaremos a forma original como Roy P. Kerr pioneiramente obteve esta solução.

Considere as coordenadas avançadas de E-Finkelstein para Kerr: $(v, r, \theta, \bar{\phi})$; onde ϕ foi chamada de $\bar{\phi}$ para evitar confusões posteriores advindas da próxima transformação de coordenadas.

Podemos definir uma transformação de coordenadas que nos leve da primeira forma da solução de Kerr para a segunda, que está sendo procurada. Esta transformação está dada em sua forma diferencial por:

$$dv = d\bar{t} + dr = dt + \frac{2Mr + \Delta}{\Delta} dr$$

$$d\bar{\phi} = d\phi + \frac{a}{\Delta} dr$$

Onde:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

Substituindo estas equações nos termos do tensor métrico da solução de Eddington-Finkelstein, obtemos o que se chama de solução de Boyer-Lindquist para Kerr:

$$g_{tt} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad (2.20)$$

$$g_{rr} = -\frac{\rho^2}{\Delta} \quad (2.21)$$

$$g_{\phi\phi} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta \quad (2.22)$$

$$g_{\theta\theta} = -\rho^2 \quad (2.23)$$

$$g_{t\phi} = a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \quad (2.24)$$

Observando estes termos percebe-se que ao fazer $a = 0$ recai-se no tensor métrico de Schwarzschild.

Finalmente temos a forma como Kerr descobriu inicialmente esta solução em 1963 empregando o conceito de tétradas nulas e complexas⁷. Neste seu trabalho ele chega ao seguinte resultado (considerando o eixo OZ como o eixo de simetria de rotação):

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} k^2 \quad (2.25)$$

Onde k e r estão definidos pelas expressões abaixo:

$$k = \frac{r^2(xdx + ydy) + ar(xdy - ydx) + (r^2 + a^2)(zdz + r d\bar{t})}{r(r^2 + a^2)}$$

$$r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2 z^2 = 0 \quad \text{ou ainda} \quad R^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta \quad (2.26)$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

E onde as coordenadas cartesianas estão relacionadas com r, θ e ϕ , que são as mesmas coordenadas de Boyer-Lindquist, através das equações seguintes:

$$x = r \sin \theta \cos \phi + a \sin \theta \sin \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi - a \sin \theta \cos \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

E ainda:

$$\bar{t} = v - r$$

Portanto fica evidente que as coordenadas (t, r, θ, ϕ) de Boyer-Lindquist não correspondem diretamente às coordenadas geométricas (t, R, θ, ϕ) de Schwarzschild, a não ser quando $a = 0$ ou R se torna muito grande. Isto pode ser visto facilmente considerando que

⁷R.P. Kerr, Phys.Rev.Letters 11, 237 (1963)

no limite em R tende ao infinito, r também se apresenta muito maior que o parâmetro finito 'a'. Este fato justifica a expansão:

$$R = r + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{2r} + \frac{1}{8} \left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{r} \right)^2 + \dots$$

Que por sua vez deixa claro a coincidência de R e r neste limite.

2.2 Propriedades da solução de Kerr

Até aqui nos limitamos em apresentar a solução de Kerr sem discutir em detalhes suas características. Façamos agora um estudo mais minucioso de suas propriedades tomando como ponto de partida a métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist com a nova convenção de sinais $(-1, 1, 1, 1)$ que será utilizada daqui em frente.

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 +$$

$$- 2 \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \quad (2.27)$$

Esta escolha de coordenadas é a mais adequada para realizar análises de propriedades, pois embora não tenham o mesmo significado geométrico das coordenadas usuais de Schwarzschild, são as que carregam consigo uma clarividência geométrica maior, já que as relações de correspondência entre um sistema de coordenadas e o outro foram dadas acima e são de interpretação mais acessível.

Além da escolha adequada do sistema de coordenadas, devemos esclarecer qual sistema de unidades tem sido utilizado na dedução das métricas acima. Em todos os desenvolvimentos algébricos feitos foi usado o sistema de unidades geometrizadas⁸, caracterizado pelas relações abaixo:

$$c = 1$$

$$G = 1$$

Que implicam nas seguintes equações relacionando as grandezas de comprimento, tempo, e massa:

$$1 \text{ s} = 3.10^8 \text{ m}$$

⁸Ver:Schultz, B.F., A First Course in General Relativity, p.199, Cambridge University, Cambridge (1985)

$$6.673 \cdot 10^{-11} m^3 = s^2 Kg$$

Neste sistema de unidades todas as grandezas físicas, em decorrência das duas relações acima, são convertidas à dimensão de comprimento. A massa do Sol e a constante de Planck, por exemplo, valem:

$$M_s = 1.477 \cdot 10^3 m$$

$$\hbar = 2.612 \cdot 10^{-70} m^2$$

Este sistema de unidades será utilizado ao longo de toda dissertação.

Até o momento tem-se considerado Kerr como a solução das equações de campo de Einstein para vácuo com simetria axial e assintoticamente chato. Um espaço-tempo dotado de uma métrica é assintoticamente chato quando:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \quad \text{para } R \rightarrow \infty$$

Pelas relações anteriores sabemos que quando $R \rightarrow \infty$, temos: $r \rightarrow \infty$

Tomando este limite para a terceira solução de Kerr apresentada (equação 2.25), facilmente percebe-se que:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Tratando-se de fato de uma solução chata neste limite.

Observando-se a equação 2.27 vemos que o tensor métrico não depende das coordenadas ϕ e t . Este fato indica a existência de dois vetores de Killing :

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.29}$$

O primeiro refere-se a uma invariância de rotação em relação a um dado eixo fixo, ou seja, a solução não se altera enquanto se percorre as órbitas descritas pelo vetor 2.28. Neste caso estas curvas são círculos axiais, pois senão estaria desfeita a simetria de rotação. Isto indica que qualquer órbita no campo de Kerr com $r = cte.$, $\theta = cte.$, $t = cte.$ deve ser um círculo. Veremos mais tarde que esta é uma propriedade de vital importância quando se deseja obter as equações de movimento de objetos inseridos neste campo. Já o segundo vetor de Killing estabelece o caráter estático desta solução por evidenciar simetria em relação à coordenada tempo.

O fato do tensor métrico não depender nem de t nem de ϕ implica no estabelecimento de duas constantes de movimento. Isto pode ser deduzido a partir da equação:

$$m \frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} P^\mu P^\nu$$

Que nos indica que as duas componentes covariantes do 4-momento, como visto abaixo, são constantes:

$$P_t = cte.$$

$$P_\phi = cte.$$

Conhecidas estas propriedades de simetria, pode-se agora buscar a identificação dos parâmetros da equação 2.27. Foi dito na seção passada que esta equação recai na solução de Schwarzschild quando $a \rightarrow 0$. Desta forma M é reconhecida como a massa geométrica do campo. Quanto ao parâmetro a , a sua identificação ocorre de maneira mais indireta, embora existam várias formas de fazê-lo. Uma destas consiste em comparar a solução de Kerr com o campo gravitacional exterior gerado por uma esfera em rotação no limite de campo fraco. Neste caso a surge relacionada com a velocidade angular, de tal modo que o momento angular do corpo em rotação é dado por:

$$J = ma$$

Portanto, a identificação mais precisa para a , é momento angular por unidade de massa.

Outro ponto relevante refere-se ao fato da solução apresentar simetria discreta perante ϕ e t apenas simultaneamente, ou seja, as inversões nestas coordenadas se tomadas isoladamente, alteram a solução. No entanto, se tomamos em conjunto

$$t \rightarrow -t \quad \phi \rightarrow -\phi$$

não há alteração alguma na equação 2.27.

Uma outra propriedade interessante trata da simetria de reflexão em relação ao plano equatorial, como decorrência da dependência do tensor métrico com o ângulo azimutal se dar somente com termo $\sin^2\theta$, que obviamente é função par referente ao plano $\theta = \pi/2$.

Analisaremos agora as singularidades e os horizontes de eventos desta solução. Sabemos que existem dois tipos básicos de singularidades: removíveis e essenciais. As primeiras ocorrem quando a explosão do tensor métrico é eliminada por uma mudança de variáveis, ou seja, através de uma transformação de coordenadas pode-se sumir com o ponto

singular problemático. Isto é, por exemplo, o que acontece quando se define as coordenadas avançadas de E-Finkelstein na resolução de Schwarzschild. Já uma singularidade essencial ou intrínseca não admite estas sutilezas matemáticas: ela existe e não pode ser removida. E está dada pela contração do tensor de Riemann consigo mesmo:

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Quando o valor deste escalar explode, temos uma singularidade essencial.

Para Schwarzschild existe uma singularidade essencial para $R = 0$. Para o caso de Kerr isto se verifica quando $\rho = 0$, ou seja:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

Cuja solução é:

$$r = 0 \quad e \quad \cos \theta = 0$$

Ou equivalentemente:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad e \quad z = 0$$

Esta equação acima significa que a singularidade essencial se estende por todo um anel de raio a localizado sobre o plano equatorial.

Uma outra particularidade desta solução é a existência do chamado 'limite estático'. Trata-se de uma superfície (axialmente simétrica) no interior da qual nada pode permanecer fixo em relação à coordenada ϕ . Para demonstrar melhor este fato, tomemos como exemplo um fóton que parte com movimento inicialmente tangencial a um círculo de raio $r = cte$. no plano equatorial. Suponhamos duas direções de saída opostas $:\pm\phi$.

Neste caso, onde $dr = d\theta = 0$, a equação 2.27 se reduz a:

$$0 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2$$

Cuja solução é :

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$$

Se $g_{tt} = 0$, as soluções acima se reduzem a:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad e \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{2g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

Pela expressão de $g_{t\phi}$ (equação 2.24), temos que a solução não-nula possui o mesmo sinal que a . Isto indica que o fóton que parte com movimento tangencial à superfície $g_{tt} = 0$ (com sentido $+\phi$, favorável à rotação) tem seu movimento estabelecido à razão descrita acima. Por outro lado, o fóton que parte em sentido contrário ao momento angular da fonte (com sentido $-\phi$) tem seu movimento anulado. Já que nada se move mais rapidamente que a luz, conclui-se que qualquer partícula que esteja sobre a superfície $g_{tt} = 0$ ou no interior da mesma é arrastada no mesmo sentido de rotação da fonte. Este efeito é denominado de arrastamento de referenciais inerciais (frame dragging ou dragging effect), e pela equação acima pode ser demonstrado que sua influência decai com $1/r^3$, tornando este efeito relevante apenas nas proximidades da fonte do campo. Nas discussões precedentes ficou estabelecido que o limite estático está determinado pela seguinte equação:

$$g_{tt} = 0 \implies \Delta - a^2 \sin^2 \theta = 0$$

Cuja solução

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

determina explicitamente a forma da superfície que delimita o limite estático, também denominada de superfície de red-shift infinito. Como já sabemos, a intensidade deste efeito diminui com o aumento da coordenada r . Este fato reduz a importância da superfície mais interna (de sinal negativo), visto que a externa é que de fato acaba delimitando o início da zona não-estática, sendo a ela, por isso, atribuído o nome de 'limite estático'. Portanto temos:

$$r_{static} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

A região compreendida entre este limite e o horizonte de eventos mais externo é conhecida como 'ergoregião'.

Vejamos agora como determinar os horizontes de eventos da métrica de Kerr. Antes disto, porém, é interessante analisar primeiramente o horizonte de eventos da métrica de Schwarzschild. Neste caso observamos que a superfície de infinito red-shift ($g_{tt} = 0$) corresponde exatamente àquela onde $g_{rr} = \infty$. Portanto, em Schwarzschild o horizonte de eventos também é a superfície de infinito red-shift. Já no caso de Kerr estas deixam de ser degeneradas, pois as superfícies do horizonte de eventos estão dadas por:

$$g_{rr} = \infty \implies r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

Constituindo de fato dois horizontes, um mais externo:

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

E outro interno :

$$r_- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$$

A porção do espaço compreendida entre r_+ e r_{stat} , é que constitui a ergoregião citada acima.

Desta maneira podemos dividir o espaço em três regiões onde a métrica de Kerr é regular:

1. $0 < r < r_-$
2. $r_- < r < r_+$
3. $r_+ < r < \infty$

Vale ainda ressaltar que estes limites foram obtidos para o caso em que: $M^2 > a^2$.
O caso em que $M^2 < a^2$ não possui sentido físico.

Capítulo 3

Obtenção de Geodésicas no Campo de Kerr

Neste capítulo trataremos da dedução das equações de movimento para partículas de teste submersas no campo de Kerr. Inicialmente é apresentado um exemplo simplificado de como estas equações podem ser determinadas para fótons em condições especiais. Em seguida adentra-se no formalismo de Hamilton-Jacobi em busca de uma quarta constante de movimento que nos leve às equações desejadas em condições diversas e para partículas de teste quaisquer. Ressalta-se que, embora a solução obtida seja para o caso geral, no decorrer deste trabalho só haverá interesse por geodésicas nulas: aquelas descritas por fótons. A redução a este caso particular de interesse se dá fazendo a massa da partícula-teste igual a zero.

3.1 Equação de movimento de fótons que partem radialmente do plano estelar equatorial : um exemplo trivial das geodésicas de Kerr.

Antes de lançarmos mão de métodos mais poderosos, vamos ilustrar para um caso extremamente simples, como se pode chegar à equação de movimento de fótons utilizando apenas as relações que conhecemos até agora. Buscamos com isso também ter uma idéia das limitações deste processo referentemente aos casos mais gerais com condições iniciais arbitrárias.

Seja a métrica de Kerr em coordenadas de Boyer-Lindquist :

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.1)$$

Onde :

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

Considerando a equação da geodésica que conhecemos

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

podemos deduzir a seguinte equação que relaciona componentes co e contravariantes do 4-momento:

$$m \frac{dP_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} P_\mu P_\nu \quad (3.2)$$

Por esta equação é fácil perceber que a métrica de Kerr apresenta duas constantes de movimento, pois como os termos do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ não dependem nem da coordenada ϕ nem da coordenada t , P_ϕ e P_t são elevados à condição de constantes de movimento. Além destas duas, há uma terceira constante de movimento que não depende das propriedades da métrica : a massa de repouso da partícula em questão. Para fótons esta massa é nula, valendo, portanto, a seguinte equação dinâmica:

$$P^\mu P_\mu = 0$$

Para o caso de um fóton que parte radialmente do plano estelar equatorial, a equação 3.2 nos mostra que uma vez estabelecido $\theta = \pi/2$ no início, o movimento permanecerá para sempre confinado neste plano. Portanto temos que $P_\theta = P^\theta = 0$ ao longo de todo movimento. Em vista disto podemos escrever:

$$P^r P_r + P^t P_t + P^\phi P_\phi = 0 \quad (3.3)$$

Sabendo que :

$$P^\nu = g^{\nu\mu} P_\mu$$

No caso de Kerr temos :

$$P^t = g^{tt} P_t + g^{t\phi} P_\phi \quad (3.4)$$

$$P^\phi = g^{\phi t} P_t + g^{\phi\phi} P_\phi \quad (3.5)$$

Onde: $P_\phi = L$; $P_t = -E$

E as componentes contravariantes do tensor métrico são dadas por:

$$g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta} \quad (3.6)$$

$$g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad (3.7)$$

$$g^{t\phi} = -\frac{2Mr}{\rho^2 \Delta} \quad (3.8)$$

Verificam-se também as relações seguintes para as componentes do 4-momento:

$$P^r = \frac{dr}{d\lambda}$$

$$P^\phi = \frac{d\phi}{d\lambda}$$

$$P^t = \frac{dt}{d\lambda}$$

$$P^\theta = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

Como estamos supondo o movimento do fóton inicialmente radial, devemos impor a condição inicial abaixo:

$$P^\phi(R) = \frac{d\phi}{d\lambda}(R) = 0 \quad (3.9)$$

Onde R designa o raio equatorial estelar.

Impondo esta condição à equação 3.5, obtemos:

$$\frac{L}{E} = \frac{-2Ma}{R - 2M}$$

Partindo agora da equação 3.3, chegamos a:

$$(P^r)^2 + L \left(\frac{(r - 2M)L - 2MaE}{r(r^2 - 2Mr + a^2)} \right) - E \left(\frac{(r^3 + a^2r + 2Ma^2)E - 2MaL}{r(r^2 - 2Mr + a^2)} \right) = 0$$

Rearranjando os termos e isolando P^r , temos:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{r^3} \left(-(r - 2M)L^2 - 4MaEL + (r^3 + a^2r + 2Ma)E^2 \right)$$

Sabendo ainda que:

$$\frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{1}{P\phi} = \left(\frac{(r-2M)L + 2MaT}{r(r^2 - 2Mr + a^2)} \right)^{-1}$$

Podemos fazer:

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\phi}$$

O que finalmente nos conduz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\phi}{dr} = \sqrt{\frac{r^3 L^2 + \alpha r^2 + \beta r}{(r^2 - 2Mr + a^2)^2 (E^2 r^3 + \gamma r + \varepsilon)}} \quad (3.10)$$

Onde os coeficientes estão dados por:

$$\alpha = -4ML(L - aE) \quad (3.11)$$

$$\beta = 4M^2(L - Ea)^2 \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = 2M(L - aE)^2 \quad (3.13)$$

$$\gamma = a^2 E^2 - L^2 \quad (3.14)$$

Portanto estariam as equações de movimento dadas por:

$$\theta = \pi/2$$

$$\phi = \phi_0 + \int \sqrt{\frac{r^3 L^2 + \alpha r^2 + \beta r}{(r^2 - 2Mr + a^2)^2 (E^2 r^3 + \gamma r + \varepsilon)}} dr \quad (3.15)$$

Vemos desta maneira que através de cálculos algébricos simples alcançamos as equações desejadas do fóton. No entanto esta simplicidade só existe porque estas órbitas estão confinadas no plano equatorial, o que de fato torna o problema trivial. Pois além das três constantes de movimento antes citadas (P_ϕ, P_t, m^2), surge uma quarta: P_θ , que neste caso é nula.

Para um fóton que não parta do plano equatorial, ou mesmo que parta dele, mas não radialmente, isto não mais ocorre, pois nesta nova situação P_θ varia, e ficamos com apenas três constantes de movimento para solucionar a equação:

$$P^r P_r + P^t P_t + P^\phi P_\phi + P^\theta P_\theta = 0$$

Tarefa bastante complicada se não for antes estabelecida uma quarta constante de movimento. Aplicaremos o método de Hamilton-Jacobi na determinação desta quarta constante, que nos possibilitará obter as equações gerais de movimento no campo de Kerr.

3.2 Dedução das Geodésicas de Kerr segundo o Método de Hamilton-Jacobi

Antes de entrarmos diretamente na etapa de obtenção das equações de movimento no campo de Kerr, apresentaremos uma introdução à formulação lagrangeana da mecânica relativística¹.

Dado um sistema mecânico descrito por n coordenadas generalizadas x^a e por n velocidades generalizadas $\dot{x}^a$ ($a = 1, 2, 3, \dots, n$), proponhamos a seguinte função energia cinética :

$$T = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

E uma função pontencial que só dependa das coordenadas generalizadas x^a

$$V = V(x^a)$$

de tal modo que suas derivadas em relação as coordenadas originem forças generalizadas:

$$F_a = -\frac{\partial V}{\partial x^a}$$

Portanto temos a seguinte Lagrangeana :

$$L = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b - V(x^a) \quad (3.16)$$

Pelo Princípio Variacional, sabemos que a ação deve ser extremizada entre os dois eventos limites da integral, o que nos leva a:

$$\delta S = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x^a(\tau), \dot{x}^a(\tau)) d\tau$$

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) \right] \delta x^a d\tau$$

Dada a arbitrariedade de δx^a , surge a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0 \quad (3.17)$$

A partir da Lagrangeana definida acima poderemos agora obter as equações de movimento para uma partícula imersa numa métrica g_{ab} , e então saber se a definição de T foi adequada. Substituindo a expressão 3.16 na equação 3.17, temos:

¹A.O.Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, p.60. Dover, N.Y. (1980)

$$\frac{\partial L}{\partial x^p} = \frac{1}{2} g_{ab,p} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^p}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^p} = \frac{1}{2} g_{ab} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^p} (\dot{x}^a \dot{x}^b) = \frac{1}{2} (g_{ap} \dot{x}^a + g_{pb} \dot{x}^b)$$

Como a e b são índices mudos na equação acima, ela se reduz a:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^p} = g_{ap} \dot{x}^a \quad (3.18)$$

Tomando agora a derivada deste termo em relação a τ , temos:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = g_{ap} \ddot{x}^a + g_{ap,b} \dot{x}^a \dot{x}^b$$

De modo que a equação de Euler-Lagrange assume agora a forma:

$$\frac{1}{2} g_{ab,p} \dot{x}^a \dot{x}^b - \frac{\partial V(x^a)}{\partial x^p} - g_{ap} \ddot{x}^a - g_{ap,b} \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (3.19)$$

Dada a identidade abaixo:

$$g_{ab,p} = \Gamma_{ap}^d g_{db} + \Gamma_{bp}^d g_{ad} \quad (3.20)$$

Substituindo-a na eq. 3.19, e depois multiplicando tudo por :

$$g^{pd}$$

Chegamos a seguinte equação:

$$\ddot{x}^d + \Gamma_{ab}^d \dot{x}^a \dot{x}^b = F_a \quad (3.21)$$

Que é a equação da geodésica para uma partícula submetida à ação de um potencial. No caso deste potencial ser nulo recaímos na equação de geodésica para partícula livre:

$$\ddot{x}^d + \Gamma_{ab}^d \dot{x}^a \dot{x}^b = 0 \quad (3.22)$$

Concluimos desta forma que a energia cinética foi convenientemente definida.

Sendo assim partiremos agora em busca da hamiltoniana que nos abrirá as portas para a formulação de Hamilton-Jacobi², que por sua vez nos simplificará substancialmente a obtenção das geodésicas de Kerr.

²Carter, B. Phys. Rev. 174, 1559 (1968)

Seja P_b uma componente do momento generalizado, tal que :

$$P_b = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^b}$$

Podemos então escrever a hamiltoniana H do problema como sendo:

$$H = P_b \dot{x}^b - L$$

Para a lagrangeana definida, já calculamos P_b (eq.3.18):

$$P_b = g_{ba} \dot{x}^a$$

De tal modo que a hamiltoniana acaba definida como:

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu + V(x^\mu)$$

No caso de ausência de potencial (partícula livre), temos:

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \quad (3.23)$$

Sendo esta função também denominada de Super-hamiltoniana.

Sejam agora as equações canônicas:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial P_\mu} \quad (3.24)$$

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \quad (3.25)$$

Procuraremos então encontrar a função ação $S = S(\lambda, x^\mu)$ que satisfaça a equação de Hamilton-Jacobi:

$$H + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0$$

Onde : $\lambda = \tau/m$ (no caso de partículas)

As parciais desta função estão relacionadas com as componentes do momento generalizado através da equação:

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \quad (3.26)$$

Desta maneira podemos reescrever a equação 3.23 toda em termos de S :

$$\frac{-\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} \right) \quad (3.27)$$

Tomando apenas as componentes não-nulas de $g^{\mu\nu}$, obtemos:

$$\frac{-\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left[g^{rr} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + g^{tt} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + 2g^{t\phi} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right) \right]$$

Como já vimos antes, em decorrência do tensor métrico não depender de ϕ e de t , existem duas componentes do momento generalizado que são constantes de movimento:

$$P_\phi = L = cte.$$

$$P_t = -E = cte.$$

Tentaremos agora escrever a função ação $S(\lambda, x^\mu)$ de Hamilton-Jacobi em termos separáveis, ou seja:

$$S = S(\lambda, t, r, \theta, \phi) = S(\lambda) + S(t) + S(r) + S(\theta) + S(\phi)$$

Vejamos agora como determinar alguns destes termos usando a relação 3.26:

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu = -\frac{1}{2} m^2 = -\frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

Logo temos:

$$S(\lambda) = \frac{1}{2} m^2 \lambda$$

Da mesma forma:

$$P_\phi = L = \frac{\partial S}{\partial \phi}$$

Leva a:

$$S(\phi) = L\phi$$

E finalmente:

$$P_t = -E$$

Implica em:

$$S(t) = -Et$$

Substituindo estes resultados na equação 3.27, encontramos:

$$\begin{aligned} -\rho^2 m^2 = (r^2 - 2Mr + a^2) \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 E^2}{\Delta} + (aE \sin \theta)^2 + \\ + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2 L^2}{\Delta} + \frac{4Mr a E L}{\Delta} \end{aligned}$$

Rearranjando os termos em r para um lado, e os termos com dependência em θ para o outro lado da equação, obtemos:

$$\Delta \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + r^2 m^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 E^2 + a^2 L^2 - 4MraEL}{\Delta} + 2aLE =$$

$$= - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + (am \cos \theta)^2 + (aE \sin \theta)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - 2aLE \right]$$

Onde o termo $-2aEL$ foi adicionado dos dois lados da equação para promover simplificações futuras.

Inusitadamente foi possível alcançar uma segregação completa das coordenadas r e θ , colocando a equação acima exatamente na forma como desejávamos.

Para solucionar esta equação separável, devemos igualar os dois lados dela a uma mesma constante: $-\mathfrak{S}$

Deste modo temos:

$$\mathfrak{S} = (P_\theta)^2 + (am \cos \theta)^2 + (aE \sin \theta)^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} - 2aEL \quad (3.28)$$

$$-\mathfrak{S} = \Delta(P_r)^2 + r^2 m^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 E^2 + a^2 L^2 - 4MraEL}{\Delta} + 2aLE \quad (3.29)$$

Resolvendo a eq.3.29 para P_r , resulta em:

$$P_r = \sqrt{\frac{-\mathfrak{S}\Delta - r^2 m^2 \Delta + [(r^2 + a^2)E - aL]^2}{\Delta^2}}$$

$$P_r = \frac{\sqrt{P^2 - \Delta(m^2 r^2 + \mathfrak{S})}}{\Delta}$$

$$P_r = \frac{\sqrt{P^2 - \Delta[m^2 r^2 + \zeta + (L - aE)^2]}}{\Delta}$$

$$P_r = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}$$

Onde:

$$P = E(r^2 + a^2) - La$$

$$R = P^2 - \Delta(m^2 r^2 + \mathfrak{S})$$

$$\mathfrak{S} = \zeta + (L - aE)^2 \quad (3.30)$$

Rearranjando agora a ordem dos termos da eq. 3.28, obtemos:

$$\mathfrak{S} = (P_\theta)^2 + (am \cos \theta)^2 + \left(aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2$$

Resolvendo-a para P_θ :

$$P_\theta = \sqrt{\mathfrak{S} - (am \cos \theta)^2 - \left(aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2}$$

Que pode ser posta sob a forma:

$$P_\theta = \sqrt{\Theta} \quad (3.31)$$

Onde:

$$\Theta = \mathfrak{S} - (am \cos \theta)^2 - \left(aE \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2$$

Ou equivalentemente (fazendo uso da eq.3.30):

$$\Theta = \zeta - \cos^2 \theta \left[a^2(m^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]$$

Finalmente depois de todas estas etapas, podemos agora escrever a ação da seguinte forma:

$$S(\lambda, t, r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} m^2 \lambda - Et + L\phi + \int^\theta \sqrt{\Theta} d\theta + \int^r \left(\frac{\sqrt{R}}{\Delta} \right) dr$$

A partir desta equação a obtenção das equações de movimento se torna trivial, já que as parciais da função de Hamilton-Jacobi com respeito a constantes de movimento são também constantes.

Diferenciando em relação a $\mathfrak{S}$, temos:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} = \int^\theta \frac{d\theta}{2\sqrt{\Theta}} + \int^r \frac{-\Delta dr}{2\sqrt{R}\Delta} = cte.$$

Que nos leva a:

$$\int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int^r \frac{dr}{\sqrt{R}}$$

Em relação a m^2 :

$$\frac{\partial S}{\partial m^2} = \frac{1}{2} \lambda + \int^\theta \frac{-a^2 \cos^2 \theta}{2\sqrt{\Theta}} d\theta + \int^r \frac{-\Delta r^2}{2\Delta \sqrt{R}} dr$$

Que implica em:

$$\lambda = \int^\theta \frac{a^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \int^r \frac{r^2}{\sqrt{R}} dr$$

Em relação a P_ϕ nos conduz a:

$$\phi = \int^\theta \frac{-(aE - L/\sin^2\theta)}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \int^r \frac{a}{\Delta} \left(\frac{P}{\sqrt{R}} \right) dr$$

É importante notar que os sinais das raízes podem ser tomados independentemente, no entanto deve ser mantido o mesmo para todas as equações.

Para fins operacionais estas equações podem ser colocadas na forma abaixo:

$$\rho^2 \dot{\theta} = \sqrt{\Theta} \quad (3.32)$$

$$\rho^2 \dot{r} = \sqrt{R} \quad (3.33)$$

$$\rho^2 \dot{\phi} = -(aE - \frac{L}{\sin^2\theta}) + \frac{a}{\Delta} P \quad (3.34)$$

Capítulo 4

Solução Algébrica para Superfície de uma Estrela em Rotação

Considerando as condições que asseguram o equilíbrio dinâmico da superfície de uma estrela em rotação, e estabelecendo-as dentro do formalismo da relatividade geral, encontra-se como solução para esta superfície uma equação algébrica (implícita em θ) de quarto grau. Em seguida são explorados os seus limites de estabilidade, ou seja, determina-se a região em que esta equação proporciona como solução uma raiz real e monótona. Verifica-se, então, que a raiz de quarto grau se mostra, dentro destes limites de estabilidade, em boa concordância com resultados provenientes de modelos puramente numéricos. Esta raiz pode ainda ser bem aproximada por uma elipse, a menos de uma função de correção determinada. Sendo assim obtida uma expressão algébrica (explícita em θ) para a superfície estelar.

4.1 Introdução ao problema

A solução exata de Kerr para as equações de campo de Einstein é válida para qualquer corpo em rotação que apresente simetria axial. No entanto sua validade se verifica apenas como uma solução externa, ou seja, além da superfície que delimita a transição massa-vácuo. Para a região interna não se determinou ainda solução exata, a exemplo do que acontece para o caso de estrelas estáticas que geram campo de Schwarzschild. Para estas estrelas é possível obter uma solução interna que seja contínua ao campo externo, formando-se, desta maneira, uma única solução (solução de Schwarzschild), válida em todo

espaço além da origem. Apesar de várias tentativas neste sentido terem sido feitas, algo similar não existe ainda para métrica de Kerr, o que deixa toda a descrição da estrutura interna de estrelas em rotação exclusivamente a cargo de cálculos numéricos. Neste ínterim pode-se citar vários modelos numéricos que procuram descrever a estrutura interna destas estrelas de maneiras diferentes.

Como ponto de partida vamos admitir que a validade da solução de Kerr se inicia para pontos infinitesimalmente próximos da superfície estelar. Por este argumento podemos imaginar uma camada da 'atmosfera' estelar que esteja tão perto da própria superfície quanto queiramos, e de tal modo que ela já esteja imersa no campo de Kerr. Como tomamos esta camada por uma superposição limite (extremamente próxima) à superfície estelar em questão, concluímos que sua forma deve ser a mesma desta última. E em consequência, agora se torna possível tratar a superfície de uma estrela em rotação usando-se a métrica de Kerr, sem se preocupar com esta questão da não existência de solução interna.

O objetivo agora é determinar a forma algébrica, se possível, da superfície de uma estrela em rotação cuja solução externa seja a de Kerr. É importante lembrar que estamos interessados apenas em estrelas em equilíbrio, ou seja, aquelas cujo valor das suas grandezas físicas não mude com o tempo, de tal modo que a sua superfície também possa ser considerada em equilíbrio. De uma maneira geral pode-se afirmar que para haver equilíbrio dinâmico em uma superfície estelar, o vetor aceleração gravitacional deve ser ortogonal a mesma, pois caso contrário este induziria deslocamentos em direções diferentes da radial como manifestação de 'forças gravitacionais' (falando-se em termos Newtonianos). Em relatividade geral não se define força gravitacional nestes termos, no entanto podemos aplicar a mesma idéia de equilíbrio, se em vez de vetor gravitacional, nos referirmos à 4-aceleração de um ponto da superfície estelar, que deve também ser ortogonal a mesma para que haja equilíbrio. Caso contrário suas componentes não-radiais induziriam deslocamentos.

4.2 Desenvolvimento da equação algébrica

Tomemos um ponto desta superfície em equilíbrio que gira com velocidade angular w (em relação a um observador no infinito). Recorrendo à simetria axial da métrica, pode-se ver que este ponto descreverá uma trajetória circular caracterizada por coordenadas r e θ

constantes. Baseado nesta restrição temos a 4-velocidade desta partícula dada por :

$$U^\mu = (U^t, 0, U^\phi, 0)$$

Pois : $U^r = dr/d\tau = 0$; $U^\theta = d\theta/d\tau = 0$

Sendo w a velocidade angular, vale a relação: $w = d\phi/dt$

Sabendo ainda que: $U^t = dt/d\tau = A$, podemos escrever :

$$U^\phi = wA$$

Dada a condição de normalização da 4-velocidade:

$$U^\beta U_\beta = -1 \quad \text{ou} \quad U^\beta U^\alpha g_{\beta\alpha} = -1$$

Obtemos a seguinte equação para A :

$$(U^t)^2 g_{tt} + (U^\phi)^2 g_{\phi\phi} + 2U^t U^\phi g_{t\phi} = -1$$

Ou ainda:

$$A^2 = \frac{-1}{g_{tt} + w^2 g_{\phi\phi} + 2w g_{t\phi}}$$

Como o objetivo primeiro é calcular as componentes da 4-aceleração, usaremos diretamente a equação da geodésica, já que esta relaciona cada uma destas componentes àquelas da 4-velocidade, como podemos ver abaixo:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta = 0$$

De acordo com a eq. acima, temos as seguintes relações para as 4-acelerações:

$$\frac{dU^r}{d\tau} = -\Gamma_{tt}^r (U^t)^2 - \Gamma_{\phi\phi}^r (U^\phi)^2 - 2\Gamma_{t\phi}^r U^t U^\phi$$

$$\frac{dU^t}{d\tau} = -\Gamma_{tt}^t (U^t)^2 - \Gamma_{\phi\phi}^t (U^\phi)^2 - 2\Gamma_{t\phi}^t U^t U^\phi$$

$$\frac{dU^\theta}{d\tau} = -\Gamma_{tt}^\theta (U^t)^2 - \Gamma_{\phi\phi}^\theta (U^\phi)^2 - 2\Gamma_{t\phi}^\theta U^t U^\phi$$

$$\frac{dU^\phi}{d\tau} = -\Gamma_{tt}^\phi (U^t)^2 - \Gamma_{\phi\phi}^\phi (U^\phi)^2 - 2\Gamma_{t\phi}^\phi U^t U^\phi$$

Os símbolos de Christoffel acima se relacionam com o tensor métrico e suas derivadas através da equação abaixo:

$$\Gamma_{\beta\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\gamma\beta,\nu} + g_{\gamma\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\gamma})$$

Como o tensor métrico não depende explicitamente nem de ϕ nem de t , é fácil perceber que:

$$\Gamma_{tt}^t = \Gamma_{\phi\phi}^t = \Gamma_{t\phi}^t = 0$$

$$\Gamma_{tt}^\phi = \Gamma_{\phi\phi}^\phi = \Gamma_{t\phi}^\phi = 0$$

Calculando os termos remanescentes de interesse, obtemos :

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{tt,r} \quad \Gamma_{tt}^\theta = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{tt,\theta}$$

$$\Gamma_{t\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{t\phi,r} \quad \Gamma_{t\phi}^\theta = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{t\phi,\theta}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\phi\phi,r} \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}g_{\phi\phi,\theta}$$

Em vista destes últimos resultados as equações para as componentes da 4-aceleração são reescritas da seguinte maneira :

$$\frac{dU^r}{d\tau} = \frac{1}{2}g^{rr}A^2(g_{tt,r} + w^2g_{\phi\phi,r} + 2wg_{t\phi,r})$$

$$\frac{dU^\theta}{d\tau} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}A^2(g_{tt,\theta} + w^2g_{\phi\phi,\theta} + 2wg_{t\phi,\theta})$$

$$\frac{dU^t}{d\tau} = 0$$

$$\frac{dU^\phi}{d\tau} = 0$$

Portanto vemos que apenas duas componentes da 4-aceleração não se anulam. E pelos argumentos anteriores sabemos que, para satisfação das condições de equilíbrio, a 4-aceleração deve se apresentar ortogonalmente à superfície estelar, de tal modo que a sua contração com um vetor tangente a mesma superfície se anule. Deste produto escalar surge a seguinte equação diferencial:

$$dx_r \left(\frac{dU^r}{d\tau} \right) + dx_\theta \left(\frac{dU^\theta}{d\tau} \right) = 0 \quad (4.1)$$

Onde as componentes covariantes de deslocamento sobre a superfície estão dadas por :

$$dx_r = g_{rr} dr$$

$$dx_\theta = g_{\theta\theta} d\theta$$

De maneira que a eq. diferencial acima assume a forma:

$$g^{rr} A^2 (g_{tt,r} + w^2 g_{\phi\phi,r} + 2w g_{t\phi,r}) g_{rr} dr + g^{\theta\theta} A^2 (g_{tt,\theta} + w^2 g_{\phi\phi,\theta} + 2w g_{t\phi,\theta}) g_{\theta\theta} d\theta = 0$$

Deve-se aqui ressaltar o fato que A é uma função de r e θ , de forma que não é possível simplesmente cancelá-la dos dois membros da equação acima, pois em caso de integração em relação às variáveis distintas (r e θ), resultados também distintos seriam obtidos. Embora não admita ser cancelada, esta função pode ser eliminada recorrendo-se ao uso de um fator integrante adequado que a transforme numa equação diferencial exata. Este fator é:

$$A^{-2}$$

Aplicando-o à equação diferencial anterior, obtemos:

$$(g_{tt,r} + w^2 g_{\phi\phi,r} + 2w g_{t\phi,r}) dr + (g_{tt,\theta} + w^2 g_{\phi\phi,\theta} + 2w g_{t\phi,\theta}) d\theta = 0$$

Que de fato é uma equação diferencial exata, já que pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(r, \theta) dr + h(r, \theta) d\theta = 0$$

Enquanto as funções $f(r, \theta)$ e $h(r, \theta)$ satisfazem à relação parcial:

$$\frac{\partial f(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial h(r, \theta)}{\partial r}$$

O fato da relação anterior ser válida indica a existência de uma espécie de função 'potencial' $F(r, \theta)$ cujas derivadas parciais são dadas pelas seguintes relações:

$$\frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} = f(r, \theta)$$

$$\frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} = h(r, \theta)$$

A superfície estelar que procuramos corresponde exatamente à função 'potencial' $F(r, \theta)$ a menos de uma constante de integração k . Procedendo-se como usualmente se faz neste tipo de problema, chega-se à solução :

$$F(r, \theta) = g_{tt} + w^2 g_{\phi\phi} + 2w g_{t\phi} + k$$

A partir das expressões dos termos do tensor métrico presentes acima, dados pelas equações 2.20, 2.22 e 2.24 do capítulo 2, obtemos a eq. abaixo:

$$\frac{-\Delta + a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} + w^2 \sin^2 \theta \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - 2w \frac{2Mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} = k$$

Rearranjando os termos acima e agrupando-os segundo as potências de r , chega-se a seguinte equação :

$$\alpha_1 r^4 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r + \alpha_4 = 0 \quad (4.2)$$

Onde os coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são funções que dependem de M, w, a, θ e que se mostram na forma abaixo:

$$\alpha_1 = w^2 \sin^2 \theta \quad (4.3)$$

$$\alpha_2 = -1 - k - (aw \sin^2 \theta)^2 + 2(aw \sin \theta)^2 \quad (4.4)$$

$$\alpha_3 = 2M(1 - wa \sin^2 \theta)^2 \quad (4.5)$$

$$\alpha_4 = -(1 + k)a^2 \cos^2 \theta + a^4 w^2 (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) \quad (4.6)$$

Chegamos desta maneira a um resultado surpreendente: uma equação de quarto grau para a superfície estelar, implícita em r e θ , a partir da qual diversas análises podem ser feitas. Pode-se começar, por exemplo, derivando as expressões correspondentes ao raio estelar polar e equatorial fazendo $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ respectivamente nas equações precedentes. Para o raio polar temos:

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = -1 - k; \alpha_3 = 2M; \alpha_4 = -(1 + k)a^2$$

Este resultado conduz à equação de segundo grau a seguir :

$$\alpha_2 r_p^2 + \alpha_3 r_p + \alpha_4 = 0$$

Cujas soluções são:

$$r_p = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - (1 + k)^2 a^2}}{(1 + k)}$$

Embora haja duas soluções, apenas uma carrega sentido físico: a de sinal negativo deve ser eliminada por proporcionar raio polar nulo, no limite em que a tende a zero. Neste limite a velocidade angular se torna zero e a estrela tende a uma esfera com raio constante (solução do caso estático). Como não faz sentido ter uma estrela de raio nulo, admite-se apenas a solução de sinal positivo. Portanto para o raio polar vale:

$$r_p = \frac{M + \sqrt{M^2 - (1 + k)^2 a^2}}{(1 + k)} \quad (4.7)$$

O mesmo procedimento deve ser repetido para resolver o raio equatorial (R); fazendo $\theta = \pi/2$ temos para os coeficientes:

$$\alpha_1 = w^2$$

$$\alpha_2 = -1 - k - (aw)^2 + 2(aw)^2$$

$$\alpha_3 = 2M(1 - wa)^2$$

$$\alpha_4 = 0$$

Com estes resultados surge uma equação de terceiro grau, pois $R = 0$ não se constitui solução admissível. Consequentemente temos:

$$\alpha_1 R^3 + \alpha_2 R + \alpha_3 = 0$$

Desenvolvendo a equação anterior e tratando R como um parâmetro, chega-se a uma expressão para o termo da constante de integração $(1 + k)$:

$$(1 + k) = (wR)^2 + (wa)^2 + \frac{2M}{R}(1 - wa)^2 \quad (4.8)$$

Neste ponto é interessante observar que o conhecimento das variáveis M, w, a, R proporciona a determinação do raio polar independentemente da constante de integração, já que esta última também se encontra estabelecida em função destas grandezas. Fisicamente este é um resultado esperado, pois não haveria sentido em admitir uma estrela com raios polares aleatórios (dependentes da escolha de k) uma vez que as suas outras grandezas já se encontram fixadas.

Cabe aqui uma observação importante acerca da coordenada radial (R) que está sendo usada para designar o raio equatorial estelar. Ela representa o valor deste raio nas coordenadas de Boyer-Lindquist, o que não corresponde ao valor geométrico (R_g), real, do raio equatorial estelar. No capítulo 2 foi estabelecida a relação 2.26 entre a coordenada radial geométrica e a coordenada radial de Boyer-Lindquist, aqui reescrita na forma:

$$r_g^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta \quad (4.9)$$

Por meio desta percebemos que o raio polar geométrico e de Boyer-Lindquist têm o mesmo valor, o mesmo não ocorrendo para o raio equatorial, que nestas duas coordenadas se encontra relacionado por:

$$R_g^2 = R^2 + a^2 \quad (4.10)$$

E embora o raio equatorial de Boyer não corresponda ao valor real desta grandeza estelar, continuaremos utilizando este sistema de coordenadas por ser o de uso mais simples para nossos propósitos. Quando houver necessidade de alguma aplicação numérica na superfície estelar, adota-se o raio geométrico usando a equação 4.9.

No capítulo 2 o fator 'a' foi identificado como o momento angular por unidade de massa. Considerando que estamos esperando que nossa superfície apresente um achatamento razoável decorrente da rotação, vamos adotar para este parâmetro a mesma expressão correspondente ao momento angular de um elipsóide de revolução:

$$a = \frac{2}{5} w R_g^2$$

4.3 Limites de estabilidade da equação algébrica

Antes de prosseguirmos na busca de uma solução algébrica para a equação 4.2, trataremos primeiramente de saber dentro de quais limites esta equação se mostra bem comportada, ou seja, proporciona uma raiz real e monótona. A existência desta raiz ao longo apenas desta região limitada indica que existe uma zona de 'estabilidade', pois fora deste intervalo a equação em questão não apresenta solução indetificável com um contorno geométrico. Estamos, portanto, tratando de limites de estabilidade para a equação 4.2. Este estudo pode ser feito de várias maneiras e sob diversas condições. No entanto, nos restringiremos à análise que se mostra algebricamente mais simples e apropriada aos nossos propósitos: análise do intervalo de estabilidade para a massa estelar, tomando as suas outras grandezas (R, w, a) como parâmetro. Iniciaremos impondo algumas condições a grandezas já previamente definidas.

Através da equação 4.8 torna-se notória a condição primordial:

$$1 + k > 0 \quad (4.11)$$

Por outro lado devemos impor que o raio polar estelar seja maior que o horizonte de eventos externo da métrica. Isto assegurará que toda superfície estelar esteja além deste último horizonte, o que restringe a solução de Kerr aos nossos propósitos, ou melhor, reafirma a sua condição de solução externa de uma estrela em rotação; e não de um buraco negro, como se verificaria caso o horizonte se localizasse além das fronteiras de matéria. Portanto fica claro que é fundamental estabelecer:

$$r_p > r_+$$

Que em termos explícitos se mostra como:

$$\frac{M + \sqrt{M^2 - (1+k)^2 a^2}}{(1+k)} > M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

Não há dificuldades para perceber que esta inequação acima é satisfeita pela seguinte condição:

$$1 + k < 1 \quad (4.12)$$

De acordo com as equações 4.11 e 4.12 podemos, então, escrever:

$$\begin{aligned} -1 < k < 0 \\ 0 < 1 + k < 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pelas expressões que foram obtidas para os horizontes de eventos, sabemos que, em se tratando de Kerr, para assegurar-lhes valores reais, a seguinte condição deve ser respeitada:

$$M^2 > a^2 \quad (4.14)$$

Por outro lado para o raio polar ser sempre real, deve valer:

$$M^2 > a^2(1 + k)^2$$

Tendo em vista a condição 4.13, a equação acima se mostra automaticamente válida.

Aplicando agora esta mesma condição à equação 4.8, obtemos a seguinte inequação:

$$0 < (wR)^2 + (wa)^2 + \frac{2M}{R}(1 - wa)^2 < 1$$

Para a qual apenas uma solução possui sentido físico:

$$M < \frac{R}{2} \left[\frac{1 - (aw)^2 - (wR)^2}{(1 - wa)^2} \right]$$

Este resultado nos mostra que a massa apresenta um limite superior; todavia, sabemos por intermédio da equação 4.14, que M também está limitada inferiormente. Deste modo seu intervalo de valores permitidos se apresenta definido por:

$$a < M < \frac{R}{2} \left[\frac{1 - (aw)^2 - (wR)^2}{(1 - wa)^2} \right]$$

Portanto concluímos que para determinados valores do raio equatorial (R), velocidade angular (w), e do momento angular (a) correspondente, existe um certo intervalo admissível para os valores da massa estelar. Este intervalo define os limites de estabilidade estelar em termos desta grandeza, dado que R, M, a estão fixos como parâmetros.

4.4 Confrontação com modelos numéricos

Feito estas considerações acerca dos limites de estabilidade, iremos agora tecer comparações entre a solução fornecida pela equação 4.2 e valores obtidos a partir dos modelos numéricos conhecidos. Como base desta comparação citaremos o artigo 'Rapidly Rotating Neutrons Stars in General Relativity: Realistic Equation of State'¹, onde modelos numéricos foram extensamente utilizados proporcionando obtenção de diversas tabelas contendo as principais grandezas estelares. Claro que no nosso caso não interessa dados de estrutura interna, estamos investigando apenas a geometria da superfície estelar; desta forma nos preocuparemos somente com os dados relevantes a este propósito. Um bom parâmetro para efetuar a comparação entre nosso modelo e os numéricos é o achatamento estelar, definido no artigo¹ citado acima como:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{r_p}{R_g}\right)^2} \quad (4.15)$$

Antes de apresentarmos as tabelas contendo os valores das grandezas estelares, vale esclarecer o seu conteúdo. Novamente são escolhidos, para cada estrela, alguns parâmetros de entrada: R_g, w, M , que são retirados das tabelas do artigo citado acima. Em seguida estes dados são jogados nas equações 4.8 e 4.7, sendo desta forma calculado o raio polar correspondente. A equação 4.15 se encarrega do resultado final procurado. A seguir temos alguns esclarecimentos referentes às tabelas abaixo:

e : achatamento dado pelos modelos numéricos do artigo citado

e^* : achatamento obtido a partir das equações algébricas desenvolvidas

R_g : raio equatorial estelar geométrico

M : massa estelar

w : velocidade angular ($\times 10^{-5}$)

OBS.: As três últimas grandezas acima estão dadas em unidades geometrizadas.

Vale ainda lembrar que entre o raio equatorial geométrico e o de Boyer-Lindquist (R) estão dados pela relação 4.10.

¹Cook, G.B., Shapiro, S.L., Teukoski, S.A., ApJ, 424, 823 (1994)

TABELA I

$w(1/m)$	$M(m)$	$R_g(m)$	e	e^*
3.2834	3385.0	10120	0.51	0.43
3.2482	3386.9	10280	0.52	0.44
3.2536	3389.7	10380	0.53	0.45
3.3228	3415.3	10670	0.57	0.47
3.4430	3420.3	11070	0.62	0.52
3.5480	3439.3	11490	0.66	0.56
3.6236	3456.2	11910	0.70	0.60
3.6873	3475.2	12540	0.75	0.65
3.7130	3485.7	13470	0.80	0.70

TABELA II

$w(1/m)$	$M(m)$	$R_g(m)$	e	e^*
0.0000	3151.2	9411	0.00	0.00
1.2615	3163.3	9744	0.21	0.15
1.9423	3182.5	10050	0.34	0.25
2.4604	3205.5	10400	0.44	0.34
2.8359	3229.2	10780	0.53	0.43
3.1029	3252.0	11200	0.60	0.50
3.2848	3272.6	11640	0.66	0.55
3.4036	3290.5	12100	0.70	0.60
3.4753	3304.5	12570	0.74	0.63
3.5290	3318.8	13667	0.80	0.70

TABELA III

$w(1/m)$	$M(m)$	$R_g(m)$	e	e^*
3.2692	2610.9	9060	0.51	0.41
3.2099	2612.0	9243	0.52	0.44
3.2047	2613.5	9351	0.53	0.45
3.2128	2615.6	9469	0.54	0.46
3.2756	2632.6	9820	0.58	0.49
3.4333	2641.7	10630	0.66	0.57
3.5040	2653.7	11240	0.71	0.62
3.5430	2663.4	11980	0.76	0.67
3.5536	2667.0	12272	0.80	0.72

TABELA IV

w(1/m)	M(m)	R _g (m)	e	e*
0.0000	2067.8	16750	0.00	0.00
0.4867	2070.0	17140	0.27	0.23
0.7164	2073.0	17700	0.40	0.33
0.8653	2075.9	18310	0.49	0.41
0.9736	2078.7	18980	0.56	0.48
1.0466	2081.1	19650	0.62	0.53
1.1048	2083.6	20430	0.66	0.58
1.1452	2085.5	21250	0.70	0.62
1.1785	2087.6	22420	0.74	0.67
1.1974	2089.9	24610	0.80	0.74

Por estas tabelas acima percebe-se que a discrepância dos nossos resultados em relação aos valores provenientes dos modelos numéricos gira em torno de 20%. Considerando-se o fato de que entre os resultados de modelos numéricos diferentes se verifica uma margem de discordância de mais ou menos 10%, podemos considerar a concordância observada bastante razoável.

A equação 4.2 de quarto grau encontrada para a superfície estelar, muito embora um tanto estranha, dentro dos limites de estabilidade estudados apresenta uma solução real positiva, cujo comportamento em função da variável angular θ se mostra muito parecido com o de uma elipse.

Como esta solução algébrica é muito complicada, por tratar-se de uma raiz de quarto grau, desejamos encontrar uma outra equação $r(\theta)$ (explícita em θ) que seja mais simples e que se ajuste da melhor maneira possível à solução anterior. Procederemos desta forma a uma confrontação numérica envolvendo a raiz de quarto grau da equação 4.2 e os valores de uma função algébrica tomados para vários θ . Esta função é dada por uma elipse que possui R e r_p como eixos maior e menor respectivamente, ou seja, ajusta-se uma elipse por estes pontos e observa-se qual a concordância obtida para ângulos entre 0 e $\pi/2$.

A tabela abaixo contém estes valores para duas estrelas especificadas pelas grandezas M, w, a, R , como está dado a seguir:

Estrela I : $M = 3000m$, $w = 4 \cdot 10^{-5}m^{-1}$, $R = 10000m$, $a = 1.6 \cdot 10^3m$

Estrela II: $M = 4080m$, $w = 1.49 \cdot 10^{-5}m^{-1}$, $R = 15240m$, $a = 1.39 \cdot 10^3m$

Onde:

S(m): raiz da equação de quarto grau

E(m): valor da equação da elipse ajustada

TABELA V

		ESTRELA I		ESTRELA II	
tetha(rad)	tetha(grau)	S(m)	E(m)	S(m)	E(m)
0	0	8393.8	8393.8	14294.6	14294.6
0.17453	10	8414.9	8431.4	14316.2	14320.6
0.34906	20	8479.1	8542.7	14380.3	14396.2
0.52360	30	8589.2	8722.7	14483.8	14450.1
0.69813	40	8749.6	8958.3	14620.8	14663.4
0.87266	50	8965.0	9232.1	14780.7	14827.2
1.04720	60	9237.6	9513.7	14947.0	14986.2
1.22173	70	9555.0	9763.4	15096.3	15119.6
1.39626	80	9859.0	9937.4	15201.7	15208.7
1.57080	90	100000.0	10000.0	15240.0	15240.0

Tomando esta tabela como referência, observamos que a maior diferença ocorre no intervalo entre 30 e 60 graus, ou seja, a curva $r(\theta)$ que procuramos, corresponde à elipse ajustada, menos uma correção, já que os dados da elipse se mostram sempre maiores. Alguns cuidados especiais devem ser levados em consideração na escolha desta função de correção:

Deve ser nula em $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, pois desta forma não altera os pontos de ajuste da elipse (R e r_p) em que ela concorda com a curva real.

Deve crescer com θ até um certo ponto e depois decrescer até se anular novamente em $\theta = \pi/2$.

Deve ser simétrica em relação ao plano equatorial e se comportar da mesma forma nos quatro quadrantes.

Uma função simples que satisfaz estas três exigências, está dada por:

$$\sin^2 2\theta$$

A elipse que estamos considerando tem no seu centro a origem do nosso sistema de coordenadas, portanto a sua equação está dada por:

$$Elipse(\theta) = \frac{p}{\sqrt{1 - q \sin^2 \theta}} \quad (4.16)$$

As constantes p e q são calculadas da seguinte forma:

$$\theta = 0 \implies r_p = p$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow R = \frac{p}{\sqrt{1-q}}$$

E portanto:

$$q = 1 - \left(\frac{r_p}{R}\right)^2$$

Tendo determinado p e q a partir dos pontos de ajuste (raios polar e equatorial), podemos escrever então a nossa função aproximada $r(\theta)$:

$$r(\theta) = \frac{p}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} + \delta (\sin^2 2\theta) \quad (4.17)$$

Onde δ corresponde a uma constante de ajuste, pequena em relação a r_p , a ser determinada para cada caso específico. Para calcular esta constante, substituiremos a equação 4.17 na equação 4.2, obtendo:

$$\left[\frac{p}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} + \delta (\sin^2 2\theta) \right]^4 w^2 \sin^2 \theta + \left[\frac{p}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} + \delta (\sin^2 2\theta) \right]^2 \alpha_2 + \left[\frac{p}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} + \delta (\sin^2 2\theta) \right] \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \quad (4.18)$$

Onde os coeficientes $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são funções de θ dadas pelas equações 4.4, 4.5 e 4.6. Desenvolvendo as potências acima e desprezando termos em potência igual ou maior que δ^2 , temos:

$$\begin{aligned} & \delta \left[\frac{4p^3 w^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \theta}{(1-q \sin^2 \theta)^{3/2}} + \frac{2p \sin^2 2\theta}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} (-1-k+2a^2 w^2 \sin^2 \theta - a^2 w^2 \sin^4 \theta) + \alpha_3 (\sin^2 \theta) \right] = \\ & = \frac{p^2 (1+k-2a^2 w^2 \sin^2 \theta + a^2 w^2 \sin^4 \theta)}{(1-q \sin^2 \theta)} - \frac{p^4 w^2 \sin^2 \theta}{(1-q \sin^2 \theta)^2} + \frac{2Mp (1+a^2 w^2 \sin^4 \theta - 2wa \sin^2 \theta)}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} \\ & \quad - \frac{2Mp (1+a^2 w^2 \sin^4 \theta - 2wa \sin^2 \theta)}{\sqrt{1-q \sin^2 \theta}} - \alpha_4 \end{aligned}$$

Portanto obtemos uma equação do tipo:

$$\delta = \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

Como δ é uma constante por definição, deve apresentar um único valor, independentemente de θ , embora isto não se mostre evidente a partir da equação acima. A questão é que o ajuste efetuado não é completamente exato, de modo a dependência em θ não desaparece ao longo das substituições. Em vista deste fato, em vez de escolher um valor de θ qualquer, optamos por efetuar um processo de limite em que θ tende a zero. Temos assim:

$$\delta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{A(\theta)}{B(\theta)} \right]$$

Aplicando L'Hospital duas vezes, somem as indefinições, e chegamos ao seguinte resultado:

$$\delta = \frac{(p^2q - a^2)(1 + k) - p^4w^2 - 2p^2w^2a^2 + 4Mpwa - Mpq - a^4w^2}{8[M - p(1 + k)]}$$

Efetuando o cálculo desta constante para a Estrela I da Tabela V, o valor obtido foi $\delta = -211.5$, valor este dentro do esperado (pela análise dos dados de tabela).

Capítulo 5

Cálculo de Desvios e Deformações da Imagem de uma Estrela Distante em Rotação

Partindo das equações de movimento para fótons no campo de Kerr (estudadas no capítulo 3), da equação explícita em θ para a forma da superfície estelar (estabelecida no capítulo 4), e das condições iniciais (a serem determinadas) com as quais os fótons deixam a superfície estelar, iremos calcular os desvios e deformações sofridos pela imagem. Desenvolveremos, para este objetivo, as equações de retas assintóticas às trajetórias dos fótons analisados.

5.1 Equações de Movimento para Fótons no Campo de Kerr

No capítulo 3 estudamos as equações de movimento para partículas-teste quaisquer no campo de kerr. Para aplicá-las a fótons, basta fazer $m = 0$ em todas aquelas equações, de modo que obtemos:

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \sqrt{\Theta} \quad (5.1)$$

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{R} \quad (5.2)$$

$$\rho^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = -(aE - \frac{L}{\sin^2\theta}) + \left(\frac{a}{\Delta}\right) P \quad (5.3)$$

Onde estão definidas as funções abaixo:

$$\Theta = \zeta - \text{Cos}^2\theta \left(-a^2 E^2 + \frac{L^2}{\text{Sin}^2\theta} \right) \quad (5.4)$$

$$R = P^2 - \Delta \left((L - aE)^2 + \zeta \right) \quad (5.5)$$

$$\mathfrak{S} = P_\theta^2 + \text{Cos}^2\theta \left(-a^2 E^2 + \frac{L^2}{\text{Sin}^2\theta} \right) \quad (5.6)$$

$$P = E(r^2 + a^2) - La \quad (5.7)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad (5.8)$$

$$\mathfrak{S} = \zeta + (L - aE)^2 \quad (5.9)$$

Estas equações 5.1, 5.2 e 5.3, também podem ser expressas em sua forma integral:

$$\int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int^r \frac{dr}{\sqrt{R}} \quad (5.10)$$

$$\phi = \int^\theta \frac{(-aE + L/\sin^2\theta)d\theta}{\sqrt{\Theta}} + \int^r \frac{a}{\Delta} \left(\frac{P}{\sqrt{R}} \right) dr \quad (5.11)$$

5.2 Análise visual para um observador distante situado no plano equatorial da estrela

5.2.1 Fótons Equatoriais

Como ponto inicial, vamos abordar os fótons que partem do plano equatorial estelar com componente de momento nula na direção de θ , e que portanto permanecem para sempre confinados no mesmo plano de partida ($\theta = \pi/2$). Isto é possível porque P_θ neste caso assume a condição de constante de movimento nula, como já foi demonstrado na primeira seção do capítulo 3. Levando em consideração estas restrições, chegamos às seguintes simplificações para as expressões 5.4, 5.5, 5.6, e 5.8 da seção anterior:

$$P_\theta = P^\theta = 0$$

$$\Theta = \zeta = 0$$

$$\rho^2 = r^2$$

$$R = P^2 - \Delta (L - aE)^2 \quad (5.12)$$

Desenvolvendo a equação 5.12 e isolando as potências de r , obtemos:

$$R = E^2 r^4 + r^2(2E^2 a^2 - L^2 - a^2 E^2) + r(2ML^2 - 4MaLE + 2Ma^2 E^2) \quad (5.13)$$

Substituindo esta expressão na equação 5.2, temos:

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \sqrt{E^2 r^4 + r^2(E^2 a^2 - L^2) + r(2ML^2 - 4MaLE + 2Ma^2 E^2)} \quad (5.14)$$

Da mesma maneira, podemos aplicar o mesmo procedimento para a equação 5.3, alcançando o resultado abaixo:

$$\rho^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{Lr^2 + r(2MaE - 2ML)}{(r^2 - 2Mr + a^2)} \quad (5.15)$$

Usando a regra diferencial

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr}$$

para as equações 5.15 e 5.14, chegamos ao seguinte resultado:

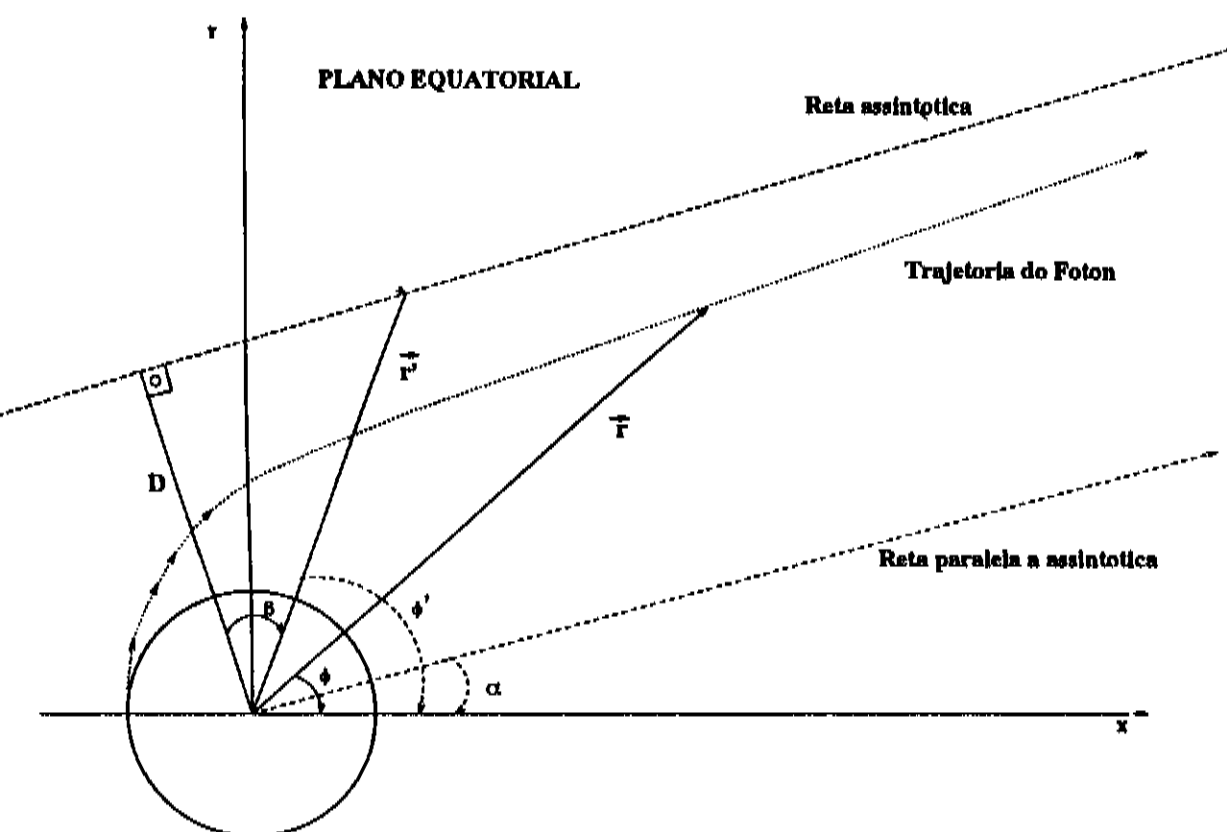
$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{Lr^2 + r(2MaE - 2ML) / (r^2 - 2Mr + a^2)}{\sqrt{E^2 r^4 + r^2(E^2 a^2 - L^2) + r(2ML^2 - 4MaLE + 2Ma^2 E^2)}} \quad (5.16)$$

Através desta equação torna-se trivial a obtenção da variação da coordenada ϕ em relação a um deslocamento radial, pois temos uma equação diferencial já separada em termos de uma função de r e em ϕ . Porém o $\Delta\phi$ resultante fica na dependência de uma integração numérica, visto que uma forma algébrica para a integral desta função não foi encontrada e tão pouco acredita-se possível fazê-lo.

Estamos interessados na busca de um meio que nos indique o 'desvio' destes fótons para um observador distante. Contudo não podemos nos restringir à prática de resoluções numéricas, uma vez que estas subndem a necessidade de um novo cálculo para cada mudança de parâmetro adotada. Desta forma se tomarmos uma nova massa estelar (M) ou desejarmos analisar uma outra estrela de raio equatorial (R) diferente, todos os cálculos devem ser realizados novamente. Além da inconveniência decorrente, existe uma grande possibilidade de que intervalos de variação destes parâmetros, para os quais correspondam resultados não convencionais, passem totalmente despercebidos, acarretando numa análise incompleta de cada caso em si.

Exige-se aqui que uma descrição mais específica seja feita acerca do que realmente interessa. Em primeiro lugar é da maior relevância ressaltar que o resultado final que procuramos não é o $\Delta\phi$ referente ao desvio sofrido por um fóton que parte do equador estelar e se deixa levar pelas equações de campo. O que este fator nos diz é o quanto ϕ variou a partir de dado ϕ_0 inicial, ou seja, estabelece a posição angular final para um dada posição radial terminal. No entanto esta informação se mostra incapaz de conduzir-nos diretamente ao que queremos: o deslocamento do ponto da imagem transmitida por este fóton para um observador distante. Isto é que de fato convém calcular, e que obviamente está relacionado com o desvio $\Delta\phi$ dado pela equação 5.16. A maneira pela qual podemos chegar a este desvio de imagem é através da obtenção da direção da reta assintótica para a qual tende a geodésica deste fóton quando o afastamento da fonte do campo se acentua. A inclinação desta reta assintótica é que indica diretamente, ao observador distante, o desvio do ponto-imagem em relação à posição real da estrela. A conclusão de que estas trajetórias se manifestam assintoticamente como retas é uma consequência direta da dependência do 'dragging effect' com a distância radial ser em r^{-3} , o que evidencia que praticamente toda deflexão é sofrida antes da luz se afastar consideravelmente da estrela.

Agora que deixamos mais claro nosso objetivo, mostraremos como calcular a deflexão lateral, sofrida pela imagem de uma estrela, a partir de fótons radiais equatoriais que partem paralelamente ao plano equatorial. Considere então a figura a seguir:



Onde ilustramos o plano equatorial de uma estrela, a possível trajetória de um fóton que satisfaça as exigências citadas acima, e a sua correspondente reta assintótica. Por esta figura vemos que a equação desta reta é dada por:

$$\vec{D} = \vec{r'} \cos(\beta) \quad (5.17)$$

Onde o ângulo β está dado pela seguinte relação:

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \phi' \quad (5.18)$$

De modo que vale:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \sin(-\alpha + \phi') \\ D &= r' \sin(-\alpha + \phi') \\ r' &= \frac{D}{\sin(-\alpha + \phi')} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Tomando a derivada da coordenada r' em relação à coordenada ϕ' , temos:

$$\frac{dr'}{d\phi'} = \frac{D \cos(-\alpha + \phi')}{\sin^2(-\alpha + \phi')} \quad (5.20)$$

Substituindo agora 5.19 em 5.20, temos:

$$\frac{dr'}{d\phi'} = D \left(\frac{r'}{D} \right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r'} \right)^2} \quad (5.21)$$

Esta equação acima nos proporciona a inclinação da reta assintótica em cada ponto r' . Para grandes distâncias devemos impor que esta derivada acima seja igual à derivada da própria geodésica. Sem imposição desta condição nada nos garante que esta reta seja propriamente assintótica à trajetória da luz. Portanto devemos ter:

$$\frac{dr'}{d\phi'} = \left[\frac{dr}{d\phi} \right]_{\text{geodésica}} \quad \text{Para } r \rightarrow \infty \quad (5.22)$$

A condição acima é equivalente à equação a seguir:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr'}{d\phi'} \frac{d\phi}{dr} \right) = 1 \quad (5.23)$$

Usando agora a equação 5.21 no limite acima, temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r^2}{D} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{r} \right)^2} \frac{d\phi}{dr} \right) = 1$$

Passando D para o outro lado e tomando o limite, obtemos então:

$$D = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) \quad (5.24)$$

Que é exatamente o que desejamos obter, ou seja, este fator D equivale à distância ao centro da estrela com a qual um observador longínquo pensa enxergar de onde partiu o fóton equatorial. Uma outra observação interessante se refere ao fato desta dedução acima permanecer válida para qualquer ângulo de inclinação com o qual o fóton deixe o equador estelar, ou seja, passando desde o caso radial até tangencial, a equação 5.24 se mantém válida. O mesmo pode ser dito referentemente à posição de saída do fóton do círculo equatorial: não altera absolutamente nada, uma vez que existe simetria em ϕ .

Agora que estabelecemos o que deve ser calculado, voltemos à equação 5.16, elevando-a ao quadrado e em seguida extraindo sua raiz, o que a conduz a sua forma abaixo:

$$\frac{d\phi}{dr} = \sqrt{\frac{L^2 r^3 + 4ML(aE - L)r^2 + 4M^2(L - aE)^2 r}{(r^2 - 2Mr + a^2)^2 (E^2 r^3 + r(E^2 a^2 - L^2) + 2M(L - aE)^2)}}$$

Por maior comodidade escreveremos a equação acima compactamente:

$$\frac{d\phi}{dr} = \sqrt{\frac{L^2 r^3 + \alpha r^2 + \beta r}{(r^2 - 2Mr + a^2)^2 (E^2 r^3 + \gamma r + \varepsilon)}} \quad (5.25)$$

Onde as constantes estão dadas pelas equações 3.11, 3.12, 3.13 e 3.14 da seção 3.1:

$$\alpha = 4ML(aE - L)$$

$$\beta = 4M^2(L - aE)^2$$

$$\varepsilon = 2M(L - aE)^2$$

$$\gamma = (E^2 a^2 - L^2)$$

Demonstrando assim total equivalência à equação obtida anteriormente para este caso na primeira seção do capítulo 3.

Vamos agora substituir a equação 5.25 na equação 5.24 para finalmente determinar a deflexão procurada para este caso:

$$D = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \sqrt{\frac{L^2 r^3 + \alpha r^2 + \beta r}{(r^2 - 2Mr + a^2)^2 (E^2 r^3 + \gamma r + \varepsilon)}} \right)$$

Calculando este limite obtemos simplesmente:

$$D = \frac{L}{E} \quad (5.26)$$

A razão L/E depende apenas dos parâmetros estelares (M, R, a) e da condição inicial de partida do fóton da superfície estelar. Faremos agora um estudo para cada condição inicial que se mostrar relevante.

Caso 1: Fótons de saída radial

A importância desta família de fótons está relacionada ao fato deles terem sua deflexão associada ao desvio lateral com o qual a imagem do anel central estelar se desloca, ou seja, conduz à obtenção da distância entre o centro da imagem anelar formada e o centro geométrico da estrela no espaço. O fóton equatorial radial que atinge o observador distante transmite para este a posição central da imagem do anel equatorial da estrela.

Dado um movimento inicialmente radial na superfície estelar, podemos transmitir esta condição à equação de interesse, impondo que:

$$\left[\frac{d\phi}{dr} \right]_{R_{eq}} = 0 \quad (5.27)$$

Aplicando a condição 5.27 à equação 5.25, resulta em:

$$L^2 R_{eq}^3 + \alpha R_{eq}^2 + \beta R_{eq} = 0$$

Que é uma equação de segundo grau em L/E . A sua resolução leva a seguinte razão:

$$\frac{L}{E} = \frac{-2Ma}{R_{eq} - 2M} \quad (5.28)$$

O que nos leva a:

$$D = \frac{-2Ma}{R_{eq} - 2M} \quad (5.29)$$

Esta relação acima relaciona parâmetros estelares com as constantes de movimento do fóton, o que inicialmente pode parecer estranho, uma vez que se tratam de duas entidades aparentemente desconexas. No entanto, embora a priori independentes, elas acabam sendo ‘atadas’ pelo fato da saída do fóton ser radial a uma superfície em rotação, pois para isto ser possível deve existir uma relação compensatória entre L e E que aniquile movimento angular no instante de partida.

Uma observação interessantíssima acerca deste primeiro caso, concerne ao fato de que estabelecida a condição 5.28, não nos importa em absoluto saber de qual posição angular o fóton radial tem que partir para atingir nosso observador equatorial situado em algum ângulo Φ_{obs} . Isto vem do fato da equação 5.28 não depender da posição inicial, assumindo o

mesmo valor para todos os fótons radiais possíveis. Esta é uma consequência da existência de simetria em relação à coordenada ϕ . Deste modo, a questão da determinação exata da posição inicial adequada para que fóton radial evolua conforme a equação 5.25 e atinja nosso observador, perde todo sentido, pois qualquer que seja esta posição, o fóton terá comunicado a mesma deflexão. E finalmente, considerando nosso observador como sendo de caráter pontual, ele será atingido por apenas um fóton radial, uma vez que a condição de interseção está assegurada para apenas o fóton que saia da posição angular apropriada para tal. E cabe a este fóton a missão de formar o ponto central da imagem do anel equatorial estelar.

A equação 5.28 abre uma possibilidade instigante, caso estejamos tratando com uma estrela cujo raio equatorial de Boyer-Lindquist tenda ao dobro da sua massa ($R \rightarrow 2M$), então teremos um caso de desvio extremamente elevado da imagem do plano equatorial estelar em relação sua posição real.

Caso 2: Fóton de saída tangencial

Esta família de fótons se mostra importante por ser responsável pela determinação da extensão do plano equatorial da imagem, já que extremos de imagens são sempre determinados por feixes de luz que partem tangencialmente da superfície emissora de luz.

A condição de partida tangencial está dada por:

$$\left[\frac{d\phi}{dr} \right]_{R_{eq}} = \infty$$

A imposição desta condição à equação 5.25 nos leva simplesmente a:

$$(E^2 R_{eq}^3 + \gamma R_{eq} + \epsilon) = 0$$

Uma vez que

$$(r^2 - 2Mr + a^2) = 0$$

não proporciona condição alguma relacionando L/E . A solução para a equação resultante (de segundo grau em L/E) é dada por:

$$\frac{L}{E} = \frac{-2Ma \pm \sqrt{4M^2a^2 + (R_{eq} - 2M)(R_{eq}^3 + a^2R_{eq} + 2Ma^2)}}{R_{eq} - 2M} \quad (5.30)$$

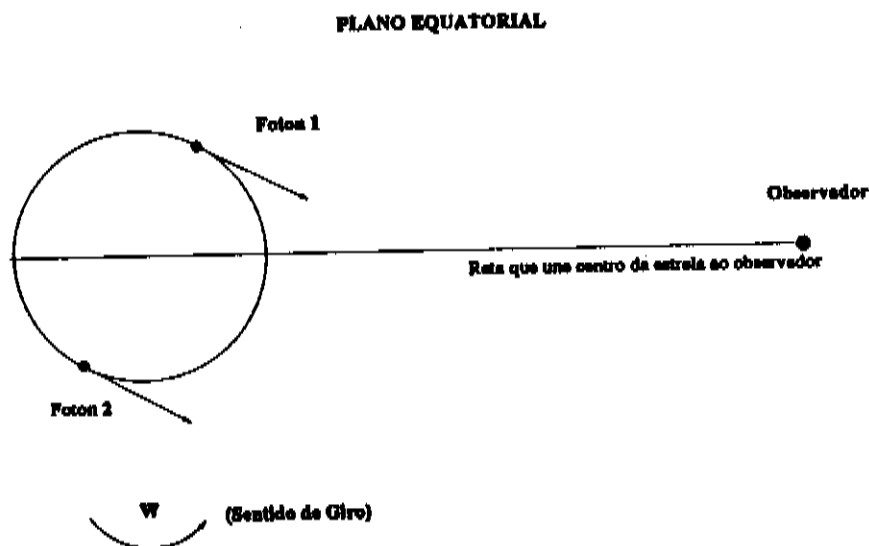
A dualidade de sinal na equação acima evidencia uma propriedade da métrica de Kerr: a manifestação do 'draggin effect' no sentido de rotação definido pela fonte, de modo

que indica que dois fótons tangenciais ao círculo equatorial e que partem do mesmo ponto, mas em sentidos contrários, irão sofrer desvios diferentes, traduzidos pelas suas duas raízes:

$$\frac{L}{E(+)} \quad \frac{L}{E(-)}$$

Este fato pode ser facilmente entendido em termos do 'dragging effect', que por existir num sentido definido, atua acentuando a variação geométrica da coordenada ϕ do fóton tangencial que parte favoravelmente ao sentido de rotação da fonte. Ao mesmo tempo este efeito se encarrega de amortecer a variação angular $\Delta\phi$ do fóton que inicia seu movimento em sentido contrário. É ainda interessante observar que a média das duas raízes acima equivale ao mesmo valor encontrado para o caso radial. O que de fato vem a confirmar a idéia que fótons tangenciais conduzem a extremos.

Ao contrário do caso radial, onde apenas um fóton pode atingir o observador equatorial, no caso tangencial esta interseção se mostra possível para dois fótons de sentido oposto e que partam de posições angulares diferentes. Isto em decorrência da desigualdade de desvio observada acima. Se esta não existisse, os dois fótons deveriam partir de posições angulares simétricas em relação à reta que une o centro estelar ao observador. No entanto, na realidade os dois se mostram assimétricos em relação esta reta, como ilustrado na figura abaixo:



Como dissemos no início desta seção, o fator D proveniente destes fótons nos leva aos limites da imagem do equador estelar. Portanto tomando a diferença entre as duas

raízes da equação 5.28, obtemos a extensão espacial equatorial da imagem estelar, dada por:

$$\frac{L}{E_{(+)}} - \frac{L}{E_{(-)}} = 2 \frac{\sqrt{4M^2a^2 + (R_{eq} - 2M)(R_{eq}^3 + a^2R_{eq} + 2Ma^2)}}{R_{eq} - 2M} \quad (5.31)$$

Outra análise interessante é obtida quando o fator $R_{eq} - 2M$ tende a zero, levando a equação acima ao seguinte valor:

$$\frac{4Ma}{R_{eq} - 2M} \quad (5.32)$$

Que equivale a duas vezes o fator radial dado pela equação 5.29.

E novamente surge um efeito interessante: para o raio equatorial tendendo ao dobro do valor da massa, a extensão da imagem do anel equatorial cresce ao infinito, tornando-se tanto maior quanto mais próximo o valor do raio estiver do dobro da massa. Portanto quando a massa da estrela coincide de ser igual à metade do raio equatorial, a sua imagem equatorial se apresenta como uma longa faixa de luz. Lembrando-se do fato do resultado 5.32 ser equivalente a duas vezes o desvio sofrido por fótons radiais, e destes fótons serem responsáveis pelo estabelecimento do ponto central da imagem do anel, então se conclui que a estrela em sua posição real ocupa uma das extremidades da faixa visual enxergada pelo observador.

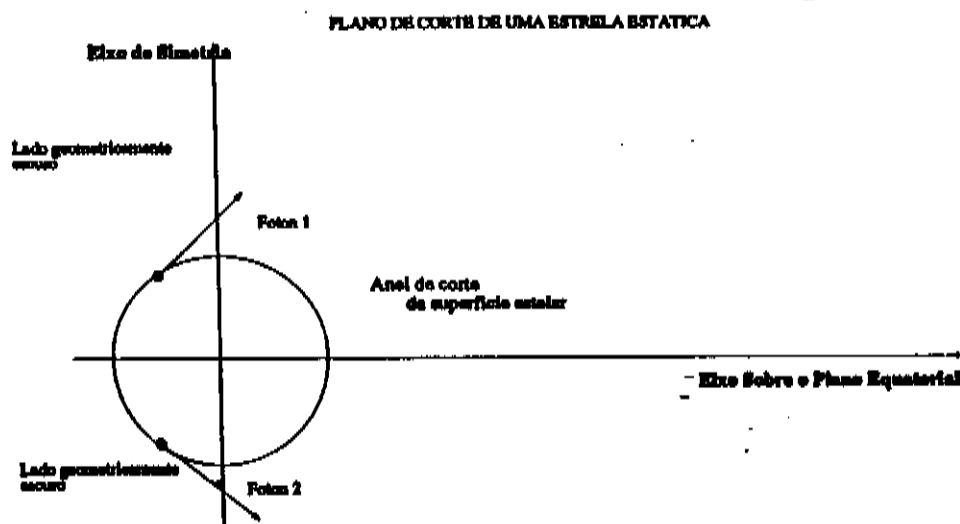
Caso 3: Fótons com ângulo de saída qualquer

Este último caso asseguraria a generalização dos nossos procedimentos para qualquer fóton cujo ângulo de partida estivesse entre 0 e $\pi/2$ em relação à direção radial. No entanto já sabemos que para determinar a extensão da imagem e o seu deslocamento em relação à posição real da estrela, não precisamos de fótons além dos radiais e tangenciais. Portanto concluímos que fótons que partem em condições iniciais generalizadas não acrescentam à imagem nada mais que pontos intermediários entre os extremos já conhecidos. Desta forma não nos ocuparemos deste caso.

5.2.2 Fótons não-equatoriais

Até o presente momento estivemos limitados ao estudo de fótons cujas geodésicas estejam totalmente confinadas ao plano equatorial estelar, um caso relativamente simples por esta restrição ao movimento. No entanto diversos são os fótons oriundos de outras

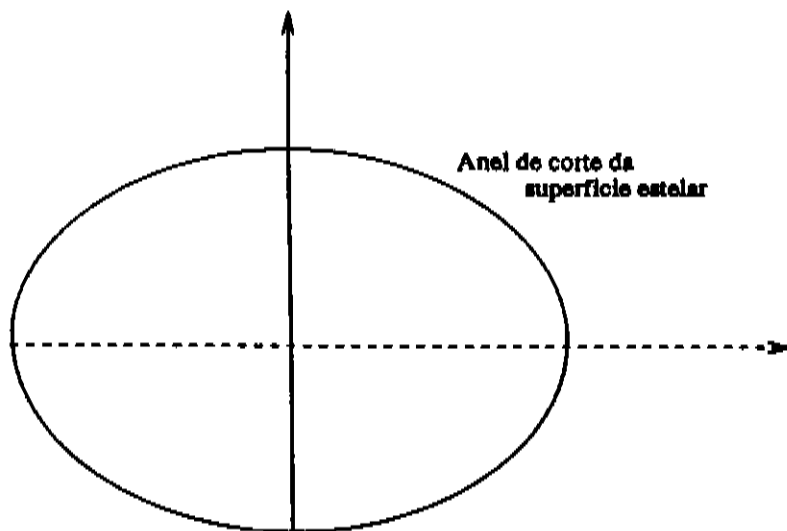
regiões estelares que se mostram em condições apropriadas para interceptarem nosso observador equatorial. Para o caso de uma estrela estática, sem rotação em torno do próprio eixo, todo o lado de sua superfície voltado para o observador pode ser enxergado. Além disto uma pequena parte do lado 'escuro' também se tornaria visível, pois os fótons que partem das proximidades dos pólos são deflexionados pelo campo da estrela no sentido do observador. Vide figura a seguir:



No caso de uma estrela em rotação esta descrição se torna mais complexa, já que se abre a possibilidade de fótons oriundos de qualquer ponto do lado diametralmente oposto ao observador conseguirem alcançá-lo. Isto em decorrência da deflexão da coordenada θ estar regida agora pela equação 5.10, não se resumindo mais apenas ao efeito geométrico observado em Schwarzschild. Sendo desta maneira admissível que fótons que partam do lado geometricamente oposto, sofram um desvio $\Delta\theta$ maior que $\pi/2$ se tornando visíveis ao observador. Sem dúvida nos deparamos com uma situação mais complicada, onde uma enorme gama de possibilidades se coloca digna de interesse.

A exemplo do que foi feito no caso equatorial, precisamos tratar a questão de uma forma que traga simplificações operacionais. Primeiramente devemos nos restringir à busca de extremos, pois se conhecermos os extremos da imagem, torna-se sem sentido a procura por pontos intermediários. No caso equatorial toda região de relevância se resumiu a um círculo, motivação esta que nos leva a estabelecer um plano de corte (com $\phi = cte.$) que passe pelo eixo de simetria axial da estrela. A interseção da superfície estelar com este plano de corte equivale a uma curva aproximadamente elipsoidal, mostrada pela figura a seguir:

PLANO DE CORTE CONTENDO EIXO DE SIMETRIA



Como visto anteriormente, a equação desta curva é dada por:

$$r(\theta) = \frac{P}{\sqrt{1 - q \sin^2 \theta}} + \delta \sin^2 \theta \quad (5.33)$$

Tomemos agora os fótons que partem deste anel com movimento inicialmente paralelo ao plano de corte, ou seja, aqueles que não apresentam qualquer componente na direção ϕ na posição inicial. Esta condição pode ser expressa do modo:

$$P^\phi = 0$$

Levando-se em consideração a seguinte relação para P^ϕ :

$$P^\phi = g^{\phi\phi} L - g^{\phi t} E$$

Obtemos esta condição para L/E em termos da posição angular de saída θ_i :

$$\frac{L}{E} = \frac{-2Mar(\theta_i) \sin^2 \theta_i}{r^2(\theta_i) - 2Mr(\theta_i) + a^2 \cos^2 \theta_i} \quad (5.34)$$

Que se mostrará útil nos cálculos subseqüentes.

As equações 5.5 e 5.4 para θ genérico estão dadas na forma abaixo:

$$R = P^2 - (r^2 - 2Mr + a^2) \left[\zeta + (L - aE)^2 \right]$$

$$\Theta = \zeta - \cos^2 \theta \left[-a^2 E^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]$$

Desenvolvendo-as, e depois agrupando os termos segundo as potências de r :

$$R = E^2 r^4 + (\gamma - \zeta) r^2 + (\varepsilon + 2M\zeta) r - a^2 \zeta$$

$$\Theta = \zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L^2 \cot^2 \theta$$

Substituindo estas expressões acima na equação 5.10, temos finalmente a equação integral que estabelece a variação em θ com um deslocamento em r :

$$\int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L^2 \cot^2 \theta}} = \int^r \frac{dr}{\sqrt{E^2 r^4 + (\gamma - \zeta) r^2 + (\varepsilon + 2M\zeta) r - a^2 \zeta}} \quad (5.35)$$

Que na sua forma diferencial está dada por:

$$\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{E^2 r^4 + (\gamma - \zeta) r^2 + (\varepsilon + 2M\zeta) r - a^2 \zeta}{\zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L^2 \cot^2 \theta}} \quad (5.36)$$

5.2.3 Fótons tangenciais

Dentre os fótons que partem do anel estelar com $P^\phi = 0$, vamos considerar aqueles que são inicialmente tangenciais, ou seja, na posição angular de partida (θ_i) apresentam inclinação igual a da reta tangente à superfície 5.33 no mesmo ponto. Denominando a derivada desta função de $f(\theta)$, temos:

$$f(\theta) = \frac{dr}{d\theta} = \frac{pq \sin 2\theta}{2(1 - q \sin^2 \theta)^{3/2}} + 2\delta \sin 4\theta \quad (5.37)$$

Para impor a condição tangencial, na posição angular (θ_i) de saída deve ser satisfeita a igualdade:

$$f(\theta_i) = \sqrt{\frac{E^2 r^4(\theta_i) + (\gamma - \zeta) r^2(\theta_i) + (\varepsilon + 2M\zeta) r(\theta_i) - a^2 \zeta}{\zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta_i - L^2 \cot^2 \theta_i}}$$

Chamando a função $r(\theta_i)$ de $F(\theta_i)$, elevando ao quadrado e isolando o termo ζ , temos:

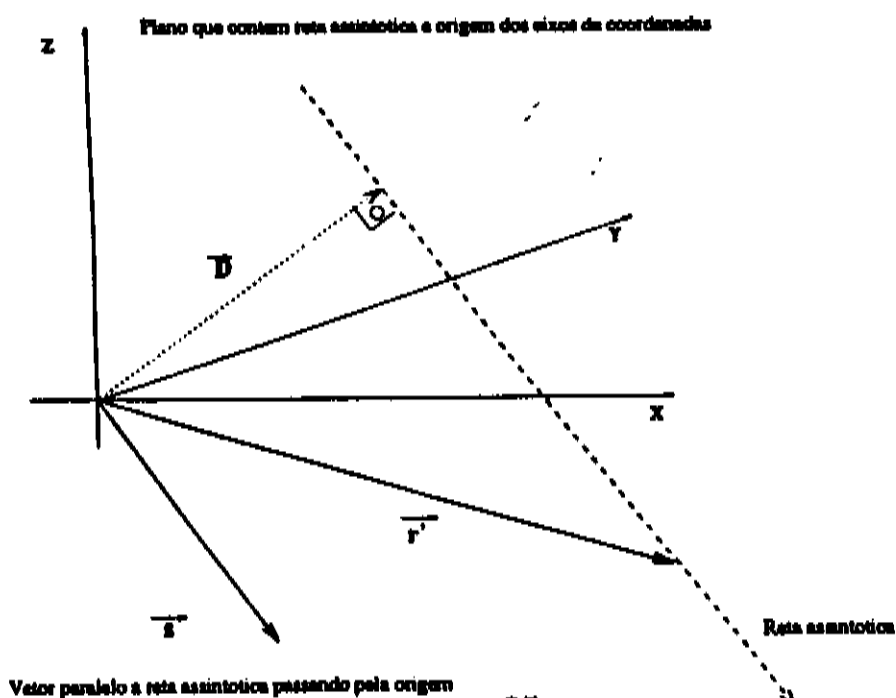
$$\zeta = \frac{f^2(\theta_i) [L^2 \cot^2 \theta_i - a^2 E^2 \cos^2 \theta_i] + E^2 F^4(\theta_i) + \gamma F^2(\theta_i) + \varepsilon F(\theta_i)}{f^2(\theta_i) + [F^2(\theta_i) - 2MF(\theta_i) + a^2]} \quad (5.38)$$

Obtemos, portanto, uma expressão para ζ cuja dependência está unicamente em θ_i , uma vez que a equação 5.34 também se encontra expressa apenas em termos desta variável.

Tendo determinado esta constante de acordo com a condição inicial tangencial, precisamos agora utilizar estes resultados na obtenção do fator de deflexão D , a exemplo do que foi feito no caso equatorial. Disto trataremos na seção seguinte.

5.3 Análise visual para um observador distante fora do plano equatorial

De uma certa forma este tratamento parece mais complicado que no caso precedente, pois agora nada mais fica confinado ao mesmo plano e todas as coordenadas mudam ao mesmo tempo. Portanto um fóton inicialmente tangencial e paralelo ao anel considerado, mudará de plano de órbita em que $\phi = cte.$ a cada instante, pois sua coordenada ϕ evolui segundo a equação 5.11. Temos assim uma situação em que é necessário uma visualização tridimensional para haver percepção completa do acontece. Neste caso, para determinarmos os fatores de desvio de interesse, precisamos trabalhar com a reta assintótica (em três dimensões) à trajetória do fóton. Considere então a figura abaixo, que mostra o plano que contém a origem do sistema de coordenadas e a reta assintótica:



25

O vetor $\vec{r'}$ que percorre a reta assintótica pode ser considerado como a soma vetorial de dois vetores: um constante e outro variável. Vale a relação :

$$\vec{r'} = \vec{D} + \vec{S'}$$

Onde:

$$\vec{D} = (D, \theta_o, \phi_o) = cte.$$

$$\vec{S} = (s, \theta_{obs}, \phi_{obs})$$

Onde $\vec{S}$ é definido como o vetor paralelo à reta assintótica, ou seja, na direção do observador. Por isso suas coordenadas angulares são as mesmas do observador. Enquanto que $\vec{D}$ é um vetor perpendicular à esta reta, interseccionando-a no ponto definido pelas coordenadas angulares (θ_o, ϕ_o) . Dado que $\vec{D}$ e $\vec{S}$ são também ortogonais entre si, temos:

$$r'^2 = D^2 + s^2 \quad (5.39)$$

Em coordenadas retangulares podemos escrever:

$$D_z = D \cos \theta_o$$

$$S_z = s \cos \theta_{obs}$$

E conseqüentemente:

$$r'_z = D \cos \theta_o + s \cos \theta_{obs}$$

Mas também sabemos que:

$$r'_z = r' \cos \theta$$

O que nos leva a:

$$D \cos \theta_o + s \cos \theta_{obs} = r' \cos \theta \quad (5.40)$$

Sabemos ainda da equação 5.39 que:

$$s = \sqrt{r'^2 - D^2} \quad (5.41)$$

Substituindo este resultado em 5.40, temos:

$$D \cos \theta_o + \sqrt{r'^2 - D^2} \cos \theta_{obs} = r' \cos \theta$$

Isolando agora θ em termos de r' , temos:

$$\cos \theta = \frac{D \cos \theta_o + \sqrt{r'^2 - D^2} \cos \theta_{obs}}{r'} = \frac{D \cos \theta_o}{r'} + \sqrt{1 - D^2/r'^2} \cos \theta_{obs}$$

Diferenciando e simplificando obtemos $d\theta/dr'$. Tomando seu inverso:

$$\frac{dr'}{d\theta} = \frac{(r')^2 \sqrt{(r')^2 - \left[D \cos \theta_o + \sqrt{r'^2 - D^2} \cos \theta_{obs} \right]^2}}{D \left[r' \cos \theta_o - \frac{2D \cos \theta_{obs}}{\sqrt{1 - (D/r')^2}} \right]}$$

Para r' muito maior que D , caso observado no limite assintótico, a expressão se reduz a:

$$\frac{dr'}{d\theta} \simeq \frac{(r')^2 \sin \theta_{obs}}{D \cos \theta_o} \quad (5.42)$$

A exemplo do caso equatorial, a condição de que a reta seja assintótica à trajetória do fóton é imposta através do limite abaixo:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{dr'}{d\theta} \right]_{reta} \left[\frac{d\theta}{dr} \right]_{trajet. fóton} = 1$$

Substituindo no limite acima a equação 5.42, obtemos:

$$D = \frac{\sin \theta_{obs}}{\cos \theta_o} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left[\frac{d\theta}{dr} \right]_{fóton}$$

Onde o valor de θ_o será determinado através de outras condições. Contudo é fácil perceber que este ângulo não pode assumir o valor $\pi/2$, pois isto indicaria uma reta assintótica no plano equatorial, o que só acontece quando o fóton também parte deste plano, e paralelamente ao mesmo; como foi visto na seção primeira deste capítulo. Por enquanto podemos tomar o valor mínimo desta deflexão D , que corresponde aquele em que $\cos \theta_o = 1$.

$$D_{\min} = \sin \theta_{obs} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)$$

Como este fator é determinado através da derivada da coordenada θ em relação à coordenada radial, chamaremos-no, daqui em diante, de $D_{(\theta) \min}$.

Tomando o limite acima para a equação 5.36, obtemos:

$$D_{(\theta) \min} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta - L^2 \cot^2 \theta}}{E} [\sin \theta_{obs}]$$

No limite assintótico em que efetuamos este limite, a coordenada θ deve tender à posição angular do observador, ou seja:

$$\theta \rightarrow \theta_{obs}$$

O que nos leva a:

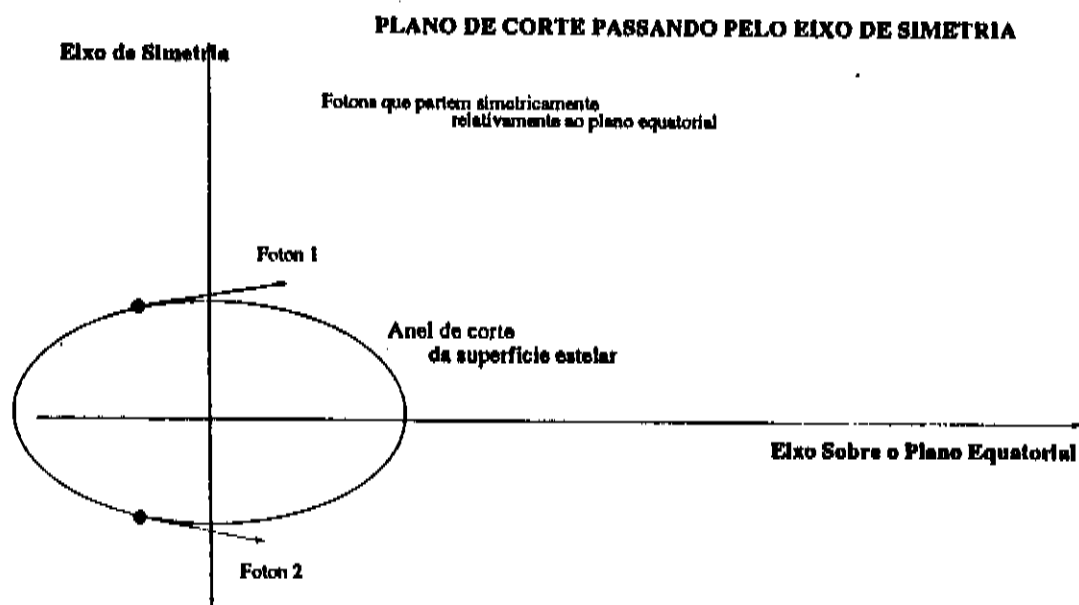
$$D_{(\theta) \min} = \frac{\sqrt{\zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta_{obs} - L^2 \cot^2 \theta_{obs}}}{E} [\sin \theta_{obs}] \quad (5.43)$$

Para o caso do nosso observador equatorial, a expressão anterior se reduz a apenas:

$$D_{(\theta) \min} = \frac{\sqrt{\zeta}}{E} \quad (5.44)$$

No caso tangencial equatorial vimos que este fator D , dado pelas duas raízes L/E_+ e L/E_- , conduziu-nos à extensão da imagem do plano equatorial, como está demonstrado pela equação 5.31. Em analogia com este caso, podemos concluir que a equação 5.44 nos fornece a metade da extensão do diâmetro polar da imagem estelar.

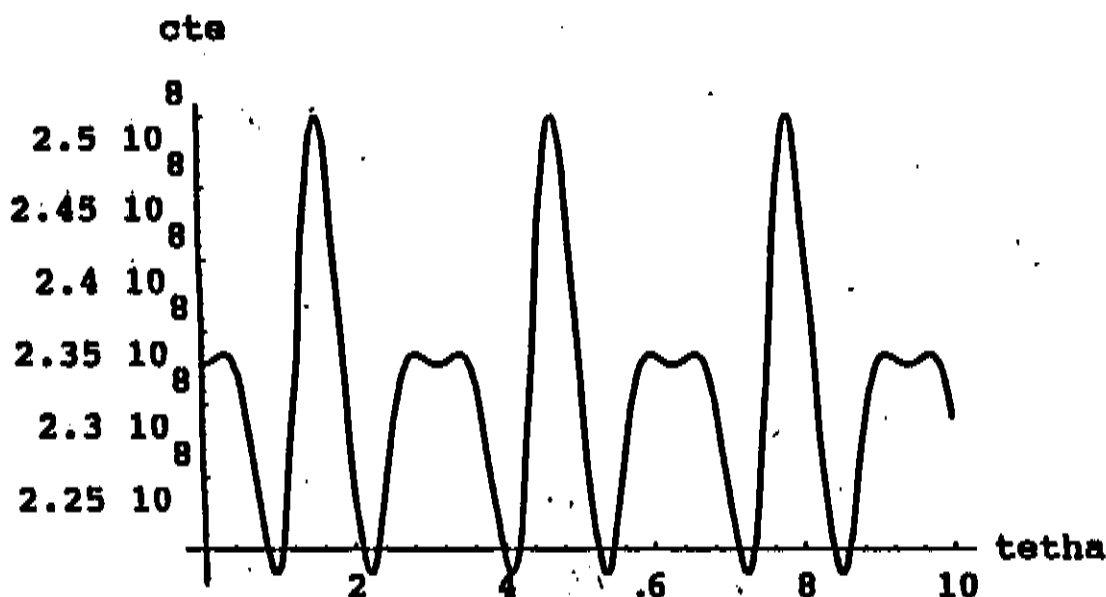
Vale aqui tecer algumas observações acerca deste fator D em termos da simetria de reflexão da métrica de Kerr em relação ao plano equatorial. Esta é uma propriedade que existe como decorrência da dependência do tensor métrico, em θ , se dar apenas em funções quadráticas. Da mesma forma acontece para a equação de movimento 5.35 que rege estas trajetórias. Portanto fica estabelecido que os dois fótons tangenciais - um de cada hemisfério - que determinam os limites polares da imagem devem partir de posições simétricas em relação ao plano refletor, pois se isto não ocorrer, as constantes iniciais dadas pela relações 5.30 e 5.24 assumirão valores distintos, fato este que levará os dois fótons a destinos também diferentes. Para que os dois se interceptem na posição equatorial do observador, as condições iniciais devem ser absolutamente idênticas, o que só é satisfeito para fótons inteiramente simétricos em relação ao plano equatorial. A figura a seguir ilustra este fato.



Dito isto já se torna possível saber como surgirá a imagem da estrela para este observador, visto que conhecemos a extensão dos diâmetros equatorial e polar da mesma. No entanto para poder calcular D_θ com exatidão, ainda resta determinar qual é a posição

inicial adequada θ_i para garantir interseção do fóton com o observador equatorial, já que a constante ζ depende da posição de saída.

Abaixo apresentamos o gráfico de $\zeta \times \theta_i$, para os dados da Estrela I da Tabela V, através dos quais podemos estudar a variação desta constante ao longo de todas as posições de saída sobre o anel de corte.



Observando-o, perceberemos que a relevância da determinação exata desta constante se esvai, pois a sua variação é pouco significativa, podendo perfeitamente ser tratada como um valor médio extraído do próprio gráfico acima, por exemplo.

Antes de iniciarmos um novo caso, devemos também obter o desvio D correspondente à deflexão em ϕ do mesmo fóton acima. Para isto devemos retomar as equações da reta assintótica definidas acima. Tomemos assim as suas outras duas componentes cartesianas:

$$r'_x = D_x + S_x = D \sin \theta_o \cos \phi_o + s \sin \theta_{obs} \cos \theta_{obs}$$

$$r'_y = D_y + S_y = D \sin \theta_o \sin \phi_o + s \sin \theta_{obs} \sin \phi_{obs}$$

Para a reta assintótica valem as seguintes relações:

$$\cos \phi = \frac{r'_x}{r' \sin \theta}$$

$$\sin \phi = \frac{r'_y}{r' \sin \theta}$$

E conseqüentemente:

$$\tan \phi = \frac{D \sin \theta_o \sin \phi_o + s \sin \theta_{obs} \sin \phi_{obs}}{D \sin \theta_o \cos \phi_o + s \sin \theta_{obs} \cos \phi_{obs}}$$

Em virtude da equação 5.41, temos:

$$\tan \phi = \frac{D \sin \theta_o \sin \phi_o + \sqrt{r'^2 - D^2} \sin \theta_{obs} \sin \phi_{obs}}{D \sin \theta_o \cos \phi_o + \sqrt{r'^2 - D^2} \sin \theta_{obs} \cos \phi_{obs}}$$

Diferenciando esta equação em relação a r' , simplificando-a e calculando-a para $r' \gg D$, temos:

$$\frac{dr'}{d\phi} \simeq \frac{(r')^2 \sin \theta_{obs}}{D \sin \theta_o \sin(\phi_{obs} - \phi_o)}$$

Da mesma maneira, impondo a condição para a reta assintótica coincidir com a trajetória do fóton a grandes distâncias da origem, temos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr'}{d\phi} \right)_{\text{reta}} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{\text{fóton}} = 1$$

Que por sua vez nos conduz a:

$$D_{(\phi)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2 \sin \theta_{obs}}{\sin \theta_o \sin(\phi_{obs} - \phi_o)} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{\text{fóton}} \quad (5.45)$$

A exemplo do caso anterior, não conhecemos nem θ_o nem ϕ_o , ficando estes ângulos a serem determinados. Da mesma forma como θ_o não pode assumir o valor de $\pi/2$, surge uma restrição parecida para ϕ_o , que não pode se igualar a posição angular do observador ϕ_{obs} . Além do mais θ_o também não pode ser nulo, pois como decorrência da deflexão na direção de ϕ , nunca haverá coincidência do vetor $\vec{D}$ com o eixo de simetria. E assim novamente torna-se possível estabelecer um mínimo para esta expressão:

$$D_{(\phi) \min} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \sin \theta_{obs} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{\text{fóton}} \quad (5.46)$$

Das equações 5.2, 5.3 e 5.5, podemos obter a seguinte expressão para $d\phi/dr$ no caso em que θ é genérico:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{[r^2 L / \sin^2 \theta + 2Mr(aE - L / \sin^2 \theta) - a^2 L \cot^2 \theta]}{(r^2 - 2Mr + a^2) \sqrt{E^2 r^4 + (\gamma - \zeta) r^2 + (\varepsilon + 2M\zeta) r - a^2 \zeta}}$$

Substituindo-a na equação 5.45 e efetuando o limite, obtemos:

$$D_{(\phi)} = \frac{\sin \theta_{obs}}{\sin \theta_o \sin(\phi_{obs} - \phi_o)} \frac{L}{E} \quad (5.47)$$

Onde o termo L/E está dado pela equação 5.34, que só depende da posição θ_i . Sendo que o valor mínimo para esta expressão é dado por:

$$D_{(\phi) \min} = \sin \theta_{obs} \frac{L}{E}$$

Fótons Radiais

Da mesma forma como foi feito para o caso tangencial, precisamos impor a condição inicial radial para fótons que partem do plano do anel estelar. Devemos, portanto, estabelecer que:

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{inicial} = 0$$

Em virtude da equação 5.36 esta condição nos leva a:

$$\zeta + a^2 E^2 \cos^2 \theta_i - L^2 \cot^2 \theta_i = 0 \quad (5.48)$$

De onde chegamos a seguinte expressão para ζ :

$$\zeta = E^2 \left[\frac{L^2}{E^2} \cot^2 \theta_i - a^2 \cos^2 \theta_i \right]$$

Substituindo acima a equação 5.30, obtida a partir de $P^\phi = 0$, temos:

$$\zeta = E^2 \left[\left(\frac{-2Mar(\theta_i) \sin^2 \theta_i}{r^2(\theta_i) - 2Mr(\theta_i) + a^2 \cos^2 \theta_i} \right)^2 \cot^2 \theta_i - a^2 \cos^2 \theta_i \right]$$

De forma que o fator D para este caso acaba dado por:

$$D = \sqrt{\left(\frac{-2Mar(\theta_i) \sin^2 \theta_i}{r^2(\theta_i) - 2Mr(\theta_i) + a^2 \cos^2 \theta_i} \right)^2 \cot^2 \theta_i - a^2 \cos^2 \theta_i} \quad (5.49)$$

Pela equação acima percebe-se imediatamente que o fóton radial que parte do equador ($\theta = \pi/2$), proporciona desvio nulo, o que significa que ele não sofre mudança em θ , como já havia sido estabelecido no caso radial equatorial, estudado na seção 4.2.

Outro fóton que também não sofrerá desvio é aquele radial que sai dos pólos estelares, se locomovendo sobre o eixo de simetria. Impondo $\theta = 0$ na equação 5.49 vemos, no entanto, que D não se anula, indicando uma deflexão para este fóton. Por argumentos físicos sabemos, entretanto, que algo que inicia seu movimento ao longo de um eixo de simetria, sobre ele deve permanecer confinado. Como então explicar esta aparente discrepância? A solução é encontrada lembrando que estamos fazendo tudo para um observador equatorial, e é óbvio que este fóton nunca o alcançará. Usando a expressão 5.43, calculada para o caso geral de um observador numa posição qualquer, chegamos a:

$$D = \sqrt{\left(\frac{-2Mar(\theta_i) \sin^2 \theta_i}{r^2(\theta_i) - 2Mr(\theta_i) + a^2 \cos^2 \theta_i} \right)^2 (\cot^2 \theta_i - \cot^2 \theta_{obs}) - (a^2 \cos^2 \theta_i - a^2 \cos^2 \theta_{obs})}$$

Por esta equação percebe-se que o mesmo fóton anterior, visto por um observador situado sobre o eixo de simetria, apresenta deflexão nula, como era esperado.

Capítulo 6

Conclusão

Conseguimos obter a visualização de uma estrela em rotação para um observador situado sobre o plano equatorial. Vimos que no caso em que a massa estelar tende à metade do raio equatorial de Boyer-Lindquist, um desvio bastante elevado da imagem do disco equatorial estelar pode ocorrer em relação à posição real da estrela. Ao mesmo tempo a extensão equatorial da imagem deste disco se alarga, podendo ser tão grande a ponto de ser enxergada como uma faixa de luz, ou melhor, um risco. O fato da maioria dos fótons emitidos pela fonte da radiação não satisfazer a condição especial de alongamento visual, ou melhor, não partir tangencialmente ao círculo equatorial de $R = 2M$, indica que a imagem do círculo estelar está situada praticamente sobre a posição real da estrela, pois o desvio correspondente a estes fótons 'normais' acaba sendo muito pequeno. Como a posição real da estrela jaz sobre uma das extremidades da sua faixa visual equatorial, temos então a seguinte configuração óptica: um risco de luz com ponto luminoso maior e muito mais intenso na ponta. A baixa intensidade luminosa do risco em relação a da sua extremidade pontual, é explicada pela reduzida quantidade de fótons (em relação à radiação total emitida pela fonte) que partem da região adequada com a condição inicial acertada para lhes proporcionar desvio divergente.

Vale observar que nada impede que ao longo deste risco luminoso sejam observados nódulos de luz, para isto basta que sejam encontradas condições de desvio divergente para fótons não-equatoriais em geral. Desta forma feixes de radiação provenientes de toda estrela, mas obedientes a uma mesma condição inicial, podem sofrer desvios muito grandes e próximos entre si, garantindo a transposição da imagem do círculo como um todo ao longo da faixa visual equatorial.

Contudo não desenvolvemos totalmente ainda o caso geral em que o observador está fora do plano equatorial, pois falta determinar quais fótons tangenciais, e sob quais condições, transmitem ao observador os extremos da imagem 'equatorial' (central) da estela. Lembremos que o diâmetro polar já foi determinado para o observador em qualquer posição, e está dado pela equação 5.43. Falta, desta maneira, encontrar para este caso o diâmetro equatorial da imagem, para assim constatar se um efeito análogo ao existente para o caso do observador equatorial, também se verifica para o observador numa posição qualquer.

Certamente ficou claro que para estrelas ou fontes de luz que não proporcionam aos fótons emitidos condição de desvio divergente, a imagem correspondente será a convencionalmente conhecida: um ponto de luz. Pois sabemos que os efeitos de distorção e desvios são praticamente desprezíveis nestes casos.

Vale também ressaltar que os efeitos de distorção podem ocorrer tanto no caso de estrelas como no caso geral de qualquer corpo condensado em rotação, como por exemplo os núcleos de galáxias e buracos negros. Para estes últimos o efeito provém radiação emitida pela matéria que é continuamente atraída para seu interior. O efeito de estiramento visual estaria sempre presente à imagem daquilo que se passa além do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr, pois nada impede que a matéria incidente emita radiação tangencial ao círculo cujo raio valha duas vezes o valor da massa por ele delimitada.

Finalmente podemos afirmar que as condições altamente restritivas em que se verifica o fenômeno não invalidam a hipótese da sua observação, dada a quase infinita disponibilidade de astros. Podemos, portanto, finalizar com a certeza de que estudos mais detalhados (buscando generalizações de resultados), acerca do processo de formação da imagem de corpos celestes distantes em rotação, venha abrir perspectivas concretas para explicação de novos fenômenos astrofísicos.

Bibliografia

- [1] Carter, B., *Phys. Rev.* **174** 1559 (1968)
- [2] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Blackholes*, Oxford, Claredon (1983)
(International Series of Monographs on Physics)
- [3] M. Carmeli, *General Relativity and Gauge Theory*, Wiley, N.Y. (1982)
- [4] R. d'Inverno, *Introducing Einstein Relativity*, Claredon, Oxford (1992)
- [5] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical theory of Fields and Particles*, Dover, N.Y. (1980)
- [6] B.F.Shutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University, Cambridge (1985)
- [7] Bridley, A.H. and Perley, R.A., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **22**, 319 (1984)
- [8] Newman, E.T. and Janos, A.I., *J. Math Physics*, **6**, 915 (1965)
- [9] Kerr, R.P., *Phys. Rev. Letters*, **11**, 237 (1963)
- [10] C.W.Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman and Company, N.Y. (1971)
- [11] Sharp, N.A., *General Relativity and Gravitation*, **10**, 659 (1979)
- [12] Stuchlik, Z. & Calvani, M., *General Relativ. and Gravitation*, **23**, 507 (1991)
- [13] Cohen, H., *American Journal of Physics*, **45**, 239 (1977)
- [14] Zakharov, A.F., *Sov. Astron.* **35** 1 (1991)

- [15] Zakharov, A.F., *Sov. Phys. JETP* **64** 1 (1986)
- [16] Dymnikova, I.G., *Sov. Phys. Usp.* **29**, 3 (1986)
- [17] Cook, G.B., Shapiro, S.L., Teukolski, S.A., *Ap. Journal*, **424**, 823 (1994)
- [18] Eriguchi, Y., Hachisu, I., Nomoto, K., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **266**, 179 (1994)
- [19] Bicák, J. & Stuchlík, Z., *Bull. Astron. Inst. Czeecz.* **27**, 129 (1976)