DA FORÇA AO TENSOR: EVOLUÇÃO DO CONCEITO FÍSICO E DA REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Cibelle Celestino Silva

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Andrade Martins

Tese apresentada ao
Instituto de Física Gleb Wataghin - UNICAMP
para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Campinas, 11 de outubro de 2002.

Para Francisca e Francisco,

minhas raízes e frutos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Roberto Martins pela confiança, dedicação, paciência, estímulo e por tudo que tenho aprendido nesses anos de convivência.

Ao Luciano pelo seu amor e companheirismo.

À minha família por todo o amor e alegria.

A todos os amigos e colegas que de alguma maneira ou outra estiveram ao meu lado nesta caminhada.

E finalmente agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo: O objetivo deste trabalho é estudar o desenvolvimento paralelo dos conceitos físicos e do formalismo matemático usado para descrever o conhecimento eletromagnético no século XIX e início do século XX. Este estudo considera questões como os modelos de éter usados para descrever o campo eletromagnético, a simetria associada com os campos, as dimensões das grandezas físicas. Estudamos também a escolha entre o cálculo de quatérnions e vetores e o desenvolvimento do formalismo quadridimensional como a melhor maneira de descrever os fenômenos eletromagnéticos.

Abstract: The aim of this work is to study the parallel development of the physical concepts and the mathematical formalism used to describe the electromagnetic knowledge in nineteenth and early twentieth century. This study takes into account issues such as the ether models used to describe the electromagnetic field, the symmetries associated with the fields, the dimensions of physical quantities. We also study the choice between quaternions and vectors and the development of the four-dimensional formalism as the best way to describe the electromagnetic phenomena.

ÍNDICE:

1. INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar o desenvolvimento paralelo dos conceitos físicos e do formalismo matemático usado para descrever os conhecimentos eletromagnéticos, do início do século XIX e começo do século XX (antes do desenvolvimento da eletrodinâmica quântica).

No contexto da teoria eletromagnética relativística o campo eletromagnético é representado por um tensor quadridimensional antissimétrico $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ de segunda ordem (α,β = 0, 1, 2, 3), cujas componentes estão associadas às componentes do campo elétrico **E** e da indução magnética **B**: [1]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Essa notação condensa um grande número de propriedades dos campos elétrico e magnético, tais como: a transformação relativística entre esses campos, as propriedades de simetria do campo elétrico e do campo magnético, a existência de dois invariantes do campo eletromagnético, sendo um deles um escalar ($\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2 = \mathbf{inv}$.) e o outro um pseudo-escalar ($\mathbf{E} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{inv}$.)[2].

Esse tensor do campo eletromagnético pode ser calculado a partir do quadrivetor potencial do campo eletromagnético[3] $\mathbf{A}_\mu = (\phi, \mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z)$:

---

[1] A representação aqui utilizada assume **c** = 1 e x_0=t (JACKSON 1975, p. 550; FEYNMAN 1966, vol. 2, p. 26-6). Em outros livros, pode aparecer o fator **c**. Além disso, os sinais dos elementos desse tensor podem variar dependendo das convenções utilizadas, e podem aparecer fatores multiplicados por **i**, conforme a notação adotada para a coordenada temporal relativística. Ver, por exemplo, LANDAU & LIFCHITZ 1975, p. 79; MØLLER 1972, p. 147.

[2] Ver LANDAU & LIFCHITZ 1975, p. 83; BECKER 1964, p. 347.

[3] Continuamos a adotar **c**=1 (FEYNMAN 1966, vol. 2, pp. 25-6 a 25-9 e 26-5). Dependendo do sistema de unidades adotado, aparecem diferentes constantes nessas equações.

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\mu/\partial x_\nu - \partial A_\nu/\partial x_\mu$$

que permite escrever as equações de Maxwell de uma forma extremamente elegante e compacta, em quatro dimensões, utilizando o quadrivetor densidade de corrente $\mathbf{j_\mu = (\rho, j_x, j_y, j_z)}$:

$$\Box^2 A_\mu = j_\mu / \varepsilon_0 \qquad\qquad \partial j_\mu/\partial x_\nu = 0$$

Esse formalismo matemático, desenvolvido no início do século XX, é considerado o mais adequado para representar a teoria eletromagnética de Maxwell sob forma relativística. Mas quais foram as etapas que levaram a esse formalismo, e quais as leis e conceitos físicos que estão por trás dele? Este é o tema que será estudado na presente tese.

O desenvolvimento da teoria eletromagnética de Maxwell, até chegar à formulação relativística acima descrita, não foi linear em nenhum sentido. Mesmo se deixarmos de lado as outras teorias do eletromagnetismo surgidas durante o século XIX (teorias de Wilhelm Weber, de Bernhard Riemann, de Rudolf Clausius, etc.),[4] os próprios adeptos da teoria de Maxwell debatiam entre si sobre muitos aspectos essenciais relativos à compreensão e representação dos campos eletromagnéticos. Havia uma crença generalizada na existência do éter como sendo o meio através do qual as forças e ondas eletromagnéticas eram transmitidas e havia acordo sobre as propriedades e relações básicas das grandezas eletromagnéticas. No entanto, a física não era concebida nessa época apenas como um modo de fazer cálculos e prever efeitos, mas também (e principalmente) um modo de se compreender a natureza mais interna dos próprios fenômenos. Desejava-se compreender *o que eram realmente os campos elétrico e magnético*, sob o ponto de vista físico, *qual a natureza das linhas de força*, e outras questões desse tipo. Alguns dos pontos polêmicos eram os seguintes:

[4] Ver WHITTAKER 1973, vol. 1, cap. 7. Essas teorias não foram abordadas nesta tese, que se concentrou nos desenvolvimentos ligados mais diretamente à teoria de Maxwell.

• Em um modelo de éter para o campo eletromagnético, o campo elétrico e o campo magnético deveriam ser associados a que tipo de grandezas mecânicas: tensões, velocidades, rotações, ... ?

• Existiria algum tipo de evidência experimental que pudesse ser conclusiva ou ajudar a decidir sobre o modelo mais adequado?

• Qual o tipo de simetria associado às grandezas básicas da teoria (campo elétrico e campo magnético)? Como representar essa simetria?

• Qual a dimensionalidade física das grandezas eletromagnéticas?

• Qual seria o formalismo matemático mais adequado para descrever os campos eletromagnéticos: quatérnions ou vetores (ou outra representação matemática)?

Esses vários pontos não eram independentes um do outro. Foram separados aqui apenas por razões de clareza, de modo a chamar a atenção para alguns aspectos relevantes do problema. Vamos apresentar a seguir uma descrição simplificada da evolução histórica dessas questões.

No final do século XVIII as forças elétricas e magnéticas eram pensadas como fenômenos distintos e semelhantes, em certo sentido, quando comparadas às forças gravitacionais. A visão predominante, reforçada pelos experimentos de Charles-Augustin Coulomb (1736-1806), era de que se tratava de forças diretas à distância,[5] variando com o inverso do quadrado da distância. O mesmo tipo de análise matemática que era aplicado à gravitação foi desenvolvido para a eletricidade e o magnetismo por Siméon-Denis Poisson (1781-1840), no início do século XIX. Nessa abordagem, as forças elétricas e magnéticas eram pensadas como grandezas dotadas de direção, sentido e módulo, e como não existia o formalismo vetorial moderno, trabalhava-se com suas componentes cartesianas.

---

[5] No século XVII Descartes havia desenvolvido uma interpretação das forças magnéticas supondo a existência real de um fluxo de partículas saindo por uma extremidade do ímã e entrando pela outra. Alguns autores do século XVIII utilizavam a idéia de "atmosferas elétricas" ou de "esfera de atividade" das forças elétricas e magnéticas, que tinha certa semelhança com o conceito posterior de campo. No entanto, essas concepções haviam sido abandonadas, no final do século XVIII.

A idéia de forças diretas à distância tornou-se problemática, no entanto, a partir da descoberta do eletromagnetismo por Hans Christian Ørsted (1771-1851), em 1820. O efeito magnético produzido por uma corrente elétrica era algo que girava em torno do fio, e portanto não começava nem terminava em nenhum objeto físico palpável. De um modo geral, os físicos franceses, liderados por André-Marie Ampère (1775-1836) rejeitaram a idéia de uma "coisa" que girava em torno do fio, e desenvolveram uma abordagem eletrodinâmica, que substituía todos os efeitos magnéticos por forças à distância entre correntes elétricas. No entanto, outros pesquisadores (e em especial Faraday) passaram a adotar uma visão dos fenômenos eletromagnéticos que supunha a existência real de linhas de força mesmo em um espaço vazio de matéria. Assim, a idéia de um éter eletromagnético foi gradualmente ganhando espaço durante o século XIX, dando origem ao conceito de campos como estruturas físicas desse éter.

A estranha simetria do fenômeno descoberto por Ørsted parecia indicar que a eletricidade e o magnetismo, embora inter-relacionados, possuíam estruturas muito diferentes. Sob o ponto de vista de seus modelos, Michael Faraday (1791-1867) foi levado a imaginar que as linhas de força magnética *giravam* em torno de si próprias (como um tubo de borracha que pode manter sempre a mesma direção, mas girar em torno do seu eixo em cada ponto) – uma visão aceita por William Thomson (1824-1907 – que se tornou depois Lord Kelvin) em 1847. Essa interpretação foi reforçada pela descoberta do efeito magneto-óptico, no qual o plano de polarização girava quando um feixe de luz se deslocava paralelamente ao campo magnético, em certos materiais.

No contexto do século XIX, um campo de força é pensado como um espaço no qual uma força é definida em cada ponto (mesmo na ausência de matéria e carga) e uma teoria de campo é qualquer teoria que atribui valores a essas forças. O campo contém a capacidade de mediar uma ação que deve ser entendida como a ação se propagando entre os "elementos contíguos" do campo. Um campo pode ser descrito matematicamente através de equações diferenciais no espaço e no tempo que representam a ação do campo como uma ação através dos elementos contíguos do meio.

Thomson e Maxwell desenvolveram inicialmente suas equações diferenciais para os campos como descrições geométricas de processos físicos. Ambos usaram analogias com fenômenos conhecidos como a propagação de calor em um sólido, o fluxo de um fluido em um meio resistivo e deslocamentos e rotações em um meio elástico. A partir dessas analogias, elaboraram modelos mecânicos para explicar os fenômenos eletromagnéticos. De uma maneira geral, os fenômenos elétricos eram associados a deslocamentos lineares e os fenômenos magnéticos à rotações.

Embora ainda não se utilizasse a linguagem vetorial moderna, já estava presente nesse tipo de análise a idéia de que o campo elétrico deveria ser associado a um vetor "comum" (polar) e o campo magnético a um vetor axial (pseudo-vetor), por corresponder a uma rotação. Outra possibilidade seria associar o fenômeno elétrico a uma rotação e o magnético a uma velocidade linear do meio.[6] A escolha entre as duas possibilidades tinha um elemento de arbitrariedade pois não havia um experimento decisivo que permitisse decidir qual o melhor modelo.

Esses modelos permitiam relacionar o eletromagnetismo às teorias de corpos elásticos e à hidrodinâmica. O formalismo que estava sendo desenvolvido para a mecânica de meios contínuos foi imediatamente aplicado ao eletromagnetismo.

Como representar matematicamente as grandezas eletromagnéticas? Quando Maxwell escreveu seu *Treatise on electricity and magnetism*, publicado em 1873, os métodos matemáticos disponíveis eram as equações diferenciais expressas em coordenadas e componentes cartesianas e o método dos quatérnions, desenvolvido por Hamilton e Tait.

Maxwell discutiu e utilizou o método dos quatérnions no estudo da eletrodinâmica. Usando este formalismo, a relação entre as grandezas envolvidas pode ser expressa através dos quatérnions de uma maneira mais simples que através de equações diferenciais utilizando explicitamente as componentes dos campos.[7] Foi utilizando a notação dos quatérnions que Maxwell escreveu as suas equações da eletrodinâmica.[8] O uso dos

---

[6] WHITTAKER 1973, vol. 1, p. 279.
[7] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 10.
[8] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 257-59.

quatérnions em seu livro é freqüente e poderia ter se difundido mais, se não fosse pouco conhecido pelos leitores da época.

Mas a teoria de Hamilton e Tait tinha muitos opositores no final do século XIX, entre eles Heaviside e Gibbs, que desenvolveram o cálculo vetorial conforme conhecemos hoje em dia. Para eles o formalismo dos quatérnions não era claro e também possuía problemas conceituais relativos ao produto entre quatérnions.

Uma teoria física especifica certos objetos físicos e também como eles estão relacionados entre si. Nesse sentido, as teorias físicas descrevem estruturas. O princípio de simetria proposto por Pierre Curie (1859-1906) permite encontrar resultados e relações entre as grandezas físicas a partir da análise das simetrias dessas estruturas.

Há dois tipos de grandezas geométricas usadas para representar situações físicas: os *vetores polares* são associados a translações e os *vetores axiais* (na verdade pseudo-vetores) são associados a rotações. A simetria associada a cada vetor também determina seu tipo. No caso da experiência de Ørsted ocorre uma aparente quebra de simetria que, como veremos, pode ser explicada pelo princípio de Curie.

Uma outra questão debatida no final do século XIX era saber quais as dimensões das grandezas eletromagnéticas. Procurava-se descrever as dimensões das grandezas eletromagnéticas em função das dimensões mecânicas básicas [L], [M], [T] porque se imaginava a possibilidade de um modelo mecânico do eletromagnetismo. Na época, surgiram diferentes sistemas dimensionais, associados a diferentes modos de interpretar a própria natureza das grandezas eletromagnéticas. Logo no início do seu *Treatise on electricity and magnetism*, Maxwell analisa de modo mais geral essa questão, mostrando que as leis do eletromagnetismo não *determinam*, sozinhas, a dimensionalidade das grandezas eletromagnéticas, existindo muitas alternativas possíveis.

Ao invés de admitir uma arbitrariedade nesse tipo de análise, diferentes autores se posicionaram defendendo uma ou outra forma de análise. Muitos importantes físicos, como Rudolf Clausius, Oliver Lodge, Joseph John Thomson, Hermann Helmholtz e outros discutiram a questão. O debate acalorado ocorrido na década de 1880 mostrou que a discussão sobre a dimensionalidade física das grandezas eletromagnéticas estava relacionada a diferentes posições sobre a existência do éter ou de ações à distância.

No final do século XIX e início do século XX, Joseph Larmor (1857-1942), Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Henri Poincaré (1854-1912) e Albert Einstein (1879-1955) desenvolveram um novo formalismo para o eletromagnetismo, tornando-o compatível com o princípio da relatividade pela introdução das "transformações de Lorentz".[9] As equações que descrevem fenômenos físicos (incluindo as equações de Maxwell) são covariantes sob transformações de Lorentz.

No entanto, esses trabalhos tratavam as grandezas eletromagnéticas como vetores. O estudo mais aprofundado da natureza matemática da própria teoria da relatividade e a introdução de tensores no eletromagnetismo foi realizado por Hermann Minkowski (1864-1909) e por Max Abraham (1875-1922). Chegou-se, assim, ao formalismo utilizado até hoje na eletrodinâmica relativística, onde os campo **E** e **B** podem ser expressos em termos de potenciais ou como elementos de um tensor antissimétrico de segunda ordem.[10]

Os parágrafos acima dão uma idéia geral sobre o grande número de contribuições que acabaram por resultar na teoria relativística do eletromagnetismo e em seu formalismo matemático. De acordo com o levantamento bibliográfico realizado, não existem estudos históricos que examinem as interconexões entre os desenvolvimentos da física e da matemática no período considerado. Há alguns bons trabalhos sobre história da matemática[11] que analisam o desenvolvimento do cálculo vetorial e outros sobre história da física[12] que discutem o desenvolvimento da teoria eletromagnética, mas as influências mútuas entre a matemática e a física no período são bem pouco estudadas na literatura.

A grande abrangência do tema, com numerosas ramificações e com a contribuição de um grande número de matemáticos e físicos, torna o estudo bastante complexo. Uma investigação deste tipo pode facilmente tornar-se inviável pelo grande número de

---

[9] WHITTAKER 1973, vol. 2, capítulo 2.
[10] JACKSON 1975, p. 550.
[11] CROWE 1967.
[12] WHITTAKER 1973.

ramificações que cada conceito possibilita. Para evitar isso, tivemos que impor severos limites. Dedicamo-nos a estudar as teorias eletromagnéticas que levaram à teoria de Maxwell e também seus desdobramentos, já que foi essa abordagem que levou à teoria aceita pela maioria dos físicos atualmente. Portanto, deixamos de lado teorias como as de Weber e de Clausius. Não abordamos, neste trabalho, vários aspectos da teoria eletromagnética discutidos na época tais como os aspectos experimentais, os instrumentos de medida, as unidades eletromagnéticas e a própria fundamentação das leis básicas do eletromagnetismo, por não estarem diretamente relacionados com o desenvolvimento do formalismo matemático usado atualmente.

É evidente que foi impossível estudar todas as obras primárias relevantes de todos os pesquisadores acima citados. Nesta tese utilizamos a análise de algumas das obras originais mais importantes do período, bem como estudos historiográficos anteriores, de modo a suprir informações sobre tópicos que não puderam ser pesquisados mais detalhadamente por motivos práticos.

A seguir faremos uma apresentação esquemática das principais contribuições presentes em cada capítulo da tese: No capítulo 2, estudamos vários tipos de modelos e analogias usados para descrever o éter eletromagnético. Apesar de esse assunto já ter sido bastante explorado pelos historiadores da ciência, olhamos para ele com um enfoque diferente do utilizado pelos historiadores até então. Enfatizamos a existência de grandezas associadas a deslocamentos ou velocidades e grandezas associadas a rotações nos modelos de éter que seriam associadas com as diferentes grandezas eletromagnéticas. Até então, não havia trabalhos em História da Ciência que discutissem a relação entre os tipos de grandezas, isto é, grandezas lineares ou grandezas rotacionais nos modelos de éter, com os tipos de equações usadas para representá-las matematicamente. Vimos que essas equações têm a propriedade de transformar um tipo de grandeza em outro. Além disso, elas utilizam operadores diferenciais que são importantíssimos em uma teoria de campo para descrever os fenômenos eletromagnéticos, mas não são necessários em uma teoria de ação à distância. Vimos que a existência de operadores diferenciais e a propriedade das equações de transformarem um tipo de grandeza em outro foram as principais propriedades do cálculo de quaternions que chamaram a atenção de Maxwell e que o motivaram a utilizar os quaternions no eletromagnetismo.

No capítulo 3, estudamos também em detalhes o desenvolvimento do cálculo vetorial a partir do cálculo de quatérnions. Neste capítulo estudamos a disputa entre os defensores dos quatérnions e os defensores da nova álgebra vetorial para entendermos quais os fatores que favoreceram a aceitação da álgebra vetorial ao invés do cálculo de quaternions. Essa disputa havia sido estudada apenas superficialmente por historiadores da ciência. Nós a estudamos em detalhes, analisando quase todos os artigos, cartas e comentários escritos na época. Vimos que o principal fator que influenciou a aceitação da álgebra vetorial foi a sua aplicação imediata aos problemas eletromagnéticos da época e uma aparente simplicidade em relação ao cálculo de quaternions.

Durante esse estudo localizamos problemas conceituais existentes na álgebra vetorial moderna. Vimos que há um problema na interpretação que considera os vetores *i, j, k* como vetores unitários e ao mesmo tempo como resultado do produto vetorial entre eles. Esclarecemos que a origem deste problema está no uso equivocado que os fundadores da álgebra vetorial fizeram das unidades imaginárias *i, j, k* presentes no cálculo de quatérnions.

No capítulo 4 discutimos o fato de que as diferentes propriedades de simetria dos vetores relacionados aos fenômenos elétricos e magnéticos não aparecem quando usamos a álgebra vetorial para descrevê-las. Localizamos os trabalhos de Pierre Curie nos quais ele discute essa questão, que não havia sido percebida pelos autores da época. Apesar da importância dos trabalhos de Curie, eles não haviam sido estudados detalhadamente pelos historiadores da ciência até agora. Enquanto estudávamos esse assunto, localizamos trabalhos de Voigt e de Langevin que, após perceberem a relevância do princípio de simetria de Pierre Curie, propuseram novos símbolos para representar os diferentes tipos de vetores associados às grandezas eletromagnéticas.

Tendo em mente as questões de simetria do campo elétrico e magnético e o princípio de simetria de Pierre Curie, analisamos a aparente quebra de simetria existente na experiência de Ørsted. Vimos que essa quebra de simetria é apenas aparente e que ela está relacionada com a representação utilizada atualmente do campo magnético gerado por uma corrente. A representação adequada seria a proposta por Maxwell em seu modelo de meio elástico na qual o campo em um ponto está relacionado com algo girando *no ponto* e não *ao redor do fio*.

No capítulo 5 da tese, estudamos trabalhos publicados no fim do século XIX e começo do século XX que discutiam a possibilidade de se determinar a *verdadeira* natureza das grandezas eletromagnéticas a partir da análise dimensional. O uso desse enfoque para estudar os modelos de éter e esses trabalhos não haviam sido estudados pelos historiadores da ciência, apesar de sua importância. Eles estão relacionados com a crença existente na época na possibilidade de entendermos mecanicamente os fenômenos eletromagnéticos. Foram publicados vários trabalhos, principalmente na revista *Philosophical Magazine*, discutindo aspectos teóricos e experimentais relacionados com as dimensões das grandezas eletromagnéticas. Houve inclusive um debate, com vários artigos publicados em várias revistas. A busca pela verdadeira natureza das grandezas eletromagnéticas foi abandonada com o advento da relatividade especial e também o uso da análise dimensional como ferramenta útil nos estudos sobre os fenômenos eletromagnéticos. Estranhamente não se falou mais neste assunto depois de 1900, apesar de até os dias de hoje haver discussões sobre a dimensão correta de grandezas.

No capítulo 6 estudamos o desenvolvimento do formalismo usado atualmente para representar a teoria eletromagnética relativística. Novamente olhamos para a simetria dos campos, introduzindo um novo enfoque para estudar o desenvolvimento histórico da teoria. Apesar de Maxwell haver discutido a existência de grandezas vetoriais relacionadas com rotações e translações e Curie haver enfatizado a importância dessas diferenças, os autores envolvidos com o desenvolvimento do formalismo quadridimensional não se preocuparam com ela. O formalismo usado atualmente não contempla essa questão pois tanto faz se escolhemos o campo elétrico como vetor polar e a indução magnética como vetor axial ou vice-versa: as equações de Maxwell permanecem invariantes nos dois casos. Atualmente seguimos a tradição introduzida por Maxwell.

A importância de conhecermos quais grandezas são polares e quais são axiais não está apenas relacionada com sabermos se elas são coisas que giram ou se deslocam linearmente no éter, que foi abandonado com o surgimento da relatividade especial. Elas estão relacionadas com a simetria das grandezas e essa é uma questão geométrica relacionada com as propriedades físicas dos campos e com a possibilidade de determinarmos que tipos de grandezas geométricas e físicas são os campos. Após os trabalhos de Minkowski, o interesse passou a ser construir teorias covariantes sem se preocupar muito com as propriedades físicas dos entes envolvidos.

Além do formalismo vetorial e tensorial, na década de 1920 foram escritos trabalhos utilizando outros formalismos matemáticos no eletromagnetismo. Localizamos e estudamos os trabalhos de Silberstein que utilizam o formalismo de quaternions para escrever as equações de Maxwell, mantendo sua covariância. Apesar do interesse, esses trabalhos não foram estudados pelos historiadores da ciência.

Como dissemos anteriormente, não há trabalhos que estudem o desenvolvimento paralelo entre os conceitos físicos e o formalismo matemático envolvidos na teoria eletromagnética. Nesse sentido, nosso trabalho trouxe novos elementos que não haviam sido discutidos anteriormente por historiadores da ciência.

2. INTERPRETAÇÃO MECÂNICA DAS GRANDEZAS ELETROMAGNÉTICAS

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar um breve resumo dos principais tipos de teorias de éter discutidos na segunda metade do século XIX. Não vamos discutir os detalhes de cada teoria nem cobrir toda a história do eletromagnetismo pois este não é o objetivo deste trabalho e também porque já existem excelentes trabalhos sobre isso, como por exemplo os livros de Mary Hesse, Sir Edmund Whittaker, G. N. Cantor & M. Hodge, Olivier Darrigol e vários artigos publicados em renomados periódicos.[13]

O nosso objetivo neste capítulo é ressaltar os aspectos dos modelos físicos de éter que serão necessários para entendermos melhor o desenvolvimento paralelo dos conceitos físicos e do formalismo matemático usado para descrever os fenômenos eletromagnéticos. Não vamos entrar em detalhes sobre as teorias dos autores posteriores a Maxwell e sim discutir alguns trabalhos anteriores e, em mais detalhes, os aspectos relativos à teoria de Maxwell. Essa restrição se deve ao fato de Maxwell ser o autor mais influente da época e também ao fato de todos os outros autores que trabalharam com o enfoque de teoria de campo terem se baseado no trabalho de Maxwell.

No século XVIII, considerava-se a existência de vários tipos de fluidos independentes responsáveis pelos vários fenômenos físicos conhecidos. Um fluido seria responsável pelos fenômenos elétricos, outro pelo calor e um terceiro pelo magnetismo. Os físicos do século XIX tenderam a associar todos os fenômenos com um único éter, concebido em termos mecânicos, que poderia ter muitas funções.[14]

A filosofia natural britânica era uma filosofia mecânica que buscava explicações para os fenômenos físicos em termos de matéria, movimento e forças baseadas nas leis de

[13] HESSE 1961, WHITTAKER 1973, CANTOR & HODGE 1981, DARRIGOL 2000.
[14] CANTOR & HODGE 1981, p. 49.

movimento de Newton. Dentro deste espírito, o éter seria considerado como base para todos os fenômenos físicos, interpretados como alterações mecânicas do éter.

Na metade do século XIX a teoria ondulatória da luz era amplamente aceita em toda Grã-Bretanha e conseqüentemente se adotava a crença na existência de um éter luminoso – um tipo de sólido elástico que preencheria todo o espaço. Além de ser o meio que sustentaria a propagação da luz, o éter tinha outras funções na filosofia mecanicista britânica. Maxwell mostrou que o éter poderia ter outras utilidades, tais como explicar os fenômenos elétricos e magnéticos e William Thomson desenvolveu uma teoria na qual os átomos seriam vórtices formados no éter. As idéias de Maxwell e Thomson foram posteriormente desenvolvidas por George FitzGerald, Oliver Lodge, Joseph Larmor e outros.

No contexto do século XIX, um campo de força era pensado como um espaço no qual a força é definida em cada ponto, e uma teoria de campo é qualquer teoria que permite calcular os valores dessas forças. Essa definição poderia admitir ainda as teorias de ação à distância. No entanto, teorias de campo consideram a ação entre dois objetos separados como sendo mediadas por um campo existente no espaço entre os objetos. A existência independente do campo pode ser entendida como a noção de que o campo contém em si mesmo a capacidade de ação, ele contém o "poder" (Faraday), "efeito mecânico" (Thomson) ou energia. A capacidade de mediar a ação deve ser entendida como a ação se propagando entre os "elementos contíguos" do campo.[15]

Teorias de força podem ser chamadas de teorias de campo quando tratam as partes de um sistema de força não independentemente, mas sim como participantes de um todo, e consideram que a interação se dá entre as partes vizinhas, rejeitando a ação direta à distância. O termo "campo" é usado em um sentido amplo, significando a introdução de entidades físicas ou matemáticas no espaço existente entre fontes elétricas e magnéticas. As linhas de campo de Faraday são o primeiro conceito preciso da idéia de campo. Faraday defendeu em 1845 um conceito de campo puro, no qual cargas e correntes são conceitos

---

[15] WISE 1981, p. 22.

secundários. Thomson foi o primeiro a introduzir em 1847 o conceito de campo acompanhado por um formalismo matemático e procurar sua fundamentação em uma teoria dinâmica do éter.[16]

A existência de um éter eletromagnético era uma idéia aceita por quase todos no final do século XIX (exceto os que acreditavam em uma ação direta à distância), mas não havia acordo sobre como seria o éter eletromagnético e quais suas propriedades.

O ramo principal da mecânica no século XIX era o estudo de sistemas contínuos como sólidos elásticos e fluidos. O estudo da mecânica de meios contínuos tornou necessário o desenvolvimento de novos procedimentos formais apropriados para se calcular mudanças em porções infinitesimais do sistema sem uma referência explícita ao resto do sistema. A necessidade de um melhor entendimento dos procedimentos formais e suas relações com a realidade física, aparece em vários artigos escritos para *a British Association for the Advancement of Science*, particularmente por James Challis entre 1833 e 1836, discutindo esses procedimentos ainda pouco familiares usados por Cauchy, Poisson e Fourier.[17]

Havia uma incerteza sobre a relação entre as hipóteses físicas e os procedimentos matemáticos. A escolha entre hipóteses específicas como a hipótese de ação à distância de Laplace em seu trabalho sobre capilaridade ou nos trabalhos de Cauchy sobre elasticidade, ou outros procedimentos mais gerais não estava clara.

Challis estava certo de que o desenvolvimento dos procedimentos matemáticos sobre meios contínuos poderia ajudar os estudos sobre luz, calor e eletricidade. Ele recomendou que trabalhos experimentais fossem feitos para testar os procedimentos matemáticos.

William Whewell também argumentou que o progresso viria apenas quando um significado físico claro fosse atribuído aos procedimentos formais abstratos. Enfatizou o trabalho de Fourier pois este não requer a ação à distância. Whewell elogiava os progressos

---

[16] DARRIGOL 2000, p. 78.
[17] MOYER 1978, p. 36. Challis escreveu trabalhos sobre teoria analítica da hidrodinâmica e capilaridade.

da matemática, mas ao mesmo tempo temia que os matemáticos estivessem entrando em um "labirinto profundo e charmoso muito mais longo e mais além do que a ciência física requeria".[18]

Para um pesquisador moderno, os modelos mecânicos para representar os fenômenos eletromagnéticos parecem absurdos, mas devemos olhar para eles com os olhos de um pesquisador do século XIX, considerando o contexto da época e os motivos pelos quais esses modelos foram elaborados.

A situação não era nem um pouco clara. Os físicos da época debatiam sobre qual seria o caráter dos campos elétrico e magnético (linear ou rotatório) e também como deveria ser a teoria de éter mais apropriada para explicar os fenômenos eletromagnéticos. Na segunda metade do século XIX houve muita discussão sobre essas e outras questões. Vamos apontar quais eram as principais questões debatidas na época e quais as opiniões dos físicos mais importantes sobre elas. Será enfatizado o trabalho dos físicos britânicos, cujas pesquisas resultaram na teoria de Maxwell. Autores que defendem teorias de ação à distância, como Ampère e Weber, não possuem grande interesse para a presente tese. O conteúdo discutido neste capítulo será retomado constantemente nos capítulos seguintes, nos quais analisaremos detalhadamente certos aspectos da argumentação usada na época.

2.2 Michael Faraday

Por não ser o objetivo deste trabalho, não vamos entrar em detalhes sobre todos os aspectos do trabalho de Michael Faraday (1791-1867). Nesta seção vamos apenas discutir alguns aspectos do seu trabalho que são relevantes para entendermos o desenvolvimento do conceito de campo no século XIX.

Em 1831, Faraday estava buscando analogias entre o comportamento da eletricidade em movimento na forma de corrente e do magnetismo. Faraday conhecia os experimentos de Hans Christian Ørsted (1771-1851) realizados em 1820 nos quais uma corrente elétrica

[18] MOYER 1978, p. 36.

pode induzir um campo magnético. Pensou que o efeito recíproco também poderia existir: um campo magnético poderia induzir uma corrente em um circuito. A idéia de Faraday era a de que se há circulação de corrente por um circuito, deveria surgir uma corrente induzida em um circuito próximo enquanto durar a corrente indutora. Faraday descobriu que não era exatamente assim que ocorria a indução de corrente. Percebeu que de fato havia uma corrente induzida, mas que durava apenas um instante enquanto a corrente indutora era ligada ou desligada, ou seja, a corrente induzida depende da variação da corrente indutora.

Seus primeiros experimentos para investigar essa possibilidade foram feitos em 1825, porém sem nenhum resultado positivo. Em 1831, Faraday utilizou bobinas enroladas em um anel de ferro para obter campos mais intensos (figura 2.1) e, com isso, observou que

> [...] com esse anel, quando o contato era fechado ou aberto e o circuito era ligado ou desligado, o impulso no galvanômetro era tão grande que fazia a agulha girar quatro ou cinco vezes antes que o ar e o magnetismo terrestre pudessem reduzir este movimento para uma mera oscilação.[19]

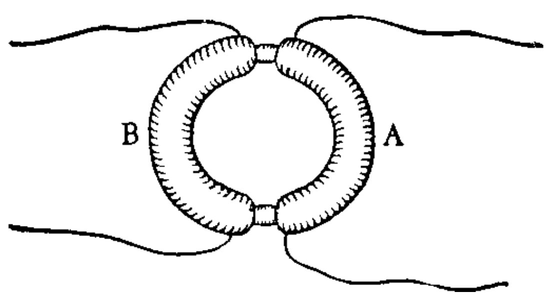

Figura 2.1. Quando o circuito da bobina A é ligado ou desligado, observa-se uma corrente induzida em B.

[19] FARADAY 1952, p. 269.

Mostrou que uma corrente também é induzida em um circuito quando a intensidade da corrente em um circuito próximo varia ou quando um ímã é aproximado do circuito, ou ainda quando o circuito se move na presença de um outro circuito ou ímã. Isto significa que a força eletromotriz induzida também depende do movimento relativo entre o fio e as linhas de força.

Faraday propôs uma nova forma de representar o estado do campo magnético para discutir o fenômeno de indução de correntes. Na época já era costume visualizar o campo magnético através da distribuição das curvas formadas por limalha de ferro espalhadas na região onde havia um campo magnético, como mostra a figura 2.2.[20] Essas curvas sugeriram a Faraday a idéia de "linhas de força magnética", ou curvas cujas direções em cada ponto coincidem com a direção da força magnética e o espaçamento entre as linhas indica sua intensidade ou magnitude.[21] Faraday imaginou que todo o espaço estaria permeado por essas linhas de força. Cada linha de força seria uma curva fechada que passaria em algum ponto de sua trajetória pelo ímã. Faraday explicou que a corrente elétrica induzida é diretamente proporcional ao número de linhas interceptadas pelo circuito durante o movimento. Esse é o princípio fundamental da indução de correntes.

[20] O termo *linhas de força* foi usado pelos filósofos escolásticos que o associaram ao magnetismo, por exemplo Niccolo Cabeo. Entre os escritores do século XVIII, La Hire menciona o uso de limalha de ferro

[21] WHITTAKER 1973, p. 171-72.

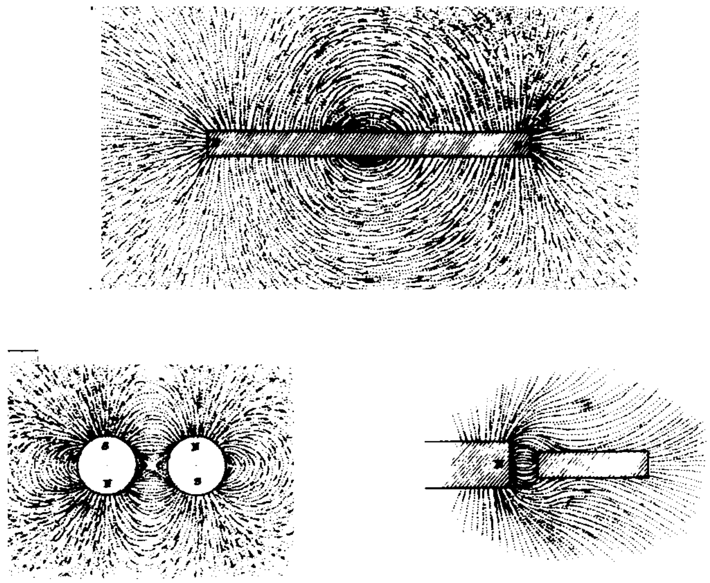

Figura 2. 2. Representação dos fenômenos elétrico e magnético por linhas de campo.

Faraday acreditava que a natureza da ação entre as partículas estava além do alcance dos experimentos. Ele evitou essa discussão definindo a ação entre as partículas como "contíguas": uma ação contígua afeta cada partícula sucessivamente, sem deixar de lado qualquer partícula.

Faraday enfatizou esse conceito de uma ação que se propaga através de um meio pela influência das partículas vizinhas e o aplicou em muitas partes da física. Aplicou esse mesmo conjunto de idéias para explicar as correntes elétricas. Para ele, a condução seria uma ação entre partículas vizinhas dependente das forças desenvolvidas na excitação elétrica que levariam as partículas a um estado de tensão ou polarização. Uma vez polarizadas, as partículas próximas teriam a capacidade de comunicar essas forças umas às outras e provocar a corrente.

Faraday definiu um *tubo de força* como o conjunto de linhas de força que interceptam uma pequena curva fechada e retornam para si mesmas. A partir de um tubo de força podemos saber a direção e a intensidade magnética pois o produto da magnitude pela seção reta é constante ao longo do tubo.[22] Por simplicidade, Faraday definiu linha de força unitária, de modo que a intensidade do campo é indicada pelo número de linhas de força que cortam perpendicularmente uma área unitária.

Faraday pensava constantemente em termos de linhas de força para representar a ação magnética pois "todos os pontos estabelecidos experimentalmente a respeito de tal ação, isto é, todos que não são hipotéticos, parecem ser bem e verdadeiramente representados por elas".

Supôs que um corpo no estado não polarizado tem suas moléculas formadas por átomos ligados uns aos outros por forças de afinidade química, que teria uma natureza elétrica. Essas forças também são exercidas entre átomos de diferentes moléculas com menor intensidade produzindo o fenômeno da coesão. Quando o corpo está em um campo elétrico, ocorre uma mudança na distribuição dessas forças: algumas são intensificadas e outras enfraquecidas; o efeito total seria simétrico à direção da força elétrica aplicada.

Essa polarização elétrica é análoga à polarização magnética que ocorre quando um corpo de ferro é colocado em um campo magnético; por isso era natural que Faraday introduzisse as *linhas de força elétrica* em suas discussões. Definiu uma linha de força elétrica como a curva cuja tangente tem em cada ponto a mesma direção que a intensidade elétrica. Sendo assim, toda ação elétrica se passa em um meio isolante que se polariza; os isolantes seriam os corpos que mantém o estado de polarização e os condutores aqueles nos quais as partículas não permanecem polarizadas.[23]

Faraday observou em 1845 que o plano de polarização de um feixe de luz rodava quando a luz passava por um vidro percorrido por linhas de campo magnético paralelas ao feixe de luz. Observou também o mesmo efeito para outros materiais além do vidro, batizados por Faraday de "diamagnéticos", por analogia aos "dielétricos".[24] Faraday

---

[22] Analogamente à vazão constante de um fluido através de um tubo.
[23] WHITTAKER 1973, p. 186.
[24] O termo "diamagnético" foi sugerido por Whewell (DARRIGOL 2000, p. 97)

observou também que o ângulo de rotação era proporcional à distância percorrida dentro do corpo diamagnético e à intensidade do campo magnético paralela ao percurso.[25]

Esse fenômeno o motivou a continuar pesquisando a influência da matéria sobre as linhas de campo magnético. Para o magnetismo a situação não era tão clara quanto para a eletricidade pois parecia que os efeitos contrários dos corpos magnéticos e diamagnéticos sobre as linhas de campo não poderiam ser explicados pelo mesmo mecanismo de ação entre partículas contíguas da matéria. Nessa época Faraday estava tentando interpretar tudo em termos de linhas de força. Explicou o fenômeno supondo que a indução magnética provoca nos corpos diamagnéticos um estado contrário ao produzido na matéria magnética, ou seja, se uma partícula de uma substância diamagnética for colocada em um campo magnético ela também se magnetiza paralelamente ao campo, mas a magnetização tem sentido contrário ao do campo externo, enquanto que nas substâncias "normais" essa magnetização é no mesmo sentido do campo externo. Essa explicação para o diamagnetismo foi aceita por outros pesquisadores, como W. Weber, Plücker, Reich e Tyndall.[26]

Inicialmente Faraday era cético sobre a realidade das linhas de força, interpretando-as como padrões geométricos no espaço representando as forças exercidas sobre corpos de teste elétricos e magnéticos. O convencimento de Faraday sobre a existência física dos campos evoluiu com o tempo. No começo de suas experiências, usou palavras e expressões que sugeriam uma realidade dos campos, tais como, "poder magnético". Mas em público manteve uma definição operacional das linhas, sem defender sua realidade, até que tivesse acumulado um número suficiente de argumentos favoráveis e atingido uma respeitabilidade. Seus argumentos da década de 1830 se referiam apenas ao efeito da matéria sobre a transmissão da força pois ele acreditava que havia provado que a força elétrica de uma partícula da matéria somente poderia atingir as partículas mais próximas através de uma cadeia de partículas contíguas. Neste sentido, as linhas de força elétrica

[25] SPENCER 1970, pp. 33-36.
[26] Sobre os estudos relacionados a diamagnetismo de Faraday veja GOODING 1981.

seriam reais. No entanto, a força também pode atravessar o vácuo. Neste caso não havia prova do caráter físico das linhas.[27]

2.3 A analogia entre eletricidade e o fluxo de calor de William Thomson

Ao contrário de Faraday (que era principalmente um experimental), William Thomson (1824–1907) era um matemático com profundos conhecimentos de mecânica analítica. Thomson dominava os métodos matemáticos franceses, que foram divulgados na Irlanda e na Escócia por James Thomson (pai de William Thomson), por John Pringle Nichol e William Meikleham, professores de William Thomson. O jovem Thomson estava em perfeitas condições para apreciar e desenvolver os trabalhos matemáticos franceses, tanto que estudou o *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier em duas semanas, aos dezesseis anos de idade.[28]

Os trabalhos de Fourier sobre calor e óptica chamaram a atenção dos britânicos por serem geométricos e pouco especulativos, agradando, assim, as inclinações pragmáticas e ilustrativas dos filósofos naturais britânicos. Partindo da lei de troca de calor entre elementos vizinhos de matéria, Fourier reduziu o problema da propagação de calor à solução de uma equação diferencial. A teoria do calor de Fourier era especialmente atraente pois não especulava sobre a natureza do calor e da matéria. Suas equações básicas tinham um significado empírico direto e atribuíram um papel central ao conceito de fluxo de calor através de uma superfície. Fourier enfatizou a relação entre a quantidade de calor que atravessa uma superfície por unidade de tempo com a taxa de variação de temperatura através da superfície. Em linguagem moderna, na teoria de Fourier, o gradiente de temperatura seria responsável pelo fluxo de calor através de uma superfície.

Thomson utilizou os métodos de Fourier no estudo da eletricidade e também aplicou resultados da eletrostática para obter resultados sobre a teoria de calor. Em linguagem atual,

[27] DARRIGOL 2000, p. 134.
[28] DARRIGOL 2000, p. 114.

a analogia que ele estabeleceu foi entre potencial elétrico e temperatura, por um lado, e campo elétrico (e cargas) e fluxo de calor (e fontes de calor). Ele, como Coulomb, provou que a força elétrica imediatamente fora de uma superfície fechada é normal à superfície e igual a 4π vezes a densidade superficial de carga. Conseqüentemente a densidade de fontes de calor que mantém certa temperatura constante sobre uma superfície é igual ao fluxo de calor através da superfície divido por 4π. A temperatura dentro de qualquer superfície isoterma depende da temperatura da superfície e do fluxo de calor em cada ponto da superfície, bem como de todas as fontes que estão dentro ou sobre a superfície. Esta propriedade é conseqüência da visão de Fourier da propagação de calor como sendo uma ação entre os elementos contíguos de volume. A analogia eletrostática é o teorema da superfície: a força eletrostática devida a qualquer distribuição de cargas elétricas é a mesma que a força devida a uma distribuição fictícia de carga sobre uma superfície com potencial V constante contendo todas as cargas reais, a densidade superficial sendo igual a força elétrica criada sobre a superfície pelas cargas reais divido por 4π.[29]

Green em 1828, Gauss e Chasles em 1839 já haviam publicado este teorema. Green e Gauss, como Thomson, atribuíram um papel central para a função V. No entanto, seus métodos eram puramente analíticos, baseados na integração parcial e nas formas quadráticas. A inovação de Thomson foi desenvolver um método de encontrar teoremas através de analogias formais entre duas teorias físicas. Em seu raciocínio, ele foi de uma teoria para outra várias vezes, transpondo conceitos e teoremas de uma para outra. O ponto inicial de uma teoria (lei de Coulomb) tornou-se resultado da outra (distribuição de temperatura de fontes puntiformes). Uma conseqüência óbvia de uma teoria (transferência local de calor na teoria de Fourier) tornou-se um teorema essencial da outra (fluxo do campo através de uma superfície).

Thomson sugeriu que a ação eletrostática poderia ser uma ação contígua no meio entre as fontes, como era a propagação de calor. Para designar a densidade elétrica ele usou

[29] THOMSON 1872, pp. 4-6.

o nome "densidade de matéria elétrica" que se refere à concepção de fluido mas usou também "intensidade elétrica" que se refere ao *estado* do corpo.

Thomson não gostava do estilo de Faraday, mas a partir de 1843 passou a usar certas expressões como "partículas contíguas", "meio intermediário", etc. Thomson percebeu que as idéias de Faraday sobre linhas de força eram semelhantes às suas próprias idéias sobre fluxo de calor enquanto estava desenvolvendo uma teoria matemática para o efeito dos dielétricos sobre a ação elétrica.

Thomson se entusiasmou muito com o trabalho de Green[30] de 1828 e o aplicou em eletricidade e magnetismo, hidrodinâmica e elasticidade. Green deu uma fundamentação completa para a teoria de potencial, estudou as soluções das equações de Poisson e Laplace e também estabeleceu vários teoremas que facilitaram as aplicações posteriores em eletricidade e magnetismo, hidrodinâmica, elasticidade, enriquecendo bastante a física das décadas de 1840 e 1850.

Em sua analogia entre eletrostática e fluxo de calor, Thomson não estava preocupado em entender fisicamente o que ocorre no espaço entre os condutores. Pretendia apenas mostrar como sua analogia poderia conectar duas interpretações possíveis, as de Coulomb e Faraday. As mesmas observações servem para sua analogia entre hidrodinâmica e magnetismo.[31] A analogia com o fluxo de calor sugeriu novos teoremas e manteve alguns aspectos geométricos do modelo de Faraday, enquanto que a analogia com tensões em um meio elástico ofereceu uma representação mecânica das forças elétrica e magnética que integraram as noções de Faraday de tensões em um campo.[32] Segundo Thomson, estas analogias podem ser consideradas como pontos de partida em direção a analogias mecânicas mais realísticas e poderiam resultar em uma teoria física para a propagação das forças elétrica e magnética.[33]

---

[30] GREEN 1828.
[31] DARRIGOL 2000, p. 136.
[32] No entanto, as tensões descritas por Thomson são diferentes das de Faraday e não resultam em expressões corretas para as forças mecânicas agindo sobre cargas, ímãs ou correntes.
[33] DARRIGOL 2000, p. 127.

Thomson percebeu a relevância da analogia entre eletrostática e fluxo de calor com as idéias de Faraday por volta de 1845, quando tentou relacionar as linhas de força elétrica de Faraday com o enfoque de ação à distância. Thomson interpretou a eletrostática enfatizando a distribuição espacial e a relação geométrica das forças elétricas. Para isso, usou a linguagem de equações diferenciais, teoria do potencial e teoremas de Green e Gauss, conseguindo com isso mostrar que o enfoque de ação à distância e as linhas de força de Faraday eram equivalentes do ponto de vista operacional e matemático.[34]

Poisson havia derivado a força eletrostática a partir de uma função V que satisfaz a mesma equação diferencial dada por Fourier para a distribuição de temperatura em um sólido homogêneo: $\frac{\partial V^2}{\partial x^2}+\frac{\partial V^2}{\partial y^2}+\frac{\partial V^2}{\partial z^2}=0$. No entanto, Fourier tratou as fontes como superficiais enquanto que Poisson incluiu as fontes de eletricidade na equação diferencial. Thomson estendeu a analogia introduzindo fontes puntiformes de calor. Neste caso, da equação de Fourier resulta que a temperatura em um ponto é inversamente proporcional à distância da fonte.[35]

Thomson superpôs as fontes puntiformes em uma superfície $d\omega_1^2$ com densidade ρ_1 para chegar na seguinte expressão para a temperatura v = $\iint \frac{\tilde{n}_1 d\omega_1^2}{r_1}$ que é idêntica à expressão do potencial V correspondente a uma densidade elétrica ρ_1.[36] Como vemos, a notação usada por Thomson é diferente da atual: ele usava um elemento de linha $d\omega_1$ elevado ao quadrado para representar um elemento de área. Vemos claramente que em sua analogia entre eletrostática e condução de calor, Thomson identificou calor com eletricidade, temperatura com potencial e as fontes de calor com as cargas elétricas.

Thomson imaginou fontes de calor sobre uma superfície fechada distribuídas isotermicamente. A temperatura dentro da superfície deve ser constante pois se não for,

[34] SIEGEL 1981, p. 241.
[35] DARRIGOL 2000, p. 115.
[36] THOMSON 1872, p. 3.

deveria haver um fluxo de calor em torno de uma pequena superfície ao redor de qualquer extremo de temperatura, contrariando a ausência de fontes internas. Analogamente, se um corpo sólido tem uma carga superficial que corresponde a um potencial V constante sobre a superfície, então V é uma constante dentro do corpo e a força elétrica se anula. Conseqüentemente a condição suficiente de equilíbrio para um condutor é que a força elétrica criada pela carga superficial deva ser perpendicular à superfície.[37] Nesta analogia, as superfícies equipotenciais em um caso corresponderiam às superfícies isotermas e uma carga elétrica corresponderia a uma fonte de calor.

2.4 A analogia com um meio elástico

Faraday acreditava que as forças elétrica e magnética se propagavam por meio de tensões em um meio elástico. Ele não tentou explicar essas tensões em termos de tensões mecânicas específicas. Ele achava que a dinâmica matemática não era capaz de explicar os conceitos de força e poder em que sua física estava baseada. Thomson pensava de forma diferente. Achava que uma tensão poderia ser entendida por uma analogia com um sólido elástico tensionado. Coincidentemente, George Gabriel Stokes havia acabado um elegante estudo sobre sólidos elásticos na época, proporcionando um novo enfoque sobre a dinâmica dos meios contínuos.[38]

Seguindo a tradição britânica de lidar com elementos de um contínuo, Stokes estudou a natureza do movimento mais geral de um elemento de fluido. Decompôs o movimento de um elemento do fluido em partes simétricas e antissimétricas, encontrando que o movimento mais geral poderia ser obtido pela superposição de três dilatações ou contrações em torno de três eixos ortogonais e uma rotação. Rotações não tensionam o elemento, somente as dilatações e contrações, resultando em três pressões adicionais

[37] THOMSON 1872. Essa analogia é o que hoje em dia chamamos de teorema de Gauss: o fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada deve ser igual a carga interna total dividida por 4π, pois o fluxo de calor correspondente é igual ao calor fornecido pelas fontes internas.
[38] DARRIGOL 2000, pp. 126-128.

positivas ou negativas ao longo dos eixos principais. Com essas hipóteses Stokes deduziu as equações de movimento de um sistema de tensões agindo sobre um elemento de superfície arbitrário.[39]

Thomson também tinha esta interpretação em mente quando descreveu os três tipos simples de soluções para as equações de equilíbrio de um sólido incompressível como análogas aos campos de uma carga puntiforme, de um dipolo magnético e de um elemento de corrente. Para o deslocamento de um sólido incompressível, a equação de equilíbrio de Stokes deve ser satisfeita e os três tipos de soluções devem satisfazer a condição de incompressibilidade:[40]

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \, , \tag{2.1}$$

onde α, β, γ são as projeções sobre os eixos coordenados de um pequeno deslocamento em um ponto dado por x, y, z do meio incompressível. Lembremos que na época o formalismo vetorial ainda não tinha sido desenvolvido: as grandezas vetoriais eram representadas por suas componentes (representadas por letras diferentes); as equações expressando relações vetoriais entre as grandezas também eram escritas na forma de componentes.

As três soluções obtidas por Thomson são

a) $\alpha = \frac{x}{r^3}$, $\beta = \frac{y}{r^3}$, $\gamma = \frac{z}{r^3}$, interpretada como a força elétrica devida à uma carga unitária.[41]

b) $X = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy}$, $Y = \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz}$, $Z = \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}$, interpretada como a força que um dipolo magnético exerce sobre uma unidade de magnetismo. Para Thomson, cada

[39] STOKES, *Mathematical and physical papers*, vol.1, pp. 75-129.
[40] THOMSON 1882, p.77.
[41] THOMSON 1882, p. 78.

componente da força representa rotações de um elemento do meio em torno dos eixos x, y, z.[42]

c) $\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}=\frac{mz-ny}{r^3}$, $\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}=\frac{nx-lz}{r^3}$, $\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}=\frac{ly-mx}{r^3}$, interpretada como a força que um elemento de corrente unitário, na direção dada por l, m, n, exerce sobre uma unidade de magnetismo no ponto x, y, z. Thomson conclui deste resultado que a rotação de qualquer elemento do meio expresso por essa solução representa a força de um elemento de corrente em um fio, em direção e magnitude.[43]

Esse tipo de raciocínio para tratar um sólido elástico se tornou uma ferramenta fundamental na física de campos. As expressões envolvendo derivadas parciais como $\partial\beta/\partial z - \partial\gamma/\partial y$, etc. passaram a indicar uma rotação local de um meio se α, β, γ forem entendidas como componentes de uma velocidade ou de um deslocamento.[44]

Thomson notou que a analogia deveria ser entre força elétrica e deslocamento elástico e que as forças magnética e eletromagnética seriam análogas a rotações. Os resultados de Thomson mostravam uma imagem da propagação da força elétrica ou magnética como sendo equivalente à forma como mudanças no deslocamento elástico se propagam através de um sólido elástico.[45]

A importância desta analogia está no fato de que ela é mecânica, isto é, representa as forças por estados mecânicos em um sólido elástico, sugerindo mais explicitamente a propagação da força por processos mecânicos no éter. Além disso, ela abrange não só a ação eletrostática mas também as ações magnética e eletromagnética.

Thomson especulou em um caderno de anotações em 1858 sobre um modelo geral para éter e matéria. Imaginou um fluido universal com infinitas rotações que talvez pudessem reduzir-se a redemoinhos permanentes. A rigidez girostática dos redemoinhos permitiria vibrações transversais do meio, identificadas com a luz. O calor seria a rotação

[42] THOMSON 1882, p. 79.
[43] THOMSON 1882, p. 80.
[44] Maxwell tinha esta idéia em mente quando introduziu o “curl” de um vetor em 1870. Veja a seção 3.9.
[45] Essa sugestão inspirou Maxwell.

dos redemoinhos. A eletricidade corresponderia às partes menos perturbadas do fluido entre os redemoinhos e uma corrente elétrica alteraria as rotações dos redemoinhos como uma mola ligada entre duas rodas. Esta conexão seria responsável pelo efeito Joule e pelo magnetismo, entendido como um alinhamento dos eixos dos redemoinhos. A atração magnética resultaria de uma força centrífuga dos redemoinhos combinada com uma pressão do fluido. A indução eletromagnética corresponderia a um acúmulo de momento nos movimentos de vórtices. O efeito Faraday seria o resultado da influência destes movimentos sobre vibrações transversais do meio. Estas foram as primeiras tentativas de Thomson de entender toda a física em termos de movimento de vórtices em um fluido.[46]

2.5 James Clerk Maxwell

Nessa seção vamos apresentar alguns aspectos dos modelos de éter desenvolvidos por Maxwell que serão úteis para entendermos melhor a discussão sobre as relações entre esses modelos e os aspectos matemáticos discutidos nos capítulos seguintes.

Maxwell passou pelas melhores universidades britânicas e foi fortemente influenciado por Faraday e Thomson (do qual foi aluno). Maxwell conhecia as teorias de ação à distância para tratar os fenômenos elétricos e magnéticos desenvolvidas por pesquisadores do continente. Leu Faraday e Thomson, depois Ampère e Kirchhoff e por último Neumann e Weber. O jovem Maxwell assimilou o conceito de campo de Faraday e desenvolveu uma antipatia pelas teorias continentais de ação à distância.[47]

Em seus trabalhos, Maxwell fez grande uso de modelos mecânicos desenvolvidos por Faraday e Thomson para representar os fenômenos eletromagnéticos, seguindo a tradição da física matemática de Cambridge no século XIX. Mas até que ponto essas imagens eram uma representação literal da realidade?

[46] DARRIGOL 2000, pp. 133-34.
[47] DARRIGOL 2000, p. 138.

Maxwell não tomava as equações de campo como a única coisa importante. Ele pensava ter construído uma teoria mecânica do campo eletromagnético, na qual o campo era um meio material e contínuo. Para obter suas equações, usou o tratamento formal de meios materiais contínuos que aprendeu principalmente com William Thomson. Para ele, relacionar eletromagnetismo com uma teoria de éter era importante pois lhe parecia fundamental a existência de modelos mecânicos adequados para explicar os fenômenos físicos.

Seguindo Thomson, Maxwell também identificou as linhas de força de Faraday com alterações mecânicas em um meio material. Um número infinito de mecanismos que preenchesse os requisitos poderia ser imaginado e Maxwell sabia disso. O mecanismo escolhido foi chamado por Maxwell de "modelo de trabalho". Este modelo de trabalho é semelhante a uma analogia pois ambos são uma representação concreta e pictórica. A diferença é que o modelo de trabalho deve produzir o efeito mecânico em questão, isto é, deve ser um modelo que realmente funcione.[48]

O enfoque de Maxwell sobre como tratar a física se aproximava bastante do de Thomson. Ambos atribuíram um papel central à geometria na expressão de idéias físicas e matemáticas e tinham um grande domínio da matemática e interesse em problemas teóricos. Além disso, possuíam uma ampla visão sobre os aspectos experimentais da física. Apesar da semelhança entre os interesses de Maxwell e Thomson, Maxwell se interessava mais pelos aspectos filosóficos do que Thomson. Maxwell era fascinado pelas figuras geométricas, interessou-se pelas questões relativas ao espaço e ao tempo como formas necessárias para nossa intuição sobre os fenômenos.

Para Maxwell o uso dos símbolos matemáticos nas equações estava sempre subordinado ao modelo físico. Em geral, seu uso de símbolos matemáticos era bem diferente do uso feito pelos continentais ou o uso moderno. Ele buscava consistência, completeza e simplicidade no modelo, não necessariamente nas equações. As equações

[48] SIEGEL 1985 p. 198.

seriam transcrições simbólicas de alguns aspectos do modelo e portanto não poderiam ser usadas seguramente sem ter o modelo completo em mente.

Antes do fim de 1854 Maxwell definiu linhas de força como linhas tangentes à força que age sobre um pólo magnético ou uma carga puntiforme. Seguindo Gauss e Thomson, também introduziu as superfícies equipotenciais normais às linhas de força. Sua primeira inovação foi considerar as linhas e as superfícies simultaneamente, de modo a permitir um raciocínio geométrico quantitativo. Para Maxwell, na representação de problemas elétricos e magnéticos a diferença de potencial entre duas equipotenciais sucessivas deveria ser constante. Em uma dada superfície equipotencial ele desenhou dois sistemas de curvas definindo células com tamanhos inversamente proporcionais à intensidade da força elétrica ou magnética e então desenhou os tubos de força passando através destas células, como mostra a figura 2.3. Os tubos desempenhavam o mesmo papel que as linhas de força unitárias de Faraday.[49]

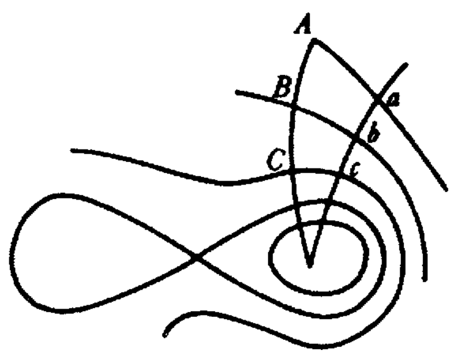

Figura 2. 3. Linhas de força e superfícies equipotenciais representadas em conjunto.

Os principais trabalhos nos quais Maxwell desenvolveu suas idéias sobre o papel do campo nos fenômenos eletromagnéticos e também suas concepções mecânicas do éter são *On Faraday's lines of force* publicado em 1856 e *On physical lines of force* publicado em 1861 e 1862. Maxwell publicou em 1873 o *Treatise on Electricity and Magnetism*, no qual expõe suas idéias na forma mais madura. Vamos apresentar um breve resumo das principais idéias contidas nestes trabalhos.

Ao ler o *Experimental Researches* de Faraday, Maxwell ficou bastante impressionado com a idéia de linhas de força. O artigo *On Faraday's lines of force*[50] foi uma tentativa de unir as idéias de Faraday com as analogias matemáticas desenvolvidas por Thomson e com isso obter uma teoria matemática para descrever as linhas de força de Faraday. Tratou o caso mais geral de condução heterogênea e anisotrópica enquanto que Thomson se concentrou no caso homogêneo. Introduziu as idéias de tubos de linhas de força e de células na analogia, aumentando o poder demonstrativo e apelo intuitivo da analogia. Seu objetivo era produzir um método que "requeresse atenção e imaginação, mas não cálculos."

Inicialmente Maxwell descreveu o movimento uniforme de um fluido incompressível e sem massa através de um meio resistivo com fontes e sumidouros. Dividiu o fluido em tubos nos quais uma unidade de volume passaria em uma unidade de tempo. As linhas de força representam a direção de um vetor; a magnitude (intensidade) deste vetor é inversamente proporcional à seção reta de um tubo formado pelas linhas, isto é, quanto maior a densidade de linhas, maior a magnitude do vetor.[51]

Maxwell assumiu também que a resistência do meio seria proporcional à velocidade do fluido, de tal modo que se a velocidade do fluido for v, então a resistência será dada por uma força igual a kv agindo sobre um elemento de fluido na direção contrária do movimento. Para manter a velocidade do elemento de volume constante, é preciso que haja uma diferença de pressão entre a parte posterior e anterior do elemento e que diminui na direção do movimento. Como a pressão varia continuamente no fluido, todos os pontos sob a mesma pressão definem uma superfície de pressão igual, perpendicular às linhas de movimento do fluido.[52] Como o movimento é uniforme e o fluido não tem massa, isto implica que o gradiente de pressão é proporcional à velocidade, como o fluxo de calor de Fourier é proporcional ao gradiente de temperatura.

---

[49] DARRIGOL 2000, p. 139.
[50] MAXWELL 1965, vol. 1, pp. 155-229.
[51] MAXWELL 1965, vol. 1, pp. 160-63 e DARRIGOL 2000, p. 143.
[52] MAXWELL 1965, vol. 1, p. 164.

A seguir Maxwell determina a velocidade e a pressão em um ponto qualquer de um fluido infinito no centro do qual há uma fonte unitária.[53] A pressão a uma distância infinita da fonte se anula. O fluido fluirá simetricamente a partir do centro. Como em uma unidade de tempo flui uma unidade de volume de fluido para fora de todas as superfícies esféricas ao redor do ponto, a velocidade a uma distância *r* da fonte será[54]

$$v = \frac{1}{4\pi r^2}. \tag{2.2}$$

Apesar de Maxwell não explicar esse resultado, podemos facilmente ver que está considerando

$$\frac{4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{cte}, \text{ logo } \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{cte}}{4\pi \mathrm{r}^2}.$$

A taxa de diminuição da pressão é kv ou $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{4\pi r^2}$. Integrando essa expressão e considerando que a pressão é igual a zero quando *r* é infinito, a pressão real em cada ponto será

$$p = \frac{1}{4\pi r}. \tag{2.3}$$

Segundo Maxwell, as idéias de linha de força como sendo um movimento de um fluido "podem ser modificadas para serem aplicadas às ciências de eletricidade estática, magnetismo permanente, magnetismo de indução e correntes galvânicas uniformes, deixando as leis do eletromagnetismo para uma consideração especial".[55]

Para a eletrostática, os tubos corresponderiam às linhas de indução elétrica de Faraday, a pressão ao potencial e a resistência do meio à capacidade indutiva do dielétrico.

[53] MAXWELL 1965, vol. 1, p. 167.

[54] Na realidade, a velocidade deveria ser multiplicada por uma constante para que as dimensões de velocidade sejam satisfeitas.

Para o magnetismo, os tubos corresponderiam às linhas de força magnética de Faraday, o gradiente de pressão à "força resultante do magnetismo" e a resistência do meio ao inverso do "poder condutor" das linhas de força de Faraday. Para a "eletrocinética" (eletrodinâmica) os tubos corresponderiam a um fluxo de linhas de corrente, a pressão ao potencial eletrostático ou tensão e a resistência do meio à resistência elétrica.

No caso da eletrostática, a aplicação é imediata, inclusive em seus aspectos matemáticos. A velocidade do fluido devida a todas as fontes seria proporcional à atração resultante entre todas as partículas:

> Como a atração resultante no problema elétrico é proporcional à diminuição de pressão no problema imaginário e como podemos escolher quaisquer valores para as constantes no problema imaginário, podemos assumir que a atração em qualquer direção é numericamente igual à diminuição da pressão naquela direção [...]. De modo que nos problemas elétricos comuns, a analogia com movimento de fluido é do tipo:[56]

$$
\begin{aligned}
&V = -p, \\
&X = -\frac{dp}{dx} = -ku, \\
&dm = \frac{k}{4\pi} S,
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

onde V é o potencial elétrico, X é a intensidade da força elétrica entre partículas, k capacidade indutiva do dielétrico, dm são as cargas elétricas produzidas pelas fontes S. As linhas de força são os tubos unitários do movimento do fluido e podem ser estimadas numericamente por esses tubos.

[55] MAXWELL 1956, vol. 1, p. 175.
[56] MAXWELL 1956, vol. 1, p. 176-77.

No caso do magnetismo, os dois pólos de um imã são representados por células unitárias, de tal modo que o fluido entra por uma face (que representa um sumidouro) e sai pela outra (que representa uma fonte), representando assim os pólos norte e sul do imã. Além disso,

> Se considerarmos a célula como parte de um sistema, o fluido saindo de uma célula fluirá através da próxima e assim sucessivamente de modo que a fonte se deslocará do fim de uma célula para o fim do tubo unitário [formado por todas as células]. Se todos os tubos começam e terminam em uma superfície, as fontes e os sumidouros estarão distribuídos inteiramente sobre esta superfície, e no caso de um imã com distribuição de magnetismo solenoidal ou tubular, toda a matéria magnética imaginária estará sobre esta superfície.[57]

Essa idéia descreve adequadamente a distribuição geométrica das linhas de força magnética no espaço, mas não permite entender as forças de atração e repulsão entre pólos magnéticos.

Maxwell expressou a lei de Faraday de indução eletromagnética em termos dos tubos. No caso de um circuito fechado, a força eletromotriz induzida depende da variação do número de tubos passando por ele:

> Quando o número de linhas da indução magnética indutiva através do circuito aumenta, a corrente induzida tenderá a diminuir o número de linhas e quando o número de linhas diminui, a corrente induzida tenderá a aumentá-las. [...] Em todos os casos, a força eletromotriz depende da *mudança* do número de linhas da ação magnética indutiva que passa pelo circuito.[58]

Neste artigo, apesar de Maxwell aplicar a idéia de linhas de força para vários casos, não há um modelo unificado que permita formar uma idéia clara dos mecanismos que

---

[57] MAXWELL 1965, vol. 1, p. 178.
[58] MAXWELL 1965, vol. 1, p. 186.

explicariam os fenômenos elétricos e magnéticos pois cada fenômeno é explicado de uma forma diferente e independente dos outros.

O próximo artigo sobre o assunto foi *On Faraday's Lines of Force*, publicado em 1861 e 1862. Seguindo Thomson, Maxwell desenvolveu a idéia de que os fenômenos eletromagnéticos são provocados por deslocamentos das partículas de um sólido elástico em um estado de tensão, de modo que o deslocamento angular seria proporcional à força magnética e o deslocamento relativo das partículas vizinhas corresponde em magnitude e direção à quantidade de corrente elétrica passando pelo ponto correspondente do campo eletromagnético.[59] A figura 2.4 mostra um vórtice ao redor de uma linha de campo que aponta na direção Sul-Norte.

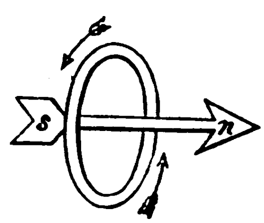

Figura 2. 4. O campo magnético em um ponto é uma rotação do éter em torno das linhas de campo.

Argumentou que se existirem vórtices no fluido ao longo das linhas de força, então a força centrífuga dos vórtices implicaria em uma pressão maior nas direções perpendiculares às linhas de força do que ao longo das linhas de força. Isto é equivalente a uma pressão isotrópica combinada com uma tensão ao longo das linhas de força. Analisando este problema,[60] Maxwell conclui que uma corrente elétrica de intensidade r fluindo na direção z através de uma área unitária pode ser calculada a partir das "componentes da força que age sobre uma extremidade de uma barra magnética unitária" α, β, γ da seguinte forma:[61]

[59] MAXWELL 1861a, p. 163.
[60] Não vamos apresentar todos os cálculos de Maxwell pois isto estaria além das intenções deste capítulo. Para mais detalhes, veja MAXWELL 1861a, pp. 165-75.
[61] MAXWELL 1861a, p. 171.

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) \tag{2.5}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) &= p, \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}\right) &= q, \ , \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right) &= r \end{aligned} \tag{2.6}$$

então *p, q, r* serão as quantidades de corrente por unidade de área perpendiculares aos eixos *x, y, z* respectivamente.

O cálculo vetorial ainda não existia na época. Como era costume,[62] Maxwell usava o formalismo de componentes para representar as grandezas vetoriais. Neste formalismo uma grandeza vetorial é representada por suas três componentes e são usadas três letras diferentes para representar cada componente (ou seja, não eram usados símbolos como E_x, E_y, E_z e sim F, G, H)

Como podemos ver, essas equações relacionam grandezas lineares (*p, q, r*) com grandezas rotacionais (α, β, γ). As equações possuem a forma do rotacional, em linguagem moderna. Esse tipo de equação aparece com freqüência nos modelos da época que interpretavam as grandezas elétricas como deslocamentos lineares e as grandezas magnéticas como deslocamentos angulares ou vice-versa.

Maxwell desenvolveu um modelo mecânico do campo magnético como sendo formado por vórtices moleculares. Com este modelo chegou perto de seu objetivo de descrever mecanicamente o eletromagnetismo baseado nos vórtices moleculares de Thomson. Neste artigo, considerou o éter formado por vórtices fechados em rotação, entre os quais haveria pequenas esferas que transmitiriam o movimento de um vórtice para outro.

Seguindo as considerações de Thomson sobre os vórtices moleculares, Maxwell se perguntou como um conjunto de vórtices próximos não se anulava já que as partes em contato de vórtices vizinhos giram em sentidos contrários. Devido à indução eletromagnética, Maxwell imaginou que os sistemas de vórtices agiriam como um mecanismo conectado capaz de transferir movimento elétrico de um condutor para outro. Imaginou um mecanismo semelhante a um conjunto de catracas capazes de transferir a rotação para os vórtices vizinhos. A idéia de Maxwell foi enrijecer o fluido dos vórtices e introduzir entre eles uma camada de pequenas partículas esféricas ("idle wheels") capazes de rolar entre os vórtices e com isso transmitir o movimento entre os vórtices vizinhos, como mostrado na figura 2.5.[63]

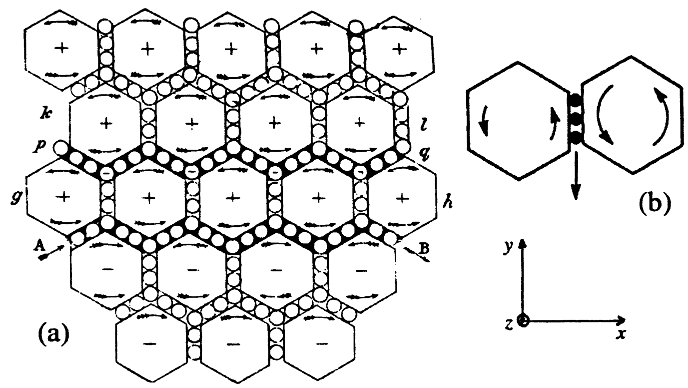

Figura 2. 5. Neste modelo, o movimento dos vórtices representa o campo magnético e o das esferas a corrente.

Através de considerações dinâmicas sobre as pressões e tensões envolvidas neste mecanismo, Maxwell mostrou que quando os vórtices vizinhos não giram com a mesma velocidade, as partículas são arrastadas lateralmente.

---

[62] Thomson também utilizou a notação de componentes cartesianas, como comentamos na seção 2.4.

[63] MAXWELL 1861a, p. 282-83. Esta figura de Maxwell apresenta um erro nos sentidos das setas dos vórtices representados em (a). O sentido correto está representado em (b), conforme DARRIGOL 2000, p. 150.

Usou neste trabalho a rotação dos vórtices moleculares para explicar a indução magnética, a translação das esferas entre os vórtices para explicar a corrente de condução e a deformação das células de vórtices moleculares para explicar o deslocamento elétrico, como veremos abaixo. A fricção conecta todos esses movimentos das partes da máquina causando uma dissipação de energia que não é observada.[64]

Além da cinemática, Maxwell também analisou a dinâmica de seu novo modelo. Como resultado da ação tangencial das partículas sobre as células aparece um torque agindo sobre as células. Este torque é igual à variação temporal do momento angular da célula que é proporcional à intensidade de campo magnético. De acordo com a ação e reação, deve haver uma força tangencial igual e oposta sobre as partículas. Maxwell interpretou esta força como sendo a força eletromotriz agindo sobre a corrente. Além disso, o rotacional da força eletromotriz é proporcional à derivada temporal da intensidade do campo. A equação final é

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}z}-\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{d}y}&=\mu\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t},\\ \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z}&=\mu\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t},\\ \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}x}&=\mu\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde P, Q, R são as componentes da “força eletromotriz” (campo elétrico) e α, β, γ são as componentes da intensidade magnética. Em notação moderna essa equação é escrita como $\nabla\times\mathbf{E} = -\mu\partial\mathbf{H}/\partial t$. De acordo com Maxwell,

> A partir destas equações podemos determinar a relação entre as alterações de movimento $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$, etc. e as forças exercidas sobre as camadas de partículas entre os

[64] MAXWELL 1861b, p. 291.

> vórtices ou, na linguagem da nossa hipótese, a relação entre mudanças no estado do campo magnético e as forças eletromotrizes.[65]

Notemos que, da mesma forma que as equações (2.6), as equações (2.7) também relacionam grandezas lineares com grandezas rotatórias.

Maxwell desenvolveu uma explicação intuitiva para sua expressão da lei de indução eletromagnética. Suponhamos dois circuitos separados por um isolante e uma corrente que começa a circular em um dos circuitos. O fluxo de partículas relacionado com a corrente induz uma rotação das células próximas fora do condutor. Como no isolante não há circulação de partículas, elas transmitem a rotação para a próxima camada de células e assim por diante até que a superfície do segundo condutor seja atingida. As partículas da superfície do condutor começam a circular e, devido à resistência do condutor, o movimento dessas partículas se transmite para as células internas do condutor. Se a resistência do condutor fosse nula, as partículas permaneceriam em movimento para sempre, sem transmitir esse movimento para as células. Portanto, neste modelo, a corrente induzida é temporária, devido à resistência interna dos condutores. Com esse modelo, Maxwell mostrou a possibilidade de reduzir os fenômenos eletromagnéticos a ações mecânica contíguas em um meio.[66]

Ao contrário de Thomson, Maxwell fez comentários filosóficos sobre o uso de analogias no *On Faraday's lines of force*. Para ele, as analogias físicas proporcionam um método de investigação que permite visualizar cada passo até se atingir uma concepção física clara, sem a necessidade de hipóteses baseadas em outras teorias físicas. A analogia do fluido se aplica de maneira indiferente para as partes separadas do eletromagnetismo sem considerar forças mecânicas entre corpos carregados ou ímãs e ignora a relação entre eletricidade e magnetismo. Através do estudo das leis usadas para tratar um sólido elástico

---

[65] MAXWELL 1861b, p. 290.

[66] Essa explicação vale para correntes fechadas, mas na época as propriedades eletrodinâmicas de correntes abertas não era acessível experimentalmente. DARRIGOL 2000, p. 151.

e o movimento de fluido viscoso, Maxwell esperava descobrir um método para formar uma concepção mecânica do eletromagnetismo.[67]

O desafio de Maxwell ao escrever o *Treatise on Electricity and Magnetism*, publicado pela primeira vez em 1873, era expor sua teoria e estabelecer os novos padrões para o tratamento dos problemas eletromagnéticos. Para isso, separou as bases matemáticas e empíricas das especulações teóricas. Maxwell gostaria que o *Treatise* fosse uma obra que pudesse ser compreendida, apesar de tratar todos os aspectos da teoria eletromagnética. Alguns desses aspectos não eram simples quando tratados por uma teoria dinâmica macroscópica sem entrar em detalhes mecânicos. Em particular, Maxwell dedicou um capítulo inteiro para a rotação de Faraday, na qual os vórtices moleculares tinham um papel central.[68]

O *Treatise on electricity and magnetism* tem uma parte principal que lida com aspectos gerais do campo eletromagnético, tais como a teoria de campo para a eletricidade baseada em conceitos de carga e corrente; uma derivação dinâmica das equações de movimento pelo método lagrangeano; e a essência da teoria eletromagnética da luz. A outra parte lida com os fenômenos menos compreendidos, tais como tipos especiais de condução elétrica, teorias especiais de magnetização e a rotação magneto-óptica. A parte principal trata a matéria e o éter como um único meio com propriedades macroscópicas variáveis e evita especulações sobre a natureza do éter e da matéria.

As principais idéias contidas no *Treatise* de Maxwell são, entre outras:

1) Carga não passa de uma descontinuidade no deslocamento elétrico (produto entre a capacidade indutiva e intensidade de campo elétrico) e a corrente é o éter em movimento;

2) para criar uma nova teoria basta modificar a função que descreve a energia do éter;

3) o efeito da matéria sobre o éter é misterioso e deve ser deixado de lado até que os problemas sejam resolvidos pelo método da energia;

---

67 MAXWELL 1965, vol. 1, p. 188.
68 SIEGEL 1985, p. 197.

4) a condutividade elétrica é misteriosa e tem algo a ver com a estrutura da matéria;

5) condições de contorno são ferramentas analíticas cruciais;

6) modelos mecânicos do éter são ilustrações importantíssimas das trocas de energia mas não refletem a verdadeira estrutura do éter.[69]

Maxwell percebeu que a elasticidade dos vórtices presente em seu modelo mecânico poderia ser útil para relacionar a eletrodinâmica com a óptica. Após obter as equações de movimento do seu sistema de vórtices e partículas, Maxwell se dedicou a determinar a taxa de propagação de perturbações através dele. Ele considerou ondas transversais no meio elástico cuja velocidade de propagação dependeria da elasticidade transversal *k* e da densidade do meio *m* e seria dada por $\sqrt{k/m}$. De acordo com Maxwell, a constante *k* é inversamente proporcional a ε e *m* é proporcional a μ.[70] Para determinar os coeficientes de proporcionalidade, Maxwell assumiu que as células seriam esféricas e que sua elasticidade seria devida a forças entre pares de moléculas. Chegou a $k = 1/4\pi^2\varepsilon$ e $m = \mu/4\pi^2$. Sendo assim, a velocidade de propagação da luz é dada por $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Comparando seu resultado com a medida de Fizeau e com os cálculos de Weber e Kohlrausch sobre a velocidade de sinais telegráficos, Maxwell encontrou uma grande concordância. Concluiu que a luz é uma vibração transversal do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos.

Maxwell definiu as grandezas eletromagnéticas básicas de uma maneira neutra, separando a base matemática e os fundamentos experimentais de uma teoria mais especulativa, que entraria em detalhes sobre os modelos dos campos. Com essas definições neutras ele pôde fazer vários desenvolvimentos matemáticos sem decidir qual a natureza da eletricidade e do magnetismo. Apesar de apresentar ambas as visões e as relações entre elas, Maxwell preferia explicitamente a visão de Faraday de campo.[71]

---

[69] BUCHWALD 1985, p. 230.

[70] Esta questão também pode ser analisada do ponto de vista da análise dimensional, conforme discutido no capítulo 5 desta tese.

[71] DARRIGOL 2000, p. 168

Maxwell estava ciente de que sua teoria era incompleta no que se refere à relação entre éter e matéria. O modelo geral de polarização dielétrica e magnética e também a idéia de correntes controlando um movimento oculto implicavam que éter e matéria se comportariam como um único meio com capacidade indutiva, permeabilidade e condutividade variáveis.[72]

A física de Maxwell se distanciou da física continental ao recusar a ação à distância e os fluidos elétricos. O modelo de vórtices de Maxwell explicava muito bem todos os problemas eletrodinâmicos e eletrostáticos conhecidos por Maxwell e as críticas feitas ao seu modelo se devem ao fato de os comentadores não distinguirem corretamente conceitos relevantes como corrente e carga e também não entenderem o mecanismo proposto por Maxwell.[73]

A metodologia de Maxwell tem muitos aspectos inovadores. Desenvolveu a classificação das grandezas matemáticas como um atalho através do método das analogias formais. Ele tinha uma visão sobre as relações topológicas dos campos, introduzindo figuras, linhas e superfícies para representá-los. Deu um peso à geometria muito maior que Thomson. Introduziu uma espécie de reducionismo mecânico, enfatizando o estudo da lagrangeana do problema, preenchendo a teoria com metáforas, ilustrações e energias.

No que se refere ao desenvolvimento do formalismo matemático utilizado no eletromagnetismo, tema desta tese, Maxwell também foi uma figura importante. Na época em que escreveu o *Treatise on Electricity and Magnetism* o formalismo comumente usado pelos físicos empregava componentes cartesianas. Maxwell utilizou este formalismo mas, em várias partes de seu livro, escreveu os resultados mais importantes na forma de quatérnions e também utilizou algumas idéias do cálculo de quatérnions[74] como parte integrante do desenvolvimento de sua teoria. Por exemplo, ao escrever as equações da lei de Ampère, utilizou os dois formalismos:

---

[72] DARRIGOL 2000, p. 170.
[73] SIEGEL 1975.
[74] Ver capítulo 3.

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{(Equations of}\\ \text{Electric Currents.)}\end{array} \tag{2.8}$$

$$4\pi \mathfrak{C} = V.\nabla \mathfrak{H} \tag{2.9}$$

Maxwell teve o importantíssimo papel de despertar a curiosidade dos leitores da época sobre o cálculo de quatérnions, entre eles Willard Gibbs e Oliver Heaviside.[75]

2.6 Modelos mecânicos de éter

A teoria eletromagnética, associada à busca de explicações mecânicas para os fenômenos eletromagnéticos presente no trabalho de Maxwell, exerceu enorme influência na época. Os pesquisadores que estudavam o eletromagnetismo e o éter se dedicaram a construir modelos que fossem consistentes internamente com os princípios mecânicos e que também fossem capazes de explicar um grande número de fenômenos relacionados com eletromagnetismo e óptica.

As tentativas de Thomson e Maxwell de representar o meio elétrico por modelos mecânicos abriu um novo campo de investigações. O estudo desses modelos mecânicos pareceu ser um caminho para explicar as forças elétrica, magnética e gravitacional pela ação do meio e com isso deixar de lado as teorias de ação à distância.[76]

Havia dois grupos de modelos para o éter. Em alguns modelos, como o discutido por Maxwell em 1855 e depois desenvolvido por Helmholtz, a força magnética tem um

[75] Esse assunto será discutido em detalhes no capítulo seguinte.
[76] WHITTAKER 1973, p. 279.

caráter linear e a elétrica um caráter rotatório. Em outros, como o de Thomson de 1847 e o de Maxwell de 1861-62, a força elétrica era vista como uma força de caráter linear e a força magnética como um caráter rotatório. Podemos classificar os modelos de éter nesses dois grupos: os que associavam um caráter linear ao magnetismo e um caráter rotatório à eletricidade e os que associavam um caráter linear à corrente e um caráter rotatório ao magnetismo.

Um fio conduzindo uma corrente elétrica tende a girar em torno de um pólo magnético, e um pólo magnético tende a girar em torno de um fio conduzindo corrente elétrica, como Faraday mostrou experimentalmente em 1821 (figura 2.6). O estudo de fenômenos como esses indica que ou os fenômenos elétricos ou os fenômenos magnéticos deveriam ser explicados por alguma coisa envolvendo rotações. A partir da análise desses e de outros fenômenos, a idéia de linhas de força girantes (como tubos rodando em torno de seus eixos) surgiu nos trabalhos de vários pesquisadores, em meados do século XIX.

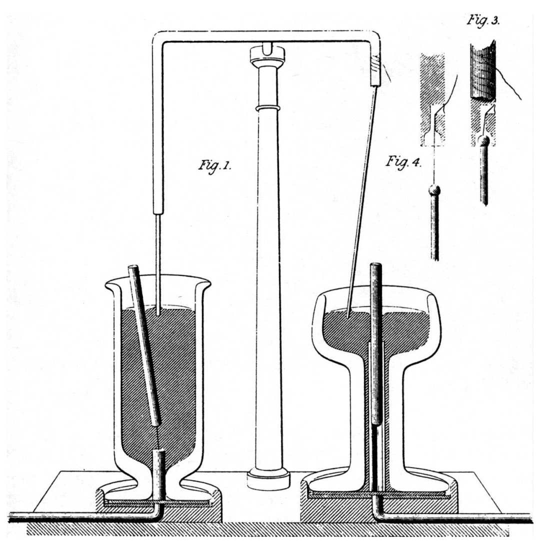

Figura 2. 6. Montagem de Faraday do experimento que mostra efeitos rotatórios causados por correntes e magnetos.

Em 1856 Thomson publicou uma interpretação alternativa para o magnetismo. Concluiu, pelo estudo da rotação magnética do plano de polarização da luz, que o magnetismo teria um caráter rotatório e especulou em um caderno de anotações que o momento angular resultante do movimento térmico dos corpos poderia ser uma medida do momento magnético.

As duas interpretações do magnetismo, ou seja, o caráter linear e o caráter rotatório, ocorrem freqüentemente em sua história. O caráter linear se fortaleceu com a publicação em 1858 dos trabalhos de Helmholtz[77] sobre o movimento dos vórtices pois ele mostrou que se um campo magnético produzido por corrente elétrica tiver um caráter linear como o da velocidade do fluido, então a corrente elétrica corresponderia a filamentos em forma de vórtices no fluido. Essa analogia correlaciona muitos teoremas da hidrodinâmica e eletricidade.

Uma das grandes contribuições de Helmholtz foi sua descoberta em 1858 de que um vórtice em um fluido perfeito é um tipo de movimento que não pode ser destruído pois pode ser visto como se combinando e interagindo uns com os outros, embora cada um consista de um movimento que permeia todo o fluido. Helmholtz mostrou que em seu modelo os filamentos de vórtices interagem mecanicamente como correntes lineares com sinal trocado, as tensões dos vórtices correspondem a correntes elétricas e a velocidade do fluido na vizinhança dos filamentos corresponde à força magnética, os pólos magnéticos seriam representados como fontes e sumidouros de fluido.[78]

Neste tipo de modelo, a força elétrica seria representada pela velocidade de rotação do meio. Seria esperado que um forte campo elétrico pudesse afetar a propagação da luz de maneira perceptível. Como isso nunca foi observado, esse fato era usado como um argumento contra a validade do modelo.

Até agora estudamos modelos que representam a força magnética como a velocidade em um líquido ou como um deslocamento de um sólido elástico. George Francis FitzGerald (1851-1901) comparou em 1879 a força magnética com a velocidade em um sólido quasi-elástico do tipo de James MacCullagh de 1839. Normalmente, o éter era

[77] HELMHOLTZ 1867.
[78] WHITTAKER 1973, p. 293 e HELMHOLTZ 1867.

considerado como um sólido elástico capaz de resistir a compressão e deformação. A energia potencial de deformação depende apenas de variações do tamanho e da forma dos elementos de volume, isto é, de suas compressões e deformações. No éter de MacCullagh, a energia potencial depende apenas das rotações dos elementos de volume. Este modelo é solução para o problema de se encontrar um meio cujas vibrações possuam as mesmas propriedades dinâmicas que as vibrações luminosas pois ele não permite a existência de ondas longitudinais.[79]

No modelo de FitzGerald, o deslocamento elétrico corresponde a rotações dos elementos de volume do éter, a carga elétrica deve ser representada por uma deformação do éter e a capacidade indutiva específica ε corresponde ao inverso da constante de elasticidade de MacCullagh. Assim parece possível estender as propriedades deste éter para representar, além dos fenômenos ópticos, os fenômenos elétricos e magnéticos.[80]

Outros físicos pensavam de forma diferente, principalmente depois que Stokes mostrou em 1862 que o meio de MacCullagh violava o principio de ação e reação, isto é, a rotação absoluta de um elemento do meio necessitaria de um torque elástico restaurador. Ninguém levava a teoria de MacCullagh a sério até que FitzGerald a ressuscitou em 1879.

O trabalho de FitzGerald não deve ser interpretado como uma renúncia ao éter mecânico. Ele apenas corroborou as idéias de MacCullagh de que o éter não se pareceria com nenhuma substância encontrada em nosso mundo material. O éter não seria um sólido elástico, gelatina, espuma ou qualquer outra coisa que Stokes e Thomson pudessem pensar, mas poderia ser um meio mecânico de um tipo completamente diferente.[81]

O artigo de FitzGerald inaugurou uma nova estratégia de pesquisa que consistiu em integrar os fenômenos magneto-ópticos com a teoria de Maxwell sem entrar em especulações microscópicas. A idéia básica era modificar as equações de campo de acordo com os fundamentos dinâmicos da teoria. FitzGerald fez isso escrevendo uma função lagrangeana para as equações de campo de Maxwell e depois adicionando pequenos termos

[79] WHITTAKER 1973, pp. 142-145.
[80] WHITTAKER 1973, p. 287.
[81] DARRIGOL 2000, p. 192.

nesta lagrangeana.[82] Outros modelos mecânicos para o campo eletromagnético baseados neste modelo de FitzGerald foram estudados por A. Sommerfeld, R. Reiff e Sir J. Larmor.[83]

O estudo da recepção da teoria de Maxwell publicada no *Treatise* é útil para entendermos melhor sua originalidade e também desfazer o mito de sua superioridade. Thomson considerou a teoria de Maxwell como um retrocesso em relação aos modelos mecânicos pois não podia aceitar o tratamento lagrangeano dos mecanismos ocultos como uma fundamentação mecânica suficiente. Para Thomson, era absolutamente necessária a possibilidade de se elaborar um modelo mecânico comum para poder explicar a natureza da luz:

> Eu nunca me satisfaço até que consiga elaborar um modelo mecânico de uma coisa. Se posso fazer um modelo mecânico, posso entender. [...] acredito firmemente em uma teoria eletromagnética da luz, e quando entendermos a eletricidade, o magnetismo e a luz, vê-los-emos todos como partes de um todo. Mas eu quero entender a luz muito bem, sem introduzir coisas que entendemos menos ainda. É por isso que adoto a mecânica pura, posso elaborar um modelo em mecânica pura. Mas não o posso em eletromagnetismo. [84]

Após o experimento de Hertz que confirmou a existência de ondas eletromagnéticas, Thomson se entusiasmou e teceu alguns elogios à teoria de Maxwell. No entanto, manteve suas críticas às teorias especulativas e continuou buscando alternativas à teoria de Maxwell. O simbolismo de Maxwell seria um “mero niilismo, não tendo nada a ver com a Filosofia Natural, por conectar duas fórmulas de energia, eletromagnética e eletrostática, e ficar feliz com um vetor e se deliciar com uma página de fórmulas simétricas”.[85]

---

[82] Sobre a formulação lagrangeana do eletromagnetismo veja a seção 2.7.
[83] Larmor supôs que a carga elétrica existe na forma de elétrons discretos. Neste modelo, os elétrons e todo corpo material feito por elétrons seriam estruturados a partir do éter, contendo uma atmosfera de éter deformado ao seu redor e a ação a distância seria abolida.
[84] DARRIGOL 2000, p. 178.
[85] THOMPSON 1976, vol. 2, p. 1065.

Lodge publicou em 1889 seu livro *Modern Views of Electricity* no qual introduziu vários modelos mecânicos novos sem deixar claros seus limites e inter-relações. Para o capacitor apresentou modelos de corda e bolinha, sistema hidro-pneumático e rodas dentadas. Apesar de ter a pretensão de elaborar um único modelo mecânico que explicasse todo o eletromagnetismo ele apresentou uma grande variedade de modelos incompatíveis. Pierre Duhem comentou que ler seu livro dava a impressão de estar entrando em uma fábrica ao invés da moradia da razão. Mesmo para o ponto de vista mecanicista britânico o livro de Lodge era um extremo, sendo considerado "meramente hipotético" por Poynting.[86]

2.7 A formulação lagrangeana do eletromagnetismo

Com vimos, Maxwell tinha a convicção de que era possível explicar mecanicamente os fenômenos eletromagnéticos e, portanto, explorou vários modelos de éter mecânicos diferentes para descrever tais fenômenos. No entanto, ao escrever o *Treatise on electricity and magnetism*, Maxwell não se restringiu a explorar nenhum modelo mecânico específico pois os detalhes destes modelos eram altamente arbitrários e controversos.

O seu desafio era expor sua teoria e estabelecer os novos padrões para o tratamento dos problemas eletromagnéticos sem se ater a um modelo mecânico em particular. Para isso, separou as bases matemáticas e empíricas das especulações teóricas, utilizando o formalismo de Lagrange na qual o movimento de pontos de um mecanismo conectado pode ser estudado sem o conhecimento de suas relações internas, como uma caixa preta.

> A natureza das conexões das partes de um sistema nos é desconhecida, mas como temos métodos dinâmicos de investigação que não requerem um conhecimento do mecanismo do sistema, podemos aplicá-los neste caso.[87]

[86] DARRIGOL 2000, pp. 187-188.
[87] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 213.

Para desenvolver a formulação lagrangeana, Maxwell interpretou as energias eletrostática e eletromotriz mecanicamente. De acordo com Maxwell,

> A expressão mais geral para a energia elétrica em um meio por unidade de volume é metade do produto entre a intensidade eletromotriz e polarização elétrica multiplicado pelo cosseno do ângulo entre suas direções.[88]

Para Maxwell, a ação mecânica observada entre dois corpos eletrizados ocorre através de um meio e a ação de um corpo sobre o outro se dá por meio de tração (como de uma corda) ou pressão (como de uma vara). Desta forma, o meio deve estar em um estado de tensão. A natureza desta tensão é uma tração ao longo das linhas de forca combinada com uma pressão em todas as direções perpendiculares às linhas. Isso explicaria a atração entre cargas opostas (unidas por linhas de força) e a tendência dessas linhas de força de se afastarem produzindo repulsão entre cargas iguais. Segundo Maxwell,

> A magnitude desta tensão é proporcional à energia da eletrificação por unidade de volume, ou em outras palavras, ao quadrado da intensidade eletromotriz multiplicada pela capacidade indutiva específica do meio.[89]

Esta energia está armazenada no meio dielétrico ou no vácuo na forma de um estado de pressão que seria a polarização dielétrica. Desta forma a energia eletrostática é associada a uma energia potencial elástica do meio.[90]

Maxwell associa a energia magnética a um tipo de energia cinética do meio. Seu argumento é bastante interessante pois parte de um caso mais intuitivo, que é a associação entre corrente elétrica e energia cinética e, a partir disso, associa energia magnética à energia cinética:[91]

---

[88] Em notação moderna, a energia eletrostática pode ser expressa como ½ **E.D**. MAXWELL 1954, vol. 1, p. 63.
[89] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 63.
[90] MAXWELL 1954, vol. 1, pp. 68 e 165.
[91] MAXWELL 1954, vol. 2, pp. 197-98.

> [...] um sistema contendo uma corrente elétrica aloja energia de algum tipo; e como não podemos pensar em uma corrente elétrica, exceto como um fenômeno cinético, sua energia deve ser energia cinética [...]. Podemos nos perguntar se não pode haver algum tipo de movimento no espaço exterior ao fio, que não é ocupado pela corrente elétrica, mas no qual os efeitos eletromagnéticos se manifestam.

Para chegar à energia magnética, Maxwell inicialmente calcula a energia de um circuito percorrido por uma corrente. A seguir, escreve a corrente em termos da força magnética (campo magnético) e mostra que a mesma expressão da energia pode ser obtida através de uma integral sobre todo o espaço, chegando a uma expressão que envolve o produto escalar entre a força magnética e a indução magnética.[92]

A energia eletrocinética (eletromagnética) de um sistema pode ser obtida por duas expressões diferentes, cada uma delas relacionada com uma interpretação física diferente da ação entre correntes:[93]

> A energia eletrocinética do sistema pode ser expressa como uma integral sobre a região onde há correntes elétricas ou como uma integral sobre todas as partes onde existe força magnética. A primeira integral, é a expressão natural para a teoria que supõe que as correntes agem entre si diretamente à distância. Enquanto que a segunda é apropriada para a teoria que pretende explicar a ação entre correntes por alguma ação intermediada no espaço entre elas. Como neste tratado adotamos o último método de investigação, nós naturalmente adotamos a segunda expressão como dando a forma mais significativa para a energia cinética.

Sendo assim, a energia do campo consiste de duas partes: a eletrostática e a eletromagnética, associadas respectivamente à energia potencial e à cinética. As expressões para essas duas partes da energia, na notação de Maxwell, são respectivamente:[94]

---

[92] MAXWELL 1954, vol. 2, pp. 272-73.
[93] MAXWELL 1954, vol. 2, pp. 273-74.
[94] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 276.

$$W = \frac{1}{2}\iiint(Pf + Qg + Rh)dxdydz$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\iiint(a\alpha + b\beta + c\gamma)dxdydz$$

onde *P, Q, R* são as componentes da intensidade eletromotriz (campo elétrico), *f, g, h* são as componentes do deslocamento elétrico, *a, b, c* são as componentes da indução magnética e α, β, γ as componentes da força magnética (campo magnético).

Poincaré escreveu nas suas notas de aulas ministradas na Sorbonne em 1888, 1890 e 1899 que a teoria de Maxwell pode causar uma certa decepção ao leitor pois ela não dá uma explicação mecânica para a teoria eletromagnética, apenas mostra que tal explicação é possível.[95] Poincaré vai mais além sobre a possibilidade de construir um modelo mecânico para o eletromagnetismo. Afirma que sempre que é possível escrever as funções energia cinética T(q, q') e energia potencial U(q), ou seja, quando existe uma explicação mecânica para um fenômeno, podemos encontrar "infinitas explicações mecânicas" para tal fenômeno:[96]

> Se um dado fenômeno comporta uma explicação mecânica completa, ele comportará uma infinidade de outras que dão conta igualmente bem de todas as particularidades reveladas pela experiência.

Como exemplo, cita o caso da eletrostática, no qual a teoria de um fluido elétrico e a teoria de dois fluidos elétricos podem explicar satisfatoriamente os fenômenos eletrostáticos.

Em suas discussões sobre o caráter cinético da energia magnética, Maxwell introduziu o potencial vetor, denotado pela letra **U**, cujas componentes são *F, G, H*. Como a indução magnética **B** através de uma superfície delimitada por uma curva fechada depende

---

[95] POINCARÉ 1901, p. iv.

apenas da curva e não da superfície, é possível determinar a indução através de uma curva fechada por um processo que depende apenas da curva. Isso pode ser feito encontrando um vetor **U** relacionado com **B**, de modo que a integral de linha de **U** sobre a curva fechada seja igual à integral de superfície de **B** sobre toda a superfície delimitada pela curva.[97] A relação entre as componentes de **B** e de **U** é[98]

$$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$
$$b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx},$$
$$c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Essa é uma consideração geométrica utilizada até os dias de hoje. No entanto, Maxwell também atribuiu um significado físico para o potencial vetor, relacionado com propriedades mecânicas do éter. Analisando a interação entre correntes, Maxwell obteve que **U** representa a integral temporal da intensidade eletromotriz (campo elétrico) que uma partícula poderia sentir quando há uma variação de corrente em um circuito, o que representa um momento, chamado de "momento eletrocinético".[99]

2.8 Conclusão

A física do século XIX tinha uma grande preocupação em interpretar mecanicamente os fenômenos e por isso foram construídos modelos mecânicos para descrever os fenômenos eletromagnéticos. Esses modelos foram baseados em analogias com fluxo de calor a partir do trabalho de Fourier, em modelos hidrodinâmicos e em modelos de meio elásticos desenvolvidos por Stokes, Thomson, Green e outros. O uso de

[96] POINCARÉ 1901, p. viii.
[97] MAXWELL 1954, vol. 2, pp. 29-32.
[98] Maxwell considerou que isso é válido se as componentes um vetor obedecerem a propriedade $\nabla.\mathbf{U} = 0$ (em notação moderna), veja MAXWELL 1954, vol. 1, p. 27.

analogias por Thomson e Maxwell foi importante para o desenvolvimento do eletromagnetismo pois mostrou que há uma semelhança entre as equações dos fenômenos utilizados e as equações dos fenômenos eletromagnéticos. A partir dessa semelhança matemática, ambos passaram a interpretar os fenômenos eletromagnéticos como fisicamente análogos a outros fenômenos.

Em seus primeiros trabalhos Maxwell explorou analogias com a condução de calor, escoamento de um fluido em um meio resistivo, deslocamentos em um sólido elástico e movimento de vórtices mecânicos. Ao sistematizar sua teoria na obra *Treatise on electricity and magnetism*, Maxwell preferiu utilizar o enfoque lagrangeano para não precisar se ater a nenhum modelo mecânico em particular. Considerou que se podemos escrever a lagrangeana de um problema significa que é possível construir um modelo mecânico. Cerca de 24 anos depois, Poincaré mostrou que sempre que podemos escrever uma lagrangeana, podemos ter infinitos modelos mecânicos que descrevem igualmente bem os fenômenos observados. Sendo assim, o fato de existir a lagrangeana implica na possibilidade de elaborarmos uma explicação mecânica para os fenômenos eletromagnéticos.

O formalismo matemático usado por eles era o formalismo de componentes cartesianas (o formalismo vetorial ainda não existia) junto com um amplo uso da idéia de operadores diferenciais (sem este nome) que aparecia na forma de derivadas parciais com relação ao tempo e às coordenadas espaciais, escritos na forma de componentes cartesianas.

O uso dos operadores diferenciais para tratar os fenômenos eletromagnéticos só faz sentido dentro de uma teoria de campo eletromagnético. Se estes fenômenos forem explicados através de uma teoria de ação à distância não podemos usar as idéias de operadores diferenciais pois eles supõem a existência de grandezas distribuídas de forma contínua por todo o espaço, representando as propriedades de um meio contínuo que sofreria rotações e translações infinitesimais. No caso de teorias de ação à distância, basta o uso das idéias de grandezas direcionadas como força, velocidade, etc., que podem ser representadas por componentes cartesianas e, posteriormente, por vetores. Segundo James

[99] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 232.

Clerk Maxwell (1831-1879), "a integral é a expressão matemática apropriada para uma teoria de ação entre partículas à distância, enquanto que a equação diferencial é a expressão apropriada para uma teoria de ação exercida entre as partes contíguas de um meio".[100]

É importante termos em mente que as equações utilizadas nos modelos mecânicos de Thomson e Maxwell para descrever os fenômenos que envolvem o magnetismo são equações que relacionam deslocamentos lineares com deslocamentos angulares. Por isso, para que um novo formalismo matemático seja realmente útil, além da existência de operadores diferenciais, é interessante que ele permita escrever essas relações de forma compacta e clara.

Atualmente, temos símbolos e nomes como ∇, div, rot, etc. para designar esses operadores. Na época nem os nomes nem os símbolos eram usados, no entanto, suas idéias foram amplamente usadas. Como veremos no capítulo seguinte, esses nomes, bem como os símbolos foram inventados juntamente com a invenção do formalismo vetorial por Gibbs e Heaviside, a partir do cálculo de quatérnions, como uma maneira de simplificar o formalismo matemático usado nas teorias de campo, seguindo as sugestões de Maxwell.

[100] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 124.

3. O DESENVOLVIMENTO DO FORMALISMO VETORIAL A PARTIR DO CÁLCULO DE QUATÉRNIONS

3.1 Introdução

Como vimos no capítulo 2, a física do século XIX trouxe o conceito de campo e com ele um grande número de entidades do tipo que atualmente chamamos "vetores". Essas inovações vieram em parte dos desenvolvimentos em mecânica (especialmente hidrodinâmica), da óptica teórica, do desenvolvimento da teoria de potencial e sobretudo do sucesso da teoria eletromagnética.

O formalismo vetorial conhecido atualmente não existia na época e utilizavam-se as fórmulas envolvendo as componentes, para tratar as grandezas eletromagnéticas. Utilizando-se esse formalismo, o número de equações envolvidas nos diversos problemas é enorme. Surge, assim, a necessidade de um método de análise para lidar com essas novas entidades de uma maneira mais prática. James Clerk Maxwell (1831–1879) foi uma figura muito influente na história da análise vetorial pois mostrou a necessidade e importância de um enfoque vetorial para a solução dos problemas físicos da época. Neste capítulo vamos discutir como ocorreu o desenvolvimento do formalismo vetorial, suas origens e influências.

A questão debatida no final do século XIX era qual o sistema matemático mais apropriado para tratar as grandezas vetoriais. William Rowan Hamilton (1805–1865) e seus seguidores, principalmente Peter Tait, acreditavam que os quatérnions eram a ferramenta apropriada para resolver problemas em física. A álgebra de quatérnions foi inventada por Hamilton em 1843, mas suas aplicações físicas foram desenvolvidas principalmente por Tait a partir de 1860. Os quatérnions são formados por quatro números: um escalar e três componentes de um vetor[101], que formam uma álgebra não comutativa. A teoria dos

[101] Vamos usar o termo "vetor" para designar um vetor no espaço euclidiano, seguindo a nomenclatura da época.

quatérnions contém as leis da álgebra vetorial, incluindo a soma de vetores, os produtos escalar e vetorial, o operador ∇, os teoremas de Gauss e Stokes na forma vetorial e funções lineares vetoriais. Todos estes aspectos figuram nos atuais manuais de álgebra vetorial com outra notação e usando o conceito de vetor no espaço tridimensional e não de quatérnion.

A análise vetorial usada para tratar o espaço euclidiano (como a conhecemos hoje) não existia no tempo de Maxwell e foi inventada independentemente por Gibbs e Heaviside, em parte devido à inspiração de Maxwell e, como será mostrado neste capítulo, teve suas origens no método rival dos quatérnions. Esta análise vetorial tornou-se conhecida a partir da publicação do trabalho de Gibbs em 1881. Trabalhos contendo outros formalismos semelhantes à análise vetorial já haviam aparecido anteriormente, em particular no trabalho *Ausdehnungslehre* de Hermann Grassmann (1809–1877) publicado em 1844. Esta obra contém idéias úteis para lidar com o espaço tridimensional mas com conteúdo muito mais geral e abstrato que o trabalho de Gibbs, não tendo sido utilizado pelos físicos da época.

No final do século XIX, mais precisamente na década de 1890, a revista *Nature* foi palco de uma emocionante disputa entre dois sistemas matemáticos para descrever grandezas vetoriais envolvendo pessoas inteligentes e espirituosas. De um lado estavam Peter Guthrie Tait (1831–1901), Cargill Knott, Alexander MacFarlane e outros; do outro lado, Josiah Willard Gibbs (1839–1903) e Oliver Heaviside (1850–1925). Um dos principais fatores que torna este debate interessante é o fato de os debatedores serem físicos importantes e respeitados na época com interesses em matemática. Além disso, o estilo metafórico (e, às vezes, agressivo) da argumentação usado principalmente por Heaviside e Tait também contribui para aumentar o interesse no debate.

Através dos argumentos apresentados no debate podemos entender como os adeptos de teorias vetoriais viam seus sistemas e de seus oponentes, a tática usada para convenver o público a aderir a eles e também qual a relação entre os sistemas, já que ambos têm grande semelhança.

De um modo geral, podemos resumir a controvérsia da seguinte forma. De um lado estão os defensores dos quatérnions dentro da tradição pura de Hamilton e de outro os defensores de novos sistemas mais simples, entre os quais estão Gibbs e Heaviside. Estes últimos negam qualquer influência dos quatérnions sobre seu sistema, durante o debate, e afirmam que os quatérnions são totalmente dispensáveis. Mas será que os quatérnions foram tão inúteis assim? Veremos que não.

3.2 Cronologia e principais trabalhos

Apresentamos aqui uma lista as principais obras envolvidas no desenvolvimento do cálculo de quatérnions e da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside.

- William Rowan Hamilton (1805–1865) – *Elements of quaternions* de 1843.
- Hermann Grassmann (1809–1877) – *Ausdehnungslehre* de 1844.
- Peter Tait (1831–1901) – *An elementary treatise on quaternions* de 1867.
- Philip Kelland e Peter Tait. *Introduction to quaternions with numerous examples* de 1873.
- James Clerk Maxwell (1831–1879) – *Treatise on electricity and magnetism* de 1873.
- William K. Clifford (1845–1879) – Elements of dynamics: a introduction to the study of the motion and rest in solid and fluid bodies de 1877.
- William K. Clifford – Aplications of Grassmann's extensive algebrade 1882.
- Josiah Willard Gibbs (1839–1903) – Elements of vector analysis de 1881 e 1884.
- Josiah Willard Gibbs – *Multiple Algebra* de 1886.
- Oliver Heaviside (1850–1925). *Electrical papers* de 1882 e 1891.
- Oliver Heaviside. *Electromagnetic theory* de 1893, 1899 e 1912.

3.3 Por que os quatérnions são compostos por quatro números[102]

A invenção dos quatérnions em 1843 está intimamente relacionada com os estudos de Hamilton sobre números complexos, sua representação geométrica e as idéias a eles associadas.

Hamilton[103] analisou o modo de representar o plano dos números complexos usando pares reais. Um número complexo x + yi com x, y reais pode ser representado por um ponto P de coordenadas (x,y) no plano. Neste caso, o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ representa uma direção perpendicular à reta dos números reais. Seria possível desenvolver um formalismo mais geral para o espaço tridimensional? A situação análoga em três dimensões poderia ser a correspondência entre vetores no espaço e os "tripletos" – certos números contendo uma parte real e duas partes imaginárias. Essa analogia mostrou-se infrutífera, como será mostrado abaixo, mas Hamilton insistiu em sua possibilidade por anos, até pensar na possibilidade de quartetos, os quatérnions.

Em uma carta escrita em 1843 para John T. Graves, Hamilton narra os passos que o levaram aos quatérnions.[104] Vamos seguir a seqüência descrita nesta carta de Hamilton.[105]

A tentativa de generalização natural para um número complexo representar algo no espaço tridimensional seria a + bi + cj. O uso de Hamilton da representação geométrica no desenvolvimento da teoria de quatérnions pode ser visto no trecho abaixo: "Como $\sqrt{-1}$, em um sentido bem conhecido, é uma linha perpendicular à linha 1, parece natural que deva haver outro imaginário para expressar a linha perpendicular a ambas anteriores; e como a rotação dupla de 1 em relação a ela também conduz a –1, ela também deve ser a raiz quadrada da unidade negativa, embora não deva ser confundida com a anterior. Chamando

[102] Veja também os artigos VAND DER WAERDEN 1976 e O' NEILL 1986.

[103] HAMILTON 1967, pp. 3-96. Gauss, Wessel, Argand, Buée, Mourey, Warren também estudaram a representação de um número complexo no plano (CROWE 1967).

[104] HAMILTON 1967, pp. 106-110.

[105] Seguimos a seqüência de Hamilton desenvolvida em HAMILTON 1967, p. 107-08.

a antiga raiz, como os alemães freqüentemente fazem, de i, e a nova de j, questionei quais leis deveriam ser assumidas para a multiplicação de $a + ib + jc$ com $x + iy + jz$."[106]

No caso dos números complexos, o produto de um complexo por um real significa (geometricamente) uma ampliação ou contração do vetor plano correspondente; e o produto por um número imaginário representa uma rotação. A soma, a subtração, o produto e a divisão de dois números complexos produzem outro número complexo, ou seja, esses números formam uma álgebra fechada para as operações aritméticas. Hamilton tentou, em sua generalização dos números complexos, manter essas propriedades.

Para verificar a consistência da generalização, Hamilton testou a validade da lei dos módulos que diz que o módulo de um produto deve ser igual ao produto dos módulos. Sejam dois tripletos $t_1 = a + ib + jc$ e $t_2 = x + iy + jz$. Vamos analisar o produto $t_1.t_2$. Multiplicando cada termo do primeiro por cada termo do segundo, este produto resulta em

$$t_1t_2 = -ax - by - cz + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy)$$

O problema é o que fazer com o produto ij para que o produto entre dois tripletos continue sendo um tripleto. Hamilton tentou várias soluções para este problema assumindo sempre que $i^2 = j^2 = -1$: tentou considerar $(ij)^2 = 1$ que resulta em $ij = 1$ ou $ij = -1$; testou também $ij = 0$ e depois $ij = -ji = k$, onde k é uma constante a ser determinada.

Vamos analisar a primeira solução, considerando o caso mais simples do quadrado de um tripleto.

Seja $t = a + ib + jc,$

então $t.t = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc$.

Se considerarmos o módulo de t, devemos ter $|t|.|t| = |t.t|$. Além disso sabemos que de acordo com a geometria tradicional, $|t|.|t| = (a^2 + b^2 + c^2)$.

Se fizermos $ij = 1$ ou $ij = -1$ teremos um tripleto, para o produto $t.t = a^2 - b^2 - c^2 \pm 2bc + 2iab + 2jac$ e obtemos $|t.t|^2 = (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$ ou $(a^2 - b^2 - c^2 -$

[106] HAMILTON 1967, p. 107.

$2bc)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$. Logo, em qualquer um dos casos a lei dos módulos não permanece válida, ou seja, $|t|.|t| \neq |t.t|$. Se quisermos que tal propriedade continue válida, devemos rejeitar $ij = 1$ e $ij = -1$.

Notemos que se ignorarmos o termo ij a regra do módulo se satisfaz:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

de modo que outra alternativa possível seria fazer $ij = 0$. Hamilton a considerou artificial e desconfortável. Percebeu então que o termo $2ijbc$ poderia desaparecer de outra forma. Este termo surge, na multiplicação dos dois tripletos, sob a forma de $ibjc + jcib$. Supondo que a ordem dos fatores não altera o produto, obtém-se $2ijbc$. Mas os dois termos poderiam se anular se ij fosse igual a $-ji$. Assim, Hamilton considerou $ij = -ji$, e fez $ij = k$ e $ji = -k$, deixando a possibilidade de decidir depois se $k = 0$ ou não. Com esta escolha, estava resolvido o problema do produto de um tripleto por si mesmo.

Em seguida, Hamilton considerou o produto de dois tripletos contidos no mesmo plano:

$$t_1 = (a + bi + cj) \text{ e } t_2 = (x + bi + cj)$$

$$t_1.t_2 = (ax - b^2 - c^2) + i(a + x)b + j(a + x)c + ijbc + jibc,$$

fazendo $ij = k$ e $ji = -k$, temos

$$t_1.t_2 = (ax - b^2 - c^2) + i(a + x)b + j(a + x)c + k(bc - cb)$$

que elimina o último termo com o coeficiente k e o produto resulta em um tripleto.

A seguir Hamilton testou se a lei dos módulos continuaria válida caso fizesse $k = 0$. Para isso considerou o produto de dois tripletos quaisquer:

Sejam $t_1 = a + bi + cj$ e $t_2 = x + yi + zj$,

$t_1t_2 = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy)$,

se fizermos $ij = -ji = k = 0$ temos que

$(|t_1t_2|)^2 = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + c^2x^2 + c^2z^2 + 2bycz$

e $(|t_1|.|t_2|)^2 = (a^2 + b^2 + c^2).(x^2 + y^2 + z^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2$,

ou seja, $(|t_1|.|t_2|)^2 = (|t_1t_2|)^2 + (bz - cy)^2$.

Portanto, a lei dos módulos não era válida, a menos que o último termo desaparecesse.

O termo $(bz - cy)^2$ é justamente o quadrado do termo que contém o coeficiente k na equação $t_1.t_2$. Segundo Hamilton, esta diferença foi a inspiração que o levou ao quatérnion: "E aqui começou a ficar claro para mim que devemos admitir, em algum sentido, uma *quarta dimensão* no espaço para o cálculo dos tripletos ou, transferindo o paradoxo para a álgebra, admitir um terceiro símbolo imaginário k, que não deve ser confundido com i ou j, mas igual ao produto do primeiro como multiplicador e do segundo como multiplicando; e portanto fui levado a introduzir quatérnions, tais como a + *i*b + *j*c + *k*d, ou (a, b, c, d)"[107].

Os quatérnions contêm, portanto, três componentes imaginárias e uma real. Os símbolos i, j, k são três unidades imaginárias diferentes entre si que obedecem às regras: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, ij = k, etc. Hamilton explicou[108] que as outras regras são conseqüências destas duas primeiras, por exemplo, ik = –j pois $ik = iij = i^2j = -j$ e da mesma maneira $kj = jj = ij^2 = -i$.

Como os quatérnions são uma extensão dos números complexos para quatro dimensões, Hamilton[109] usou a representação no plano complexo para explicar o significado de $i^2 = -1$ a partir da representação geométrica de um número complexo[110].

Na figura abaixo, o vetor **r** = a + b*i* representa um número complexo em um plano com as componentes real a e imaginária b*i*. Se multiplicarmos esse vetor por *i*, obteremos **r**' = *i* **r** = –b + a*i* que é um vetor de mesmo módulo porém perpendicular ao vetor inicial. Se multiplicarmos novamente **r**' por *i*, obteremos **r**" = *i* **r**' = –a – *i*b = – **r**. Portanto, vemos que

[107] HAMILTON 1967, p. 108.
[108] HAMILTON 1967, p. 108.
[109] HAMILTON 1869, vol. I, pp. 135-36 e 158-59.
[110] ALTMANN 1992, p. 47.

ii **r** = –**r** e i^2 = – 1. A figura 3.1 mostra que multiplicar um vetor **r** por i e i^2 produz uma rotação anti-horária de π/2 e π, respectivamente.

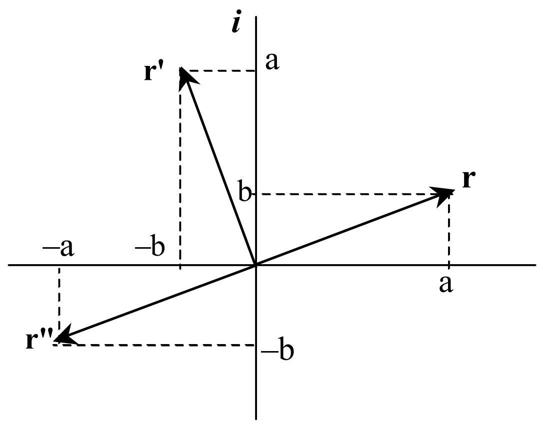

Figura 3.1. Representação de um número complexo em um plano.

Os quatérnions não obedecem à propriedade comutativa "e como a ordem da multiplicação destes imaginários não é indiferente, não podemos ter que k^2, ou ijij, seja = +1, porque i^2xj^2= –1x–1=+1. Isto é mais como k^2 = ijij = –iijj = –1"[111]. De fato esta última hipótese é necessária se quisermos adequar a multiplicação dos quatérnions com a lei da multiplicação dos módulos.

Hamilton não foi o único a inventar um sistema que violasse a lei comutativa. Gibbs, comentando um artigo de Möbius de 1827 chamado *Barycentrischer Calcul*, afirma que "vimos pela primeira vez, pelo que é de meu conhecimento, [...] que a mudança de posição de duas letras em expressões como AB, ABC, ABCD é equivalente a prefixar o sinal negativo".[112]

O fato de os quatérnions formarem uma álgebra não comutativa foi fortemente criticado durante a controvérsia na *Nature* pelos defensores da álgebra vetorial, apesar de o

[111] HAMILTON 1967, p. 108.
[112] GIBBS 1961.

produto vetorial também não ser comutativo. Em compensação a álgebra de quatérnions obedece à propriedade associativa mas a vetorial não, como é exemplificado abaixo.

Vamos assumir que $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$ e $ki = j = -ik$. Se multiplicarmos $i(i + j)j$ primeiro pela direita ou primeiro pela esquerda, obteremos:

$$i(i+j)j = (ii+ij)j = (i^2+k)j = i^2 j + kj = i^2 j - i$$

$$i(i+j)j = i(ij+jj) = i(ij+j^2) = ik + ij^2 = -j + ij^2$$

Esses dois resultados são iguais porque $i^2 = j^2 = -1$.

3.4 Interpretação geométrica de um quatérnion

Quando apresentou os quatérnions na carta para Graves, Hamilton não fez uma interpretação dos elementos que compõem um quatérnion. Só fez isso em uma série de artigos publicados na revista *Philosophical Magazine* entre 1844 e 1850[113].

Hamilton considerou a separação entre as partes real e imaginária uma operação bastante importante e com muitas aplicações, a ponto de introduzir símbolos para representá-las. “A parte algebricamente real pode receber [...] todos os valores contidos em uma escala de progressão de números dos negativos aos positivos infinitamente; podemos chamá-la portanto *parte escalar*, ou simplesmente *escalar* de um quatérnion, e simbolizá-la prefixando ao símbolo do quatérnion, o característico Scal., ou simplesmente S. [...]. Por outro lado, a parte algebricamente imaginária, sendo constituída geometricamente por uma linha reta, ou raio vetor[114], que em geral tem, para cada quatérnion, um comprimento determinado e uma direção no espaço determinada, pode ser chamada *parte vetorial*, ou simplesmente *vetor* do quatérnion; e pode ser denotada prefixando o característico Vect. ou

[113] HAMILTON 1967, pp. 227-297.

[114] HAMILTON 1967, p. 236-237. O termo “raio vetor” era usado em astronomia para designar uma linha imaginária ligando um planeta que se move ao redor de um centro.

V"[115]. Assim, se temos um quatérnion $q = a + ix + jy + kz$, teremos $Sq = a$ e $Vq = ix + jy + kz$.

A parte vetorial do quatérnion $q = a + ix + jy + kz$ é interpretada como um vetor cujas componentes são x, y, z e é representada por uma única letra grega minúscula como, por exemplo, $\alpha = Vq = ix + jy + kz$. "Considerada de um ponto de vista geométrico, esta parte algébrica imaginária de um quatérnion tem um significado ou representação simples e natural no espaço, de modo que a dificuldade é transferida para a parte algébrica real e somos induzidos a perguntar o que ela significa em geometria, ou o que no espaço poderia sugeri-la"[116]. Hamilton atribui à parte escalar um significado não espacial e a representou por uma letra romana como, por exemplo, $a = Sq$.

Ao associar a parte imaginária do quatérnion com as três dimensões do espaço, a interpretação geométrica atribuída à parte real de um número complexo se torna diferente da atribuída à de um quatérnion. A parte real de um número complexo é interpretada como uma dimensão do espaço, mas no caso dos quatérnions, não. As três dimensões espaciais estão associadas às três unidades imaginárias. Hamilton e Tait não comentam esta mudança de interpretação da parte escalar que invalida a idéia de os quatérnions serem uma extensão dos números complexos pois suas partes escalares têm significados diferentes.

Hamilton introduziu um conceito semelhante ao módulo de um número complexo chamado tensor[117] de um quatérnion e representado por TQ. Também definiu o quadrado do tensor de um quatérnion Q como a diferença entre o quadrado da parte escalar (sempre positiva) e o quadrado da parte vetorial (sempre negativa), ou seja, $(TQ)^2 = (SQ)^2 - (VQ)^2$, sendo o tensor equivalente ao módulo de um número complexo. No caso de a parte escalar ser nula, "o tensor da parte imaginária pura, ou vetor, expressa o comprimento ou extensão linear da linha reta que seria geometricamente construída. Se esta linha for dividida por seu próprio tensor, o quociente é uma unidade imaginária ou vetor *unitário* que marca a direção

[115] HAMILTON 1967, p. 236.
[116] HAMILTON 1967, p. 356.
[117] Hamilton derivou os termos "tensor" e "versor" das palavras latinas "tensus" e "versus" que significam "esticar" e "rodar" respectivamente.

da linha construída, ou a região do espaço para a qual aquela linha é *girada*. Por isso, e por outras razões, propomos chamar este quociente de *versor* do imaginário puro: e geralmente dizemos que *um quatérnion é o produto de seus próprios fatores tensoriais e versoriais*, ou escrever Q = TQ.UQ, usando U para o versor característico, e T para o tensor”[118].

3.5 Versores e vetores unitários

Hamilton definiu o conceito de “versor perpendicular” a partir de um sistema de três vetores unitários perpendiculares entre si como sendo o quatérnion capaz de rodar um vetor de $\pi/2$ em torno de uma direção perpendicular ao vetor e ao quatérnion. Tait também associou versores a rotações atribuindo um significado idêntico, mas mudou a nomenclatura, chamando o versor perpendicular de versor quadrantal[119]. Embora os conceitos de Hamilton e Tait tenham o mesmo significado, vamos seguir a nomenclatura de Tait pois ela foi usada por MacFarlane ao criticar o uso de versores e vetores por Tait na controvérsia da década de 1890.

Um versor quadrantal é um operador que produz uma rotação de um vetor de $\pi/2$ no sentido anti-horário sem alterar seu comprimento. Supondo um sistema de três vetores unitários perpendiculares entre si, I, J, K, o operador que transforma J em K é um versor quadrantal e como seu eixo de rotação é o vetor I, Hamilton o chama de *i*. Assim, $K/J = i$ ou $K = iJ$. Analogamente podemos escrever $I = jK$ e $J = kI$ (figura 3.2).

Além disso, existe a transformação contrária: $-J/K = K/J = i$ ou $-J = iK$ e analogamente $-K = jI$ e $-I = kJ$. Com essas relações podemos ter $-J = iK = i(i\ J) = i^2\ J$ e portanto $i^2 = -1$ e da mesma forma temos também $j^2 = k^2 = -1$. Com essa definição, o quadrado de um versor quadrantal é a unidade negativa e temos $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

118 HAMILTON 1967, p. 237.
119 HAMILTON 1869, vol.I, pp. 135-37, 157-63 e TAIT 1873, pp. 34-40.

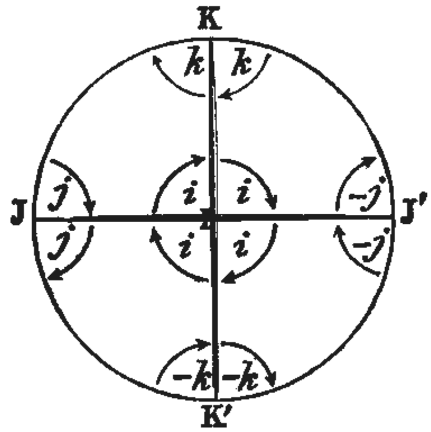

Figura 3.2. Os versores quadrantais produzem rotações de $\pi/2$.

Como vimos acima I, J, K e *i, j, k* têm significados diferentes pois são vetores unitários e geradores de rotação, respectivamente.[120] Os quadrados de I, J, K são iguais a +1, e os de *i, j, k* são iguais a –1. Apesar desta diferença conceitual, Tait e Hamilton passaram a usar o vetor unitário e o versor quadrantal indistintamente:[121]

> Os significados que atribuímos a *i, j, k* são independentes e não são inconsistentes com os atribuídos a I, J, K e é supérfluo usar dois conjuntos de caracteres quando um é suficiente. Portanto parece que *i, j, k* pode ser substituído no lugar de I, J, K; em outras palavras, *quando um vetor unitário é empregado como um fator, pode ser considerado como um versor quadrantal cujo plano é perpendicular ao vetor*. Este é um dos principais elementos da simplicidade singular do cálculo de quatérnions.[122]

[120] O'Brien também aponta para essa mistura de significados e símbolos, preferindo usar α, β, γ para representar os vetores unitários, de modo a não haver confusão com os símbolos usados para representar as unidades imaginárias (O'BRIEN 1852, p. 178).
[121] HAMILTON 1869, vol.I, pp. 242 e 335-45 e TAIT 1873, p. 37.
[122] TAIT 1873, p. 37.

Este uso indistinto aparece explicitamente quando Hamilton e Tait escrevem um quatérnion em coordenadas. "Como qualquer vetor pode ser representado por $\mathrm{x}i + \mathrm{y}j + \mathrm{z}k$ onde x, y, z são números (ou escalares) e *i, j, k* podem ser três vetores não coplanares quaisquer – embora sejam entendidos usualmente como representando um sistema retangular de vetores unitários – e como qualquer escalar pode ser designado por w; podemos escrever para um quatérnion qualquer q, a expressão $\mathrm{q} = \mathrm{w} + \mathrm{x}i + \mathrm{y}j + \mathrm{z}k$"[123].

Apesar de terem significados relacionados, os vetores unitários e os versores quadrantais são conceitos diferentes e não é correto usar o mesmo símbolo para representá-los. MacFarlarne criticará esta mistura de significados durante a controvérsia pois ela é responsável pelo sinal negativo da parte escalar do produto entre dois vetores, indicado abaixo.

Usando as regras de multiplicação entre *i, j, k*, o produto entre dois vetores $\alpha = (i\mathrm{x}+j\mathrm{y}+k\mathrm{z})$ e $\beta = (i\mathrm{u}+j\mathrm{v}+k\mathrm{w})$ pode ser escrito como

$$\alpha\beta = -\,\mathrm{xu} + k\mathrm{xv} - j\mathrm{xw} - k\mathrm{yu} - \mathrm{yv} + i\mathrm{yw} + j\mathrm{zu} - \mathrm{zw} - i\mathrm{zv} - \mathrm{zw} =$$

$$= -\,(\mathrm{xu} + \mathrm{yv} + \mathrm{zw}) + i(\mathrm{yw} - \mathrm{zv}) + j(\mathrm{zu} - \mathrm{xw}) + k(\mathrm{xv} - \mathrm{yu}) = \mathrm{S}\alpha\beta + \mathrm{V}\alpha\beta.$$

Assim, a parte escalar do produto $\mathrm{S}\alpha\beta = -(\mathrm{xu} + \mathrm{yv} + \mathrm{zw})$ tem sinal negativo.

3.6 Quatérnion como quociente de dois vetores[124]

Se dois vetores são paralelos, um pode ser expresso por um escalar multiplicado pelo outro, sendo que o escalar é a razão entre os comprimentos dos dois vetores e seu sinal é positivo caso os vetores estejam no mesmo sentido e negativo caso estejam em sentidos opostos.

Se eles não forem paralelos, a questão é encontrar o valor da razão entre os comprimentos e também a razão entre as direções dos dois vetores. Uma forma de resolver o problema é encontrar quantos números diferentes são necessários para caracterizar esta

[123] TAIT 1873, p. 40.

razão. Podemos supor que um vetor OA possa ser transformado em outro OB e esta transformação pode ser separada em duas partes.

Primeiro o comprimento de OA pode aumentar ou diminuir até ser igual ao de OB sendo que para determinar a razão entre os comprimentos precisamos de apenas um número que pode ser positivo ou negativo. Depois OA pode ser girado em torno de um eixo perpendicular que passa por O até que sua direção coincida com a de OB. Para determinar esta operação são necessários mais três números: dois ângulos para determinar o plano em que ocorre a rotação e um terceiro número para determinar o ângulo AOB, como mostra a figura 3.3.

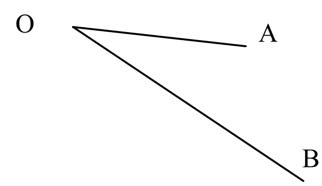

Figura 3.3. Hamilton também interpretou um quatérnion como um operador que transforma um vetor AO em outro OB.

Os quatro elementos usados para definir uma transformação desta maneira não são todos da mesma natureza, pois é preciso um número para determinar o comprimento, dois ângulos para determinar o plano que contém os dois vetores e um terceiro ângulo para levar OA até AB. Apesar de os elementos não serem todos números, Hamilton chama esse conjunto de quatro elementos de "quatérnion" devido ao fato de sua completa construção ou determinação depender de quatro elementos numéricos[125]. Este "quatérnion" definido a partir do quociente de dois vetores não é a mesma coisa que o "quatérnion" definido como uma extensão de números complexos e composto por quatro números reais e três unidades imaginárias. Por serem de naturezas distintas, nada garante *a priori* que tenham as mesmas propriedades. Hamilton deveria ter provado que eles possuem as mesmas propriedades para tratá-los como sendo a mesma coisa, mas não o fez.

---

[124] HAMILTON 1869, vol.I, pp. 110-14 e TAIT 1873, pp. 25-26.

Nesta nova interpretação, um quatérnion é considerado como o agente que transforma um vetor em outro e pode ser decomposto em dois fatores independentes: um "tensor" representado pela letra T e que muda o comprimento e um fator de rotação chamado "versor" e representado pela letra U na frente do quatérnion. Por exemplo: se q é um quatérnions, Tq é o "tensor" desse quatérnion e Uq é seu "versor".

Sejam $\alpha = OA$, $\beta = OB$ e q o quatérnion que transforma α em β, temos $\beta = q\alpha$ que também pode ser escrito na forma $\beta/\alpha = q$ ou $\beta\alpha^{-1} = q$.

Em 1856, Hamilton começou a trabalhar em seu livro *Elements of Quaternions* que foi publicado em 1866, um ano após sua morte. Sua intenção com essa obra era apresentar uma melhor representação dos quatérnions com um trabalho introdutório, exemplos e problemas. A maior parte das aplicações do método dos quatérnions era geométrica e não física. Isso foi uma infelicidade pois o interesse em quatérnions e análise vetorial era maior entre físicos que entre os matemáticos.

3.7 O operador nabla

O operador que chamamos atualmente de nabla[126], simbolizado por ∇, foi definido em 1847 por Hamilton[127] representado por outro símbolo. Seu objetivo era representar simbolicamente o operador

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2,$$

que já era chamado "operador de Laplace" e que era bem conhecido e usado em problemas físicos da época. Hamilton definiu um operador representado por

[125] HAMILTON 1869, vol.I, p. 114.

[126] Foi Maxwell quem sugeriu o nome "nabla", pois este é o nome em hebraico da cunha assíria que tem o formato ∇ (MAXWELL 1995, p. 577).

[127] HAMILTON 1967, p. 262. Em uma nota de rodapé acrescentada na página 548 do *Elements of quaternions*, o editor Charles J. Joly comenta que o símbolo ∇ passou a ser usado por ser parecido com o símbolo da derivada parcial.

$\lhd = i\dfrac{d}{dx} + j\dfrac{d}{dy} + k\dfrac{d}{dz}$, onde x, y, z são coordenadas retangulares e *i, j, k* são unidades imaginárias associadas aos vetores unitários paralelos aos eixos coordenados. Note-se que Hamilton usava um triângulo deitado $\lhd$, e não o símbolo ∇.

Utilizando as regras para o produto entre *i, j, k*, temos $-\lhd^2 = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d}{dz}\right)^2$. O operador $\lhd$ aplicado a um vetor produz um quatérnion, escrito na forma:

$$\lhd(\mathrm{it} + \mathrm{ju} + \mathrm{kv}) = -\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} + \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}} + \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dz}}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dy}} - \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dz}}\right) + \mathrm{j}\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dz}} - \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}\right) + \mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} - \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dy}}\right).$$

O operador $\lhd$ aplicado a uma função vetorial resulta em uma soma de uma parte escalar e outra vetorial pois é interpretado como o produto entre dois vetores: $\lhd\,\omega = \mathrm{S}\lhd\omega + \mathrm{V}\lhd\omega$, onde $\omega = \mathrm{it} + \mathrm{ju} + \mathrm{kv}$, $\mathrm{S}\lhd\omega = -\left(\dfrac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dx}} + \dfrac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}} + \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dz}}\right)$ e

$$\mathrm{V}\lhd\omega = \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dy}} - \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dz}}\right) + \mathrm{j}\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dz}} - \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}\right) + \mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}} - \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dy}}\right).$$

Hamilton havia planejado dedicar uma grande seção dos *Elements of quaternions* ao operador $\lhd$, mas devido à sua morte, o editor Charles Joly acrescentou as discussões de Hamilton sobre aspectos matemáticos do $\lhd$ como apêndice do volume II publicado em 1901. O desenvolvimento desse operador, tão importante para a física, foi feito principalmente por Tait.

3.8 Tait e os quatérnions

Peter Tait (1831–1901) dedicou trinta e seis anos de sua vida à divulgação e desenvolvimento da análise de quatérnions. Entre 1865 e 1901 escreveu oito livros sobre o assunto,[128] desenvolvendo novos teoremas e aplicações físicas para a teoria, principalmente aplicações do operador ∇. Foi através de Tait que Maxwell se interessou pelos quatérnions pois foram amigos íntimos e trocaram muitas correspondências[129].

Em 1859 Hamilton incentivou Tait a publicar um artigo sobre superfícies de Fresnel utilizando quatérnions. Esse foi o primeiro entre vários artigos de Tait sobre quatérnions. Foi selecionado para uma vaga na Universidade de Edinburgh em 1860 para a qual concorreram várias pessoas, incluindo Maxwell. Logo após chegar em Edinburgh, Tait começou a escrever com William Thomson (Lord Kelvin) um trabalho de física matemática intitulado *Treatise on Natural Philosophy*. Planejaram explorar toda a física, mas publicaram apenas um volume em 1867 sobre mecânica. Após a publicação, o livro tornou-se um enorme sucesso tendo um grande número de leitores. Esta teria sido uma grande oportunidade para a divulgação dos quatérnions, mas Thomson foi contra a introdução deste formalismo pois se opunha tanto aos quatérnions quanto a qualquer outro tipo de análise vetorial[130].

Surpreendentemente, apesar de ter publicado vários artigos sobre quatérnions, Tait não ensinava sobre esse assunto em seus cursos de física e física matemática na Universidade de Edinburgh e também não usou os quatérnions em nenhum de seus trabalhos sobre física, como por exemplo, o longo artigo "Mecânica" publicado na nona edição da *Encyclopaedia Britannica.*[131]

Em 1867 Tait publicou o *Elementary Treatise on Quaternions* que teve duas novas edições aumentadas em 1873 e 1890 e também foi traduzido para o alemão em 1880 e para o francês em 1884. Apesar do título, o livro não é nada elementar. Um livro realmente elementar sobre o assunto foi escrito por Tait e Philip Kelland, *Introduction to Quaternion*[132]*,* escrito em 1873, com segunda edição em 1882 e terceira em 1904.

---

[128] Incluindo reedições, traduções e co-autorias.
[129] MAXWELL 1995.
[130] CROWE 1967, p. 119.
[131] CROWE 1967, p. 120.
[132] KELLAND 1873.

Dois terços do livro têm um enfoque matemático e apresentam as propriedades matemáticas e aplicações geométricas da álgebra de quatérnions, seguindo os passos e a notação de Hamilton, com a diferença que Tait simplificou algumas discussões sobre aspectos mais gerais dos quatérnions. A grande diferença com relação aos trabalhos de Hamilton é que Tait teve a preocupação de mostrar as possibilidades de aplicações físicas da análise de quatérnions. Dedica um terço do livro a dois capítulos chamados "Cinemática" e "Aplicações Físicas" onde trata a rotação de corpos rígidos através do método de quatérnions e tensões homogêneas através de funções vetoriais lineares.[133] Trata o problema do pêndulo de Foucault, as superfícies de Fresnel e, em eletrodinâmica, estuda os efeitos de correntes elétricas sobre magnetos e os efeitos entre correntes. Além disso, compara seu método matemático com o de Ampère.

A principal aplicação desenvolvida por Tait[134] para funções lineares vetoriais foi o estudo do efeito de tensões homogêneas aplicadas em um corpo. Uma tensão homogênea altera um vetor ρ em outro ρ' que é uma função linear vetorial de ρ. Vamos seguir a explicação dada por Tait e também sua notação.

Supondo que α, β, γ seja um conjunto de vetores unitários e perpendiculares entre si e α', β', γ' um conjunto de vetores quaisquer, ρ e ρ' são escritos como,

$$\rho = -(\alpha S\alpha\rho + \beta S\beta\rho + \gamma S\gamma\rho),$$
$$\rho' = -(\alpha' S\alpha\rho + \beta' S\beta\rho + \gamma' S\gamma\rho).$$

onde $S\alpha\rho$, $S\beta\rho$, $S\gamma\rho$ são números, já que são as partes escalares dos produtos.

Os quaternionistas usam a notação $\phi\rho$ para representar ρ', de modo que

$$\phi\rho = -(\alpha' S\alpha\rho + \beta' S\beta\rho + \gamma' S\gamma\rho),$$

[133] O estudo de funções vetoriais lineares originou o cálculo tensorial.
[134] KELLAND 1873, pp. 180-83.

onde o próprio ϕ depende de nove constantes independentes envolvidas nas equações que transformam α, β, γ em α', β' e γ'. Essas equações são

$$\phi\alpha = \alpha'$$
$$\phi\beta = \beta'$$
$$\phi\gamma = \gamma'.$$

Como α', β', γ' podem ser expressos em termos de α, β e γ e como os dois conjuntos de vetores unitários são independentes um do outro, os nove coeficientes nas equações abaixo podem ter qualquer valor

$$\phi\alpha = \alpha' = A\alpha + c\beta + b'\gamma$$
$$\phi\beta = \beta' = c'\alpha + B\beta + a\gamma$$
$$\phi\gamma = \gamma' = b\alpha + a'\beta + C\gamma$$

Com estas equações podemos conhecer o efeito de uma tensão homogênea aplicada em um ponto de um corpo descrito pelo vetor ρ.

Tait aplica o operador ∇ a funções escalares e vetoriais, como por exemplo, potencial de uma força, fluxo de calor, vetor deslocamento de um ponto em um meio elástico, a força elétrica, corrente elétrica, etc. Tait interpreta a parte vetorial separada da parte escalar do operador ∇ aplicado a uma função vetorial.[135]

Como exemplo[136] da notação de quatérnions, o vetor força σ[137] exercida por um elemento a de corrente em um ponto determinado por ρ é escrito como $\sigma = -\frac{Va\rho}{T\rho^3}$. Como

[135] TAIT 1873, pp. 260-88.
[136] TAIT 1873, p. 262.
[137] O termo “campo” não era usado na época. As pessoas usavam “força magnética” e “força elétrica” para se referir ao que chamamos atualmente de campo magnético e campo elétrico.

já foi explicado, o símbolo V significa a parte vetorial do produto entre a e ρ e o símbolo T significa o "tensor" ou módulo de ρ.

A contribuição de Tait para a análise de quatérnions não foi apenas como expositor de um método criado por Hamilton, mas também como criador de novos teoremas e aplicações físicas que foram em grande parte transferidos posteriormente para a análise vetorial. Fez muitos avanços na teoria e aplicações da função vetorial, mas sua contribuição mais importante foi o desenvolvimento do operador ∇ introduzido por Hamilton.

Ao discutir o operador ∇, Tait incluiu os teoremas que conhecemos pelos nomes de Gauss e Stokes, e suas aplicações em problemas físicos. Tait se refere ao teorema de Gauss usando o nome "equação da continuidade".[138] Consideremos uma superfície fechada. Seja ν a normal à superfície no ponto ρ, $d\zeta$ um elemento de volume e ds um elemento de área. Temos[139]

$$\iiint S.\nabla\sigma \, d\varsigma = \iint S.\sigma \, U\nu \, ds \, .$$

O teorema provado por Stokes em 1854 é escrito, na linguagem de quatérnions[140], como

$$\int S.\sigma \, d\rho = \iint S.\nabla\sigma \, U\nu . ds.$$

A discussão do operador ∇ é um exemplo da importância de Tait para o desenvolvimento dos quatérnions pois o *Lectures on Quaternions* de Hamilton quase não o discute, enquanto que a discussão de Tait é provavelmente mais completa e melhor que a

[138] TAIT 1873, p. 268.
[139] Normalmente os quaternionistas não usam nenhum símbolo para representar o produto entre dois vetores mas, neste caso, Tait usou um ponto para representar que o produto entre ∇ e σ deve ser feito primeiro e depois devemos tomar a parte escalar do produto $\nabla\sigma$.
[140] TAIT 1873, p. 272-73.

encontrada em qualquer livro de matemática da época. Entre os artigos importante de Tait estão "On Green's and Other Allied Theorems" e "On Some Quaternions Integrals".[141]

A análise de quatérnions apresentada por Tait é muito semelhante à análise vetorial moderna (soma e subtração, produto vetorial e escalar, propriedades do ∇, e mesmo a função linear vetorial). Algumas partes da análise de quatérnions não podem ser traduzidas para a análise vetorial mas, de um modo geral, há a possibilidade do desenvolvimento da análise vetorial moderna a partir dos quatérnions, pois a parte vetorial de um quatérnion se comporta como um vetor no espaço euclidiano. Este, juntamente com a existência de operadores diferenciais e transformação linear, forma os aspectos que mais interessaram aos que se dedicaram a desenvolver uma nova álgebra para tratar o espaço euclidiano, como Gibbs e Heaviside.

A importância de Tait está no fato de que ele mudou a ênfase na análise de quatérnions abandonando o enfoque puramente matemático e passando a explorar sua utilidade como ferramenta para a física, além de introduzir desenvolvimentos no método. Essa transformação na análise de quatérnions foi uma etapa importante para o desenvolvimento da análise vetorial moderna a partir da análise de quatérnions.

3.9 Maxwell e os quatérnions

Entre 1856 e 1865, Maxwell escreveu muitos trabalhos importantes usando o formalismo de componentes, porém as descobertas publicadas nesses artigos, principalmente as relacionadas com o campo eletromagnético, poderiam ser tratadas com a análise de quatérnions, se ele a conhecesse. Fica claro pelo estudo da correspondência trocada entre 1870 e 1873 com Tait que Maxwell só começou a aprender sobre quatérnions por volta de 1867, ano da primeira edição do *Elementary treatise on quaternions* de Tait.

---

[141] TAIT vol.1, 159-163.

Em uma carta de 11 de dezembro de 1867,[142] Maxwell pergunta a Tait sobre o operador ∇ e sobre ∇^2. Estudando outra carta enviada a Tait três anos depois, em 7 de novembro de 1870 e o *Manuscrito sobre as aplicações dos quatérnions no eletromagnetismo*[143] de novembro de 1870, vemos que os conhecimentos de Maxwell sobre quatérnions aumentaram bastante e também podemos entender a interpretação e a forma como Maxwell usou o cálculo de quatérnions no *Treatise on Electricity and Magnetism* de 1873.

Neste manuscrito de 1870, Maxwell aplica o operador ∇ à função escalar F e batiza essa operação de "slope" (inclinação) e também aplica o operador ∇ à função vetorial σ, separando o resultado em duas partes independentes: uma parte escalar que batizou de "convergência" e uma parte vetorial batizada de "rotacional". Além disso chamou o ∇^2 aplicado a qualquer função de "concentração" da função. A "convergência" de Maxwell é igual ao nosso divergente, porém com sinal negativo. Equivale ao $S\nabla\sigma$ de Tait. O rotacional de Maxwell é idêntico ao rotacional atual e corresponde ao $V\nabla\sigma$ de Tait.

Para Maxwell "a invenção dos quatérnions é um passo para o conhecimento das quantidades relacionadas ao espaço que só pode ser comparado em importância com a invenção das coordenadas triplas de Descartes". Apesar de reconhecer a importância do cálculo de quatérnions, ele se restringe ao uso das idéias, mas não dos métodos desenvolvidos por Hamilton. Também não usa o conceito de quatérnion associado à rotação, ou ao quociente entre dois vetores, ou mesmo como a soma de um escalar com um vetor. O uso que Maxwell faz dos quatérnions é simplificado ao máximo pois para ele "o símbolo de um vetor deve expressar sua direção bem como sua magnitude. Esta é a idéia fundamental do cálculo de quatérnions"[144]. De uma maneira geral, Maxwell não se refere aos quatérnions como entes matemáticos, mas sim aos vetores e escalares separadamente, seguindo sua proposta de adotar as idéias do cálculo de quatérnions, mas não suas

[142] MAXWELL 1995, pp. 332-34.
[143] MAXWELL 1995, pp. 568-69.
[144] MAXWELL 1995, p. 571.

operações e métodos. Afirma que pretende "deixar seu livro com as idéias hamiltonianas sem usar as equações na forma hamiltoniana".

Respondendo a uma carta de Tait, Maxwell diz que não quer usar os quatérnions diretamente em sua obra, apenas suas idéias, por achar que nem ele e nem o público estão suficientemente maduros para isso. Apesar de elogiar o valor dos vetores, da adição, da multiplicação e do operador ∇, considera a forma pela qual Hamilton desenvolveu suas idéias útil e importante apenas para o mundo matemático[145].

Como exemplo de utilidade da separação entre grandezas escalares e vetoriais, Maxwell analisa as descobertas de William Thomson. Thomson viu que a distribuição da força eletrostática em uma região contendo condutores eletrizados produz um campo vetorial análogo ao campo vetorial associado ao fluxo de calor em um sólido infinito. Associados a esses campos vetoriais, há dois campos escalares: as linhas equipotenciais no caso do campo elétrico e as isotermas no caso de condução de calor. Thomson usava o formalismo de coordenadas cartesianas para tratar os problemas físicos e se opunha a qualquer tipo de formalismo vetorial, ou seja, era contra o uso dos quatérnions e também da análise vetorial. O tratamento fica mais simples usando o operador ∇ e representando os vetores por uma única letra.

Em 1873, Maxwell publicou um artigo na *Nature*[146] sobre o livro de Tait e Kelland *Introduction to quaternions*[147] no qual expôs a importância dos métodos vetoriais como um novo método de encarar e pensar sobre um problema matemático. Para Maxwell, o estudo dos quatérnions é de grande importância para o estudo da natureza e além de ser um método matemático, ajuda a formar uma imagem mental das características geométricas representadas pelos símbolos. O interesse de Maxwell pelos quatérnions se deve à possibilidade de esse método permitir aos físicos imaginar as entidades físicas durante a realização dos cálculos, muito mais que uma maneira de facilitar os cálculos:

[145] MAXWELL 1995, pp. 577-79.
[146] MAXWELL 1873.

> Embora muito da rotina do trabalho de um matemático sejam cálculos, seu trabalho – o que o faz um matemático – é a invenção de métodos. Está sempre inventando métodos, alguns sem grande valor exceto para ele mesmo; outros, que diminuem o trabalho dos cálculos, são avidamente adotados pelos calculadores. Mas os métodos que satisfazem um matemático são geralmente os que o liberam, e a todos que vêm depois dele, do trabalho de pensar sobre o que lhe custou tanto pensamento. Agora Quatérnions, ou a doutrina dos Vetores, é um método matemático mas é também um método de pensamento e não, pelo menos para a presente geração, um método que livra do pensamento. Ele não encoraja, como alguns métodos matemáticos mais populares, a esperança de os matemáticos darem umas férias a suas mentes, transferindo o trabalho para suas penas. Ele nos obriga a formar uma imagem mental do significado geométrico de cada passo representado por símbolos, de modo que estudando geometria por este método temos nossas mentes ocupadas por idéias geométricas, e não é possível nos fantasiarmos de geômetras sendo apenas aritméticos[148].

Essa exigência de pensamento e a necessidade de uma construção das representações mentais seriam, para Maxwell, as responsáveis pelo lento progresso dos quatérnions entre os matemáticos. Propôs dois caminhos para os defensores dos quatérnions torná-los mais conhecidos e aceitos: mostrar aos que ainda têm mente fresca o quanto seus princípios são fáceis – e assim preparariam o caminho para o triunfo dos quatérnions nas próximas gerações; ou poderiam aplicar o método a problemas científicos da época e mostrar como é mais fácil chegar às soluções obtidas pelos métodos tradicionais e também aplicá-los a problemas que não haviam sido resolvidos ainda.[149] Mas os defensores dos quatérnions não seguiram essas sugestões e para defender o método travaram um verdadeiro debate nas páginas da *Nature* que será discutido mais adiante.

---

[147] KELLAND 1873.
[148] MAXWELL 1995, p. 951-52.
[149] MAXWELL 1995, p. 952.

O trecho acima também mostra que Maxwell interpretou o método dos quatérnions de uma maneira simplificada, considerando apenas a parte vetorial e não o quatérnion completo. Foi exatamente assim que usou os quatérnions em seu *Treatise*, ou seja, Maxwell usou quatérnions com a parte escalar nula, considerando apenas a parte vetorial. Tait não percebeu que Maxwell estava considerando os quatérnions como vetores sem levar em conta os vários outros aspectos fundamentais da teoria de quatérnions, como o produto completo entre vetores, composto por uma parte escalar e outra vetorial.

Maxwell criticou a forma como Hamilton e mesmo Tait desenvolveram a teoria de quatérnions, pois eles escreveram tratados voltados para pessoas com conhecimentos matemáticos avançados, dificultando a compreensão dos aspectos práticos do método. Já o livro escrito por Kelland e Tait faz o contrário, expondo as operações envolvendo vetores e quatérnions, além de mostrar aplicações em problemas de mecânica e cinemática de uma maneira mais simples e acessível.[150]

Maxwell também se interessou sobre a questão de qual sinal deveria ser usado para designar uma rotação no sentido horário ou anti-horário. Hamilton usou o sinal positivo para representar uma rotação horária e Maxwell inicialmente seguiu essa convenção, mas Tait e Thomson usavam o sinal contrário.

Tait se baseava na trigonometria e no movimento da Terra pois a convenção adotada pela trigonometria tem como conseqüência que o eixo z deveria apontar para fora, ou seja, o sentido positivo é o anti-horário. Com isso, se adotarmos a rotação da Terra de oeste para leste como positiva, a direção do sul para o norte também será positiva.

Para resolver a questão sobre relações espaciais, Maxwell propõe uma consulta à Sociedade Matemática de Londres[151] que decide pela adoção do sentido antihorário como positivo. Após essa resolução, Maxwell agradece a Tait por ter comentado sobre a convenção usada no *Treatise* e afirma que ajustou todo o eletromagnetismo do livro a ela.[152]

150 MAXWELL 1995, p. 952.
151 MAXWELL 1995, p 641.
152 MAXWELL 1995, p. 645.

Essa discussão não tem importância para a matemática pura, mas é relevante para a astronomia, eletromagnetismo e na física em geral. Além disso, havia uma necessidade de se estabelecer uma convenção a ser usada por todos.

O *Treatise on Electricity and Magnetism* de Maxwell, publicado em 1873, é o trabalho científico mais importante para a divulgação da teoria de quatérnions já que tem a visão completa de Maxwell sobre quatérnions e também porque incentivou físicos importantes da época a discutirem sobre esse formalismo. O *Treatise* discute a importância e necessidade do uso de um método vetorial como o método de quatérnions para tratar certas grandezas físicas, principalmente para o estudo da eletrodinâmica, onde a relação entre as grandezas envolvidas pode ser expressa através dos quatérnions de uma maneira mais simples que através de equações diferenciais expressas em coordenadas.[153]

Como o método cartesiano era mais conhecido e familiar entre os físicos e "realmente o mais útil para fins de cálculo", Maxwell prefere expressar seus resultados com ele, "embora esteja convencido de que a introdução das idéias, separadas das operações e métodos, dos Quatérnions serão de grande uso no estudo de todas as partes de nosso assunto, especialmente em eletrodinâmica onde temos que lidar com um número de quantidades físicas e suas relações podem ser expressas mais facilmente por poucas expressões de Hamilton que pelas equações ordinárias".[154]

Na maior parte dos casos, Maxwell desenvolveu os cálculos usando coordenadas cartesianas, mas os resultados mais importantes, como as quatro equações da eletrodinâmica, foram expressas tanto na forma cartesiana quanto utilizando quatérnions. O uso do novo método em seu livro é freqüente e poderia ter sido maior ainda se os leitores da época conhecessem mais o método dos quatérnions.

Crowe[155] divide o uso de quatérnions no *Treatise* em três grupos: os casos onde Maxwell dá os resultados na forma de quatérnions no final da seção; os casos onde a notação de quatérnions é usada de forma tão elementar que pouca importância é atribuída a

---

153 MAXWELL 1954, vol.1, p. 9.
154 MAXWELL 1954, vol.1, p. 9.
155 CROWE 1967, p. 135-36.

ela; e os casos onde usa expressões na forma de quatérnions de modo que eles integram o desenvolvimento desejado. Como exemplo do primeiro grupo, podemos citar o capítulo "Equações gerais do campo eletromagnético"[156], no qual escreve as equações da eletrodinâmica na forma de quatérnions. Há inúmeros exemplos do segundo tipo de uso de quatérnions por Maxwell, principalmente no segundo volume do *Treatise*, onde usa freqüentemente o operador ∇ e símbolos vetoriais (em vez de componentes) para descrever quantidades vetoriais e ressaltar a natureza de tais grandezas. A aplicação dos produtos escalar e vetorial ilustra o terceiro tipo de uso de quatérnions que foram utilizados com freqüência suficiente para chamar a atenção dos leitores para sua importância.

Apesar disso, algumas partes do método dos quatérnions desagradavam Maxwell[157], como por exemplo a não homogeneidade do quatérnion, o produto completo entre dois quatérnions (que nunca foi usado) e o fato de o quadrado de um vetor ser negativo (no caso da velocidade, isso torna a energia cinética negativa). Os aspectos que agradaram a Maxwell foram incorporados em seu *Treatise* e os que não o agradaram não entraram em seu livro.

O uso que Maxwell fez de expressões na forma de quatérnions e sua notação foi suficiente para incentivar vários pesquisadores a conhecer melhor o método. A leitura do livro de Maxwell deixa a impressão de que ele está recomendando fortemente ao leitor um estudo mais aprofundado sobre os quatérnions. Além disso, há evidências (que serão discutidas a seguir) de que Gibbs e Heaviside foram conduzidos aos quatérnions pelo *Treatise*.

3.10 O sistema de Grassmann

Hamilton não foi o único que buscava um sistema formal de descrição de entes geométricos no espaço em meados do século XIX. Pelo menos outras seis pessoas de

[156] MAXWELL 1954, vol.II, p. 257-59.
[157] MAXWELL 1995, pp. 570-76 e CROWE 1967, p. 139.

quatro países diferentes estavam desenvolvendo sistemas semelhantes ao cálculo vetorial, embora diferentes do formalismo atual. São eles August Ferdinad Möbius (1790–1868), Giusto Bellavitis (1803–1880), Hermann Günther Grassmann (1809–1877), Adhémar Barré, Conde de Saint-Venant (1797–1886), Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) e o reverendo Matthew O'Brien (1814–1855).[158] O mais importante de todos esses, para o nosso estudo, foi Grassmann, cujo sistema foi publicado em sua obra *Ausdehnungslehre* de 1844[159].

Grassmann não estuda apenas grandezas vetoriais (com direção) mas todos os tipos de grandezas geométricas. No sistema de Grassmann há sete tipos de magnitudes espaciais, divididas em quatro ordens. Em cada ordem ocorre uma generalização dos elementos da ordem anterior, começando pelos pontos até chegar nos volumes. Na primeira ordem há os pontos simples ou múltiplos e as linhas retas de comprimento e direção definidos. Na segunda ordem há os segmentos de linhas retas infinitas e as áreas planas orientadas de magnitudes definidas. Na terceira ordem existem as partes definidas de planos infinitos e os volumes definidos; na quarta ordem os volumes definidos. O volume aparece duas vezes conforme são considerados produtos de três linhas retas de comprimento e direção definidos ou como produtos de quatro pontos. Os volumes de terceira ordem são o produto entre três linhas enquanto que os volumes de quarta ordem são o produto de quatro pontos.[160]

Grassmann definiu vários tipos de operações aritméticas para as grandezas geométricas estudadas, incluindo soma e produto. Para Grassmann há vários tipos de multiplicação: produto interno, externo, aberto, regressivo. A área de um paralelogramo aparece como o resultado de um produto externo de dois deslocamentos e o volume (*a.b.c*)

[158] CROWE 1967, p. 47.
[159] Grassmann publicou uma segunda edição do *Ausdehnungslehre* em 1862 com pequenas mudanças que não alteraram a forma e o conteúdo da edição de 1844.
[160] GRASSMANN 1995, pp. 288-89.

de um paralelepípedo é o produto externo de três deslocamentos sem a necessidade de introduzir uma condição adicional.[161]

Grassmann desenvolveu o “produto externo” entre linhas coplanares. A expressão para o produto externo é dada pelo produto entre os comprimentos das linhas multiplicado pelo seno do ângulo entre elas, considerando o sinal.

O produto externo de Grassmann tem semelhanças e diferenças em relação ao produto vetorial moderno. São numericamente iguais e possuem o mesmo sinal. Tanto no produto vetorial moderno quanto no produto externo de Grassmann, o resultado da multiplicação não é do mesmo tipo que os fatores envolvidos, ou seja, não são vetores. Na multiplicação moderna o resultado é um pseudo-vetor. No produto de Grassmann, o resultado é uma área com sinal positivo ou negativo dependendo da ordem da multiplicação. Além disso, o produto externo entre três vetores que estão no mesmo plano, ou em planos paralelos, é nulo.

O *produto externo* de Grassmann, interpretado como uma área com sinal positivo ou negativo, dependendo da ordem da multiplicação, não tem um vetor normal associado a ela, ou seja, não há uma orientação associada ao espaço tridimensional. Por isso não podemos dizer que o produto externo seja idêntico ao produto vetorial atual. Mas o produto externo de Grassmann possui uma orientação, já que pode ser positivo ou negativo, ou seja, possui uma orientação interna. A notação usada para o produto externo é $a.b = ab$ sen $(ab) = -b.a$.[162]

O *produto interno* entre dois deslocamentos não paralelos a e b é obtido pelo produto entre a e a projeção ortogonal de b sobre a. A notação usada por Grassmann para representar o produto interno é $a \times b$, e $a \times a = a^2$. Na época, o produto escalar como conhecemos hoje não existia, mas a idéia envolvida no produto interno de Grassmann é a mesma do produto escalar atual.

[161] GRASSMANN 1995, p. 85.
[162] GRASSMANN 1995, p. 88.

Alguns elementos posteriormente usados na análise vetorial de Gibbs-Heaviside já haviam aparecido no *Ausdehnungslehre* de 1844. Esse trabalho contém elementos que poderiam ter gerado a análise vetorial moderna, mas isso não ocorreu pois Heaviside não estudou Grassmann, e Gibbs conheceu os quatérnions e seguiu as sugestões feitas por Maxwell, além de não ter entendido os escritos iniciais de Grassmann sobre álgebras múltiplas.

Gibbs era um grande admirador de Grassmann, o que o levou a escrever ao filho de Grassmann uma carta em 1887 sugerindo a publicação de uma outra edição do *Ausdehnungslehre* de 1862 e dizendo que usou esse tratado em suas aulas. Sugere também a publicação do trabalho sobre marés escrito por Grassmann como uma importante contribuição a história do desenvolvimento das idéias matemáticas do século XIX.[163] No entanto, a influência real de Grassmann parece ter sido pequena, como será mostrado mais adiante.

Apesar de Gibbs ter criado seu sistema independentemente do de Grassmann, os dois sistemas têm muito em comum e parece natural Gibbs argumentar sobre a importância e poder do sistema de Grassmann, embora não tenha se inspirado diretamente em Grassmann para elaborar seu sistema vetorial.

Outro trabalho importante de Grassmann foi o artigo publicado em 1845 chamado "Neue Theorie der Elektrodynamik". Este trabalho contém uma expressão para a lei de ação mútua entre dois elementos de corrente[164] que foi redescoberta independentemente por Clausius em 1876.

Grassmann publicou uma nota requerendo a prioridade pela descoberta, que foi reconhecida por Clausius.[165] Grassmann utilizava a idéia de ação à distância e não

---

[163] CROWE 1967, p. 160.

[164] Em notação atual, a expressão para a força entre elementos de corrente é dada por $d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(i_1 d\vec{l}_1 \times \frac{i_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}}{r^2} \right)$

[165] CROWE 1967, pp. 80 e 94 e GRASSMANN 1995. Foi através deste trabalho de Clausius que Gibbs conheceu Grassmann, como será discutido adiante.

desenvolveu uma teoria de campo. Não utilizou, por isso, nenhum formalismo de campo envolvendo operações diferenciais.

3.11 O sistema de Clifford

William Kingdon Clifford (1845–1879) também desenvolveu um sistema vetorial que tem elementos semelhantes ao sistema posterior desenvolvido por Gibbs e Heaviside. Clifford foi um dos poucos matemáticos da época que conhecia bem tanto o sistema de quatérnions quanto o sistema de Grassmann. Seu interesse principal era a matemática pura. Desenvolveu uma álgebra própria que incorpora os quatérnions dentro da álgebra de Grassmann e posteriormente os generalizou[166].

A obra que mais nos interessa é *Elements of Dynamic* de 1877[167] onde Clifford introduziu o conceito de vetores (ou "passos" como às vezes os chamava). Definiu o produto de dois vetores *ab* e *ac* como sendo a área do paralelogramo formada pelos dois vetores: "a magnitude deste produto é *ab.ac* sen *bac*; como qualquer outra área, deve ser considerada como uma quantidade direcionada". O sinal do produto vetorial depende do sentido de um vetor para o outro e se inverte se a ordem dos termos é trocada. A definição do produto escalar é feita como a parte escalar do produto de quatérnions: "a soma negativa dos produtos de suas componentes ao longo dos eixos". Além dos produtos, Clifford usou o operador ∇ (sem este símbolo) e introduziu o termo "divergente" como sendo o negativo do convergente de Maxwell. Usou também a operação linear vetorial.

Clifford pode ser considerado uma figura de transição, pois escreveu depois de Grassmann e Hamilton e antes de Gibbs e Heaviside. Clifford percebeu os benefícios do uso de métodos vetoriais, principalmente em mecânica. Além disso, no *Elements of Dynamic* introduziu o costume de se definir separadamente os produtos vetorial e escalar. Isso é um inovação conceitual em relação à teoria de quatérnions, pois seus adeptos nunca

---

[166] *Aplications of Grassmann's extensive algebra* in CLIFFORD 1882.
[167] CLIFFORD 1877.

interpretaram $V\alpha\beta$ e $S\alpha\beta$ como dois produtos separados entre os dois vetores α e β mas sempre como duas partes de um mesmo produto completo entre os quatérnions α e β.

Clifford selecionou e alterou várias partes do sistema de quatérnions e elaborou um sistema vetorial mais geral que o desenvolvido posteriormente por Gibbs e Heaviside. No entanto, Clifford morreu muito cedo, antes de completar seu trabalho.

3.12 O sistema vetorial de Gibbs

Por volta de 1890 Gibbs já tinha feito importantes descobertas, mas ainda era desconhecido. Nasceu em 1839, graduou-se em Yale em 1858 e obteve em 1863 o primeiro doutorado em engenharia dos EUA, mas seus maiores interesses eram a física teórica e a matemática. Obteve a posição de professor de física matemática em Yale em 1869, onde permaneceu até sua morte em 1903.

No primeiro ano de sua carreira em Yale, seus principais interesses eram mecânica e óptica. Seu interesse sobre termodinâmica foi crescendo com o passar do tempo, resultando na publicação de três artigos, sendo o último o clássico "On the Equilibrium of Heterogeneous Substances" publicado em 1876 e 1878, considerado como uma das grandes contribuições do século. A importância deste trabalho só foi reconhecida por volta de 1890. Assim, quando começou a divulgar seu sistema vetorial em 1881, ainda era um ilustre desconhecido.[168]

Em 1881 Gibbs imprimiu com seus próprios recurso a primeira metade de seu *Elements of Vector Analysis*[169] e a segunda metade em 1884. Para tornar seu trabalho conhecido, mandou cópias para mais de 130 cientistas e matemáticos, entre eles Michelson, Newcomb, J. J. Thomson, Rayleigh, FitzGerald, Stokes, Kelvin, Cayley, Sylvester, G. H. Darwin, Heaviside, Helmholtz, Clausius, Kirchhoff, Lorentz, Weber, Felix Klein, Schlegel

[168] WHEELER 1979, p. 100-01.
[169] GIBBS 1961.

e também para Tait, provavelmente sem imaginar a batalha que se iniciaria alguns anos depois.

O parágrafo introdutório do *Elements of Vector Analysis* dá uma idéia da influência dos quatérnions sobre o sistema de Gibbs:

> Os princípios fundamentais da análise que se segue são familiares, sob uma forma um pouco diferente, para os estudantes dos quatérnions. A maneira pela qual o assunto é desenvolvido é um pouco diferente da seguida em tratados de quatérnions, pois o objetivo do autor não requer nenhum uso da concepção de quatérnion, sendo [o objetivo] simplesmente dar uma noção adequada para as relações entre vetores, ou entre vetores e escalares, que parecem mais importantes e que levam mais prontamente a transformações analíticas e para a explicação destas transformações. Como precedentes deste abandono do uso dos quatérnions, podemos citar *Kinematic* de Clifford. Com relação a isso, o nome de Grassmann também pode ser mencionado com o método que se segue se encaixa melhor em alguns aspectos do que com o de Hamilton.[170]

Gibbs se protegeu usando os nomes de Grassmann e Clifford para introduzir mudanças na notação dos quaternionistas pois eles já haviam elaborado sistemas algébricos diferentes dos quatérnions. Neste trecho Gibbs diminui a influência de Hamilton sobre seu sistema e aumenta a de Grassmann, mas na carta a Victor Schlegel discutida abaixo vemos que não foi influenciado por Grassmann simplesmente porque foi incapaz de ler o *Ausdehnungslehre*. Na realidade se inspirou em Maxwell e Hamilton.

Este é o trecho relevante da carta a Schlegel:

> Sua rápida caracterização de minha Análise Vetorial no Fortsch. Math. sugere que você pode estar interessado em saber a relação precisa daquele folhetim com o

[170] GIBBS 1961, p. 17.

trabalho de Ham. & Grass.[171] [Hamilton e Grassmann] com respeito à sua composição. Meu primeiro contato com quatérnions foi lendo E&M [*Treatise on Electricity and* Magnetism] de Maxwell onde a notação dos Quatérnions é usada consideravelmente. Fiquei convencido de que para dominar aqueles assuntos, era necessário dominar aqueles métodos. Ao mesmo tempo vi que embora o método fosse chamado quaterniônico, as idéias do quatérnion eram estranhas ao assunto. Com respeito ao produto de vetores, vi que havia duas importantes funções (ou produtos) chamados a parte vetorial e a parte escalar do produto, mas que a união das duas formas, o chamado produto (completo), não melhorava a teoria como um instrumento de investigação geométrica. Novamente com respeito ao operador ∇ aplicado a um vetor vi que a parte vetorial e a parte escalar do resultado representam operações importantes, mas a sua união (geralmente para ser separada depois) não pareceu uma idéia valiosa. Isso de fato é apenas uma repetição de minha primeira observação, pois o operador é definido pela multiplicação de vetores e uma mudança na idéia de multiplicação envolveria uma mudança no uso do operador ∇. Então eu comecei a trabalhar *ab initio* a álgebra dos dois tipos de multiplicação, as três operações diferenciais do ∇ aplicadas a um escalar e as duas operações aplicadas a um vetor e aquelas funções ou operadores integrais os quais (com certas limitações) são o inverso dos ditos operadores diferenciais e que têm um papel importante em muitos departamentos da Fís. Mat. A esses assuntos foi adicionado o das funções lineares vetoriais que também são proeminentes no E&M de Maxwell[...]. Meu contato com o trabalho de Grassmann também foi devido ao assunto de E. [eletricidade] e em particular à nota que ele publicou no Crelles Journal em 1877 chamando atenção para o fato de que a lei de ação mútua entre dois elementos de corrente que Clausius tinha acabado de publicar foi dada por ele em 1845. Eu era o maior interessado no assunto pois me dediquei (antes de

[171] Como de costume, provavelmente Heaviside estava sendo irônico ao usar essas abreviações para os nomes de Hamilton e Grassmann, já que ham e grass, em inglês, significam presunto e grama, respectivamente.

> ver o trabalho de Clausius) a considerá-la como a expressão mais simples para a ação mecânica e provavelmente pela mesma razão que Grassmann, pois a lei é muito simples quando expressa através do produto externo. Por todos esses acontecimentos vi que os métodos que estava usando eram próximos aos de Hamilton, porém eram quase exatamente os de Grassmann. Procurei a segunda edição do Ausd. [*Ausdehnungslehre*]. Mas não posso dizer que o achei de fácil leitura. De fato nunca tive a perseverança para terminá-lo totalmente e tirei mais idéias das suas memórias variadas do que daquele trabalho. No entanto não estou certo de que os escritos de Grassmann exerceram alguma influência particular sobre minha A-V [análise vetorial], embora esteja contente por me proteger no parágrafo introdutório atrás de um ou dois nomes tão distintos [Grassmann e Clifford] ao fazer mudanças na notação que achei que poderiam causar repulsa aos quaternionistas. De fato, se você ler meu folheto cuidadosamente, verá que tudo segue de uma lógica inexorável da álgebra para o problema que me surgiu muito antes do meu conhecimento de Grass. Não duvido que você considere, como eu, os métodos de Grassmann superiores aos de Hamilton. Parece-me que pode interessar-lhe saber como comecei com algum conhecimento dos métodos de Ham. e influenciado simplesmente pelo desejo de obter uma álgebra mais simples para expressões das relações da Geom. Fís. etc. fui levado essencialmente à álgebra dos vetores de Grassmann, independentemente de qualquer influência dele ou de qualquer outro[172].

Podemos assim afirmar que o sistema vetorial de Gibbs, publicado em 1881, não foi influenciado por Grassmann pois na época da elaboração do *Elements of Vector Analysis* ele ainda não havia lido o *Ausdehnungslehre*, como o próprio Gibbs afirma. Nesta carta fica claro que o método de Gibbs foi uma "melhora" do método de Hamilton, tornando-o menos geral e mais voltado para as necessidades da época.

---

[172] WHEELER 1979, pp. 107-09.

Apesar de não ter lido o *Ausdehnungslehre* na época em que escreveu o *Elements of Vector Analysis*, Gibbs já conhecia o trabalho de Grassmann, *Neue Theorie der Elektrodynamik*, no qual publicou a lei de ação mútua entre correntes.[173] A influência de Grassmann sobre Gibbs aparece bem mais em seu trabalho *On Multiple Algebra*[174], no qual lida com conceitos mais abstratos e gerais, citando Grassmann várias vezes.

Sobre a relação com Maxwell, vemos que o interesse de Gibbs sobre eletricidade e magnetismo o levou ao *Treatise* de Maxwell, onde percebeu que os quatérnions eram úteis para a física matemática. Assim, a partir do trabalho de Maxwell, Gibbs foi estudar os quatérnions e depois fez exatamente o que Maxwell havia declarado ser necessário em uma análise vetorial útil para tratar problemas físicos, incorporando as questões que foram criticadas por Maxwell e também seu uso discriminado de certos aspectos da teoria de quatérnions, como a soma de vetores, o produto separado em parte escalar e vetorial e também o uso do operador ∇.

Gibbs, como Hamilton e Tait, usa letras gregas minúsculas para designar vetores, letras romanas minúsculas para designar escalares e *i, j, k* para designar "sistema de vetores unitários normais", sendo que *i, j, k* são paralelos aos eixos X, Y, Z. Como nos quatérnions, os vetores normais também estão associados à rotação, sendo que a definição de Gibbs é uma simplificação da de Tait. Gibbs supõe que os três vetores são perpendiculares e que "devemos sempre supor que *k* está do lado do plano *i–j* no qual uma rotação de *i* para *j* (de um ângulo reto) aparece no sentido anti-horário. Em outras palavras, as direções de *i, j, k* são determinadas de modo que se forem rodados (permanecendo rigidamente conectados uns aos outros) *i* apontando para o leste e *j* para o norte, *k* apontará para cima".[175]

Gibbs usa tanto letras gregas α, β, γ quanto *i,j, k* para representar os vetores unitários. Esta notação é confusa pois ele também usa letras gregas para representar vetores como, por exemplo, para definir o produto entre vetores.

[173] GRASSMANN 1995.
[174] GIBBS 1961.
[175] GIBBS 1961, p. 20.

A soma entre dois vetores é dada pela soma dos coeficientes de cada componente, como fazemos atualmente.

Se $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$, $\sigma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma$ *etc*.,

então

ñ + ó + *etc.* $= (a + a' + etc)\alpha + (b + b' + etc)\beta + (c + c' + etc)\gamma$

Ao tratar o produto entre vetores, Gibbs introduziu o "produto direto" escrito como $\alpha.\beta$ e o "produto torcido" escrito como $\alpha\times\beta$ que correspondem aos atuais produtos escalar e vetorial. A relação entre esses produtos e o sistema de quatérnions pode ser expresso por $\alpha.\beta = -S\alpha\beta$ e $\alpha\times\beta = V\alpha\beta$. O produto completo (quaterniônico) entre vetores seria escrito como $\alpha\beta \equiv S\alpha\beta + V\alpha\beta = \alpha.\beta + \alpha\times\beta$, mas Gibbs nunca fez este tipo de combinação e essa era justamente uma das principais críticas aos quatérnions.

O produto direto entre α e β "é a quantidade escalar obtida pela multiplicação do produto de suas magnitudes pelo cosseno do ângulo formado por suas direções". O produto torcido é uma quantidade vetorial, cuja "magnitude é obtida pela multiplicação das magnitudes de α e β pelo seno do ângulo formado entre suas direções". Sua direção é perpendicular aos vetores α e β e o sentido é dado pela regra da mão direita.[176]

Com essas definições, os produtos entre *i, j* e *k* resultam em[177]

$$i.i = j.j = k.k = 1,$$

$$i.j = j.i = i.k = k.i = j.k = k.j = 0,$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0,$$

$$i \times j = k, j \times i = -k,$$

$$j \times k = i, k \times j = -i,$$

$$k \times i = j, i \times k = -j.$$

---

[176] GIBBS 1961, p. 20.

É importante notar que, na teoria de Hamilton, os produtos *i.i, j.j* e *k.k* eram negativos pois $i = \sqrt{-1}$.

Os valores dos dois tipos de produtos entre vetores $\alpha = xi + yj + zk$ e $\beta = x'i + y'j + z'k$, segundo Gibbs, são dados por[178]

$$\alpha.\beta = xx' + yy' + zz' \text{ e}$$

$$\alpha \times \beta = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k.$$

Nos capítulos II e IV do *Elements of vector analysis*, Gibbs define as propriedades do cálculo diferencial e integral de vetores. Define o operador ∇ da mesma forma que Hamilton e Tait e o aplica a uma função escalar *u* que depende da posição: *"*∇u é a função vetorial da posição no espaço que tem em qualquer lugar a direção do crescimento mais rápido de *u* e a magnitude igual à taxa daquele crescimento por unidade de comprimento. ∇u pode ser chamado de *derivada* de *u"*.[179]

O operador ∇ pode ser aplicado a uma função vetorial ω de duas maneiras diferentes, isto é, como um produto escalar ou um produto vetorial:

$$\nabla.\omega = i.\frac{d\omega}{dx} + j.\frac{d\omega}{dy} + k.\frac{d\omega}{dz} \text{ e}$$

$$\nabla \times \omega = i \times \frac{d\omega}{dx} + j \times \frac{d\omega}{dy} + k \times \frac{d\omega}{dz}$$

chamados respectivamente de "divergência" de ω e "rotacional" de ω.[180] Como vimos, Maxwell havia definido a *convergência* de um vetor em seu *Treatise*. A *divergência* é a convergência de Maxwell com o sinal trocado, pois Gibbs deixou de considerar o sinal

---

[177] GIBBS 1961, p. 21.
[178] GIBBS 1961, p. 22.
[179] GIBBS 1961, p. 31.

negativo que aparece no produto escalar. Heaviside também passou depois a usar o termo "divergente" que Clifford havia introduzido. O termo "divergente" é um nome óbvio para o negativo de convergente e, além disso, a representação em termos de linhas de força também sugere isso.

Gibbs também mostra como calcular integrais de funções escalares usando os teoremas de Gauss e Stokes. Se $d\rho$, $d\sigma$ e dv representam elementos de linha, superfície e volume respectivamente e u e ω são funções escalar e vetorial, valem as seguintes relações que são usadas até hoje e que já haviam sido escritas por Hamilton e Tait usando a notação de quatérnions[181]:

$$\int \nabla u . d\rho = u - u'$$

$$\iint \nabla \times \omega . d\sigma = \int \omega . d\rho$$

$$\iiint \nabla . \omega \, dv = \iint \omega . d\sigma$$

Além destas integrais, Gibbs define outras três que são chamadas de "potencial", "newtoniano" e "laplaciano".[182] Se u' é uma função escalar que depende da posição ρ', o potencial de u' é uma função escalar e o newtoniano de u' é uma função vetorial dadas respectivamente por

$$\mathrm{Pot}\, u = \iiint pot u' \, dv' = \iiint \frac{u'}{[\rho' - \rho]_0} dv' \quad e$$

$$New u = \iiint new u' \, dv' = \iiint \frac{\rho' - \rho}{[\rho' - \rho]_0^3} u' \, dv'$$

[180] GIBBS 1961, p. 31.
[181] Como mostrado na seção 3.6.
[182] GIBBS 1961, p. 44.

A integral Pot de uma função escalar equivale a integrar um potencial que varia com o inverso da distância (como o potencial gravitacional ou eletrostático) e *u*' tem o papel de uma densidade de massa ou carga. A integral New equivale a integrar uma força que varia com o inverso do quadrado da distância.

Se ω' é um vetor que representa a quantidade e direção de alguma coisa situada no ponto ρ', as integrais de volume do potencial e o laplaciano de ω' no ponto são dadas por

$$\mathrm{Pot}\,\omega = \iiint \mathrm{pot}\ \omega' dv' = \iiint \frac{\omega'}{[\rho'-\rho]_0} dv' \ \text{ e}$$

$$\mathrm{Lap}\,\omega = \iiint \mathrm{lap}\,\omega' dv' = \iiint \frac{\rho'-\rho}{[\rho'-\rho]_0^3} \times \omega' dv'$$

Esse laplaciano de Gibbs é diferente do laplaciano usado atualmente e que Maxwell chamou de "concentração", dado por $-\nabla.\nabla u$. Gibbs sugere chamar $\nabla.\nabla u$ (ou $\nabla.\nabla\omega$) de "dispersão" de *u* (ou de ω).[183]

No capítulo III do *Elements of vector analysis*, Gibbs trata das funções vetoriais lineares e para isso introduz os termos e conceitos de diade e diádico que são análogos ao produto tensorial. Uma expressão do tipo $\alpha\lambda.\rho + \beta\mu.\rho +$ etc representa uma função linear de ρ . Uma expressão na forma de $\alpha\lambda$ ou $\beta\mu$ é chamada de díade, onde α e λ são vetores e um diádico se refere a uma soma de díades. Nesses dois capítulos Gibbs seguiu o tratamento de funções vetoriais lineares dado por Hamilton e Tait. As principais aplicações físicas das funções lineares desenvolvidas por Gibbs, bem como por Tait, são para rotações e tensões.

O último capítulo lida com a análise de bivetores[184] nos quais alguns dos coeficientes escalares assumem valores imaginários. Gibbs escreve um bivetor como $\rho_1+i\rho_2$, onde ρ_1 e ρ_2 são vetores e *i* é a unidade imaginária. Hamilton e Tait desenvolveram

[183] GIBBS 1961, p. 37.

a análise de biquatérnions, isto é, a soma de um quatérnion com outro multiplicado pela unidade imaginária, que são essencialmente análogos aos bivetores.

A tabela no fim deste capítulo compara a notação de Gibbs com as de Tait e Maxwell. Vemos que apesar de ele não citar Hamilton ou Tait, fica claro que usou a idéia dos quatérnions, pois utiliza a mesma notação de Tait e Hamilton, embora separando os produtos escalar e vetorial e eliminando o sinal negativo no produto escalar.

Em dois de seus cinco artigos sobre teoria eletromagnética da luz, Gibbs usou métodos vetoriais mas sem ressaltar a importância do método. Publicou o artigo "On the determination of elliptic orbits from three complete observations" que é mais matemático, com demonstrações e voltado para os astrônomos em 1889. Neste artigo dá uma idéia de partes elementares de sua análise vetorial, como os produtos, e com o método desenvolveu uma técnica para a determinação de uma órbita a partir de três observações completas. Logo após, A. W. Phillps e W. Beebe testaram com sucesso o método para a órbita do cometa Swift.

Gibbs morreu em 1903 após fazer inúmeras contribuições para a análise vetorial. Isso se deve não só à sua habilidade em matemática, mas também a seu poder em construir um sistema em harmonia com as necessidades de seu tempo.

3.13 Heaviside e a análise vetorial

Oliver Heaviside (1850–1925), trabalhando na Inglaterra, também desenvolveu um sistema vetorial na mesma época, independentemente de Gibbs que trabalhava nos Estados Unidos. Apesar de sempre permanecerem separados pelo Atlântico, durante a controvérsia da década de 1890 eles estiveram do mesmo lado e desenvolveram um grande respeito mútuo. Problemas em eletricidade começaram a interessá-lo enquanto trabalhava como operador de telégrafo entre 1868 e 1874. Heaviside nunca almejou postos acadêmicos ou qualquer outro trabalho. Esse emprego de telegrafista foi seu único emprego. Durante as

[184] GIBBS 1961, pp. 84-90.

horas livres Heaviside fazia experimentos sobre eletricidade e também se dedicou ao estudo de matemática. Entre os livros que estudou estava o *Treatise* de Maxwell que exerceu grande influência sobre Heaviside[185], como em Gibbs. Como vimos, Maxwell exibiu seus resultados utilizando quatérnions e esse fato levou Heaviside a estudar o trabalho de Tait, *Elementary Treatise on Quatérnions*.

Para Heaviside o maior defeito do sistema de quatérnions seria a dificuldade para entender completamente as idéias do sistema. Ele seria acessível apenas para especialistas em matemática. Outro problema era a pequena utilidade prática do produto completo entre quatérnions. Critica também a notação dos quatérnions, pois os numerosos prefixos do sistema contribuem para a dificuldade na leitura

Heaviside nunca escreveu um tratado formal sobre análise vetorial. As noções que desenvolveu sobre vetores e suas relações foram introduzidas em seus artigos sobre eletromagnetismo escritos a partir de 1882 e 1891, reunidos depois em dois volumes chamados *Electrical Papers*.

Em 1882 Heaviside aponta a grande necessidade de um método vetorial para representar as numerosas grandezas vetoriais em física e comenta que os quatérnions são este método.

> Um sistema matemático notável foi inventado por Sir W. Hamilton, chamado Quatérnions, que pode ser descrito como o cálculo dos vetores. Devido à presença universal dos vetores na ciência física, ele é exatamente adequado para expressar as relações físicas. Ao invés de separar os vetores em três componentes trabalhando com elas como escalares e quando necessário recompondo-as em vetores (um método redundante), no cálculo dos vetores podemos fixar nossa atenção sobre os próprios vetores e trabalhar diretamente com eles. Uma equação toma o lugar de três. As investigações são muito diminuídas. As relações reais

[185] NAHIN 1988, p. 22.

entre as quantidades não são perdidas de vista e reduzem grande parte do trabalho inútil que seria feito no sistema escalar.

Alguém poderia dizer que o cálculo dos Quatérnions deve rapidamente suplantar os métodos originais nas aplicações físicas; de fato isto deveria acontecer logo. Mas não acontecerá. Será por causa do mero Conservadorismo – a raiva de abandonar os antigos caminhos, mesmo que seja para melhor? Apesar de isto ser parcialmente verdade, não pode ser a verdade completa. Contra as vantagens dos Quatérnions mostradas acima devemos apontar o fato que as operações feitas com eles são muito mais difíceis que as correspondentes no sistema ordinário, de modo que a economia de trabalho é em grande parte imaginária. Há muito mais para ser pensado pois a mente tem que fazer o que na álgebra escalar é feito quase mecanicamente. Ao mesmo tempo, quando trabalhamos com vetores ao invés do sistema escalar há a grande vantagem de ter continuamente em mente as idéias fundamentais do sistema vetorial. Faça um compromisso, olhe além das equações escalares fáceis de manipular porém complexas e veja um único vetor por trás delas, expressando coisas reais[186].

Como vemos, em 1882 Heaviside elogiou o sistema de quatérnions, afirmando que ele é muito mais simples que o uso do cálculo escalar pois economiza trabalho ao condensar três equações em uma e permitir uma rápida visualização das grandezas físicas, mas tem o inconveniente de manter a mente sempre ocupada com cálculos que não são automáticos. As críticas que fez aqui aos quatérnions não estão relacionadas aos quatérnions em si, pois qualquer sistema que tenha uma notação condensada tem as mesmas características.

[186] HEAVISIDE 1970, vol.I, p. 199.

Nestes artigos, Heaviside usa letras em negrito para representar grandezas vetoriais como força eletrostática, potencial vetor, força magnética, corrente elétrica e outras. Explica o significado do rotacional de um vetor, aplicando-o para mostrar que a "corrente **C** = 4π x rotacional da força magnética".[187] Discute o significado dos teoremas de Gauss e Stokes, chamando-os de "teorema da divergência" e "teorema da rotação". Símbolos fundamentais como *i, j, k* nunca aparecem. Também utiliza o termo "tensor" para se referir ao módulo de um vetor, como Hamilton e Tait[188]

A discussão sobre indutância mútua entre dois circuitos de corrente leva Heaviside a definir uma quantidade igual ao produto escalar moderno, que Heaviside utiliza freqüentemente sem citar Hamilton ou Tait.

> Se **a** e **b** são vetores quaisquer, *a* e *b* seus tensores ou magnitudes, e θ o ângulo entre **a** e **b,** então o escalar *ab* cos θ é chamado de produto escalar de **a** e **b** e é denotado simplesmente por **ab**[189].

Heaviside expõe a função linear vetorial, utilizando os vetores **D** e **E** que estão relacionados através do operador linear *c*, de modo que **D** = *c***E**. A ordem em que Heaviside apresenta os conceitos do cálculo vetorial é a mesma ordem usada por Tait e Kelland. Isto sugere que Heaviside seguiu os passos destes últimos, apesar de não citá-los.[190]

Heaviside relaciona força eletrostática **R** com a densidade volumétrica de eletricidade ρ utilizando o convergente de **R** e também o divergente da seguinte forma: $4\pi\rho = -\text{conv.}\mathbf{R}$, ou $4\pi\rho = \text{div.}\mathbf{R}$, onde o divergente é dado em função das componentes cartesianas e não pelo operador ∇. Usa a notação curl para representar o rotacional, também escrito em componentes cartesianas.

---

[187] Atualmente, no sistema MKS, esta equação seria escrita como $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$

[188] HEAVISIDE 1970, vol. I, p. 207.

[189] HEAVISIDE 1970, vol. I, p. 239.

[190] HEAVISIDE 1893, pp. 432-33 e KELLAND 1873, pp. 182-84.

No ano seguinte (1883), Heaviside dedicou uma seção do artigo “Some Electrostatic and magnetic relations” ao operador ∇ e suas aplicações, citando Tait para dizer que curl, div e “variação espacial” (gradiente) são variantes da mesma operação aplicada a funções de natureza diferente.

Heaviside aplica o operador ∇ a uma função vetorial, afirmando que “quando ∇ é aplicado a um vetor, resulta em seu rotacional e em sua convergência respectivamente.” Aqui Heaviside está fazendo exatamente o mesmo uso do operador ∇ que Tait e os quaternionistas faziam, ou seja, o resultado é a soma da convergência (que tem sinal negativo) com o rotacional. Além disso, usa as mesmas regras para o produto entre os vetores unitários que atacou tão ferozmente em trabalhos posteriores:[191]

“Seja o vetor $\mathbf{R} = Xi + Yj + Zk$ e a expressão completa de ∇

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}, \text{ então}$$

$$\nabla\mathbf{R} = \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right)(Xi + Yj + Zk).$$

Usando a convenção $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, obtemos

$$\nabla\mathbf{R} = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) + i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dz}\right),$$

isto é,

$\nabla\mathbf{R} = \text{conv } \mathbf{R} + \text{curl } \mathbf{R}$.”

Heaviside acrescentou uma nota de rodapé na republicação deste artigo no *Electrical papers*, afirmando que foi apenas neste artigo que usou as idéias e notações dos quatérnions e que queria enfatizar que o uso foi dispensável. O artigo foi escrito em 1883 e reeditado no *Electrical papers* em 1892, mostrando que a controvérsia fez Heaviside tentar mudar a importância dos quatérnions para sua álgebra vetorial e também em seus escritos sobre eletromagnetismo.

Como Tait e Hamilton, Heaviside também associa *i, j, k* a rotações e ilustra da mesma maneira a propriedade $i^2 = -1$:

> Para os quadrados podemos verificar que $i^2 = -1$ assim: rode *j* de 90° duas vezes ao redor do eixo x. A primeira rotação faz *j* coincidir com *k* e a segunda o leva a coincidir com a primeira linha mas em sentido contrário. [...] Este uso de vetores para denotar tanto linhas desenhadas em uma direção definida como rotações ao redor de tais linhas é o fundamento de grande simplicidade e concisão das operações e expressões dos quatérnions; ele é justificado pelas regras de identidade já mencionadas para composição de velocidades e rotações e por sempre levar a resultados que são corretos quando expandidos, mas devo confessar que este uso duplo do mesmo símbolo torna difícil estabelecer as partes elementares dos quatérnions de uma maneira inteligível.[192]

Logo a seguir Heaviside afirma que o uso de quatérnions é apenas um parênteses e que não tem mais nada a ver com eles. Conclui o artigo com uma seção sobre movimento de fluidos para ilustrar o significado do rotacional e divergente de uma função vetorial. A escolha de movimento de fluidos reflete a preocupação de Heaviside de tornar o significado dos conceitos matemáticos claros e acessíveis, pois o movimento de fluidos é uma área que facilita o entendimento destes conceitos.

Heaviside introduziu o produto vetorial em 1885[193] na discussão da lei de Ohm e também o conceito de operador linear para relacionar a densidade de corrente de condução **C** com a força elétrica **E**, pela equação $\mathbf{C} = k\ \mathbf{E}$, onde k é um escalar para um meio isotrópico e um operador linear para um meio anisotrópico. Se o corpo puder girar é necessário acrescentar um termo na corrente dado por $\mathbf{C} = \mathbf{V\varepsilon E}$, onde o símbolo V significa o produto vetorial, com a mesma interpretação atual.[194]

---

191 HEAVISIDE 1970, vol. I, p. 271.
192 HEAVISIDE 1970, vol. I, p. 271.
193 HEAVISIDE 1970, vol. I, pp. 429-560.
194 HEAVISIDE 1970, vol. I, p. 431.

A primeira apresentação completa de seu sistema vetorial apareceu em 1885 em um artigo publicado na *Philosophical Magazine*.[195] Neste artigo, Heaviside ainda se refere ao formalismo que utiliza como método de quatérnions (porém com as equações escalares escritas separadamente das vetoriais) como um modo importante para simplificar equações escritas na forma cartesiana. Suas críticas aos quatérnions ainda eram gentis, tanto que apresentou seu sistema como um meio termo entre os métodos cartesianos abreviados e o de quatérnions.

> Devido à extraordinária complexidade da investigação quando escrita na forma Cartesiana (que comecei a escrever, mas abandonei horrorizado), é necessário algum método que abrevie as expressões. [...] Portanto adotei, com alguma simplificação, o método dos vetores que de fato parece o único método apropriado. [...] E como nossas equações serão completamente escalares ou completamente vetoriais, a investigação é feita independente dos quatérnions simplesmente definindo o produto escalar e o produto vetorial separadamente. Desta forma, a investigação é Cartesiana modificada por certas formas simples de abreviação. Há tempos sou da opinião que seria útil a rápida introdução do método dos quatérnions nas investigações matemáticas práticas em Física. De fato, cada analista o adota de alguma forma: primeiro, escrevendo apenas uma das três equações escalares Cartesianas para representar uma equação vetorial, deixando as outras subentendidas; e também escrevendo apenas o primeiro dos três produtos que ocorrem no produto escalar de dois vetores. Penso que isto sistematizado é o caminho próprio e natural pelo qual o método de quatérnions deve ser gradualmente introduzido[196].

[195] HEAVISIDE 1970, vol. II, pp. 1-23.
[196] HEAVISIDE 1970, vol. II, p. 3.

Heaviside defende o uso dos quatérnions na física, embora se refira a eles como método dos vetores. Os quatérnions já seriam usados inconscientemente pelos físicos ao abreviarem as equações cartesianas. Isso é uma interpretação errada dos quatérnions, pois não leva em conta que eles são, por definição, formados por uma parte escalar e outra vetorial e estão relacionados a rotações. Ao afirmar isto, Heaviside já está simplificando os quatérnions e interpretando-os como vetores. De fato, esta é uma modificação natural pois em várias partes do seu trabalho Tait também os usa desta forma e também foi assim que Maxwell usou os quatérnions no *Treatise*.

O sinal negativo diante do produto escalar foi um dos pontos duramente criticados por Heaviside durante as discussões na *Nature*. Ele reclama que com o sinal negativo as expressões não poderiam ser traduzidas diretamente para a forma cartesiana, que não tem sinal negativo.

> A necessidade de a notação estar em harmonia com as fórmulas Cartesianas é um assunto de grande importância prática, de modo que possamos passar de uma para a outra prontamente, pois isso é necessário nas investigações mistas sem mudança de notação. Parece-me que esta condição não foi atingida pela notação do Professor Tait, com suas numerosas letras como prefixos e especialmente pelo –S antes de cada produto escalar, o sinal negativo sendo causa de grandes inconvenientes nas transições. Além disso, penso [...] que os produtos escalar e vetorial devem ser definidos como indicando tais e tais combinações, evitando assim alguns raciocínios extremamente obscuros e quase metafísicos que são totalmente desnecessários.[197]

Nos trechos acima fica claro que Heaviside adotou o sistema de quatérnions e introduziu algumas mudanças conscientemente, principalmente introduzindo uma notação mais enxuta, tirando o sinal negativo antes do produto escalar de modo a torná–lo

[197] HEAVISIDE 1970, vol. II, p. 3.

compatível com o método cartesiano e considerando os produtos vetorial e escalar separadamente, com significados distintos e independentes. Podemos interpretar estes trechos como a síntese de toda a discussão que ocorreu posteriormente, pois deixa claros os pontos dos quatérnions de que Heaviside discordava. Essas críticas eram reforçadas pelo uso prático que ele, Maxwell e o próprio Tait fizeram dos produtos.

Como Heaviside passa a usar o produto escalar e vetorial separadamente, é preciso definir o significado destes produtos entre os vetores unitários. Neste artigo, Heaviside muda sua definição do produto entre os vetores unitários e define $i^2 = j^2 = k^2 = 1$, para representar o produto escalar. O produto vetorial é dado por $\mathrm{V}ij = k$, $\mathrm{V}ji = -k$, etc.

O sinal positivo no produto escalar não vale quando *i, j, k* são interpretados como versores, isto é, como operadores que produzem rotações. Isto significa que Heaviside deixou de diferenciar entre vetores unitários e versores. Apesar disso, em 1892 condena a mistura entre versores e vetores unitários como a responsável pelo negativo no produto escalar entre dois vetores unitários.[198]

As mudanças de opinião em relação à aceitação dos quatérnions começam a aparecer no prefácio do *Electrical Papers* publicado em 1891, onde Heaviside começa a negar a influência dos quatérnions sobre seu sistema, apesar de ter usado operações quaterniônicas como a adição e o produto. Para ele, seu sistema "é de um tipo rudimentar e não tem nada a ver com os quatérnions"[199], é simples, fácil de ser entendido e está em harmonia com a álgebra cartesiana pois a passagem de uma para outra não envolve mudança de sinal.

No prefácio do *Electromagnetic Theory*, publicado em três volumes nos anos de 1893, 1899 e 1912, Heaviside também nega a influência dos quatérnions sobre seu sistema. O primeiro volume é o mais importante para a história da análise vetorial pois contém seu primeiro tratamento extensivo da análise vetorial e as novas opiniões de Heaviside sobre os quatérnions. O volume III também dedica várias páginas à análise vetorial.

---

[198] HEAVISIDE 1971, vol. I, p. 303.
[199] HEAVISIDE 1970, vol. I, p. xi.

Crowe classifica o estilo de Heaviside no *Electromagnetic Theory* entre brilhante e ofensivo, dependendo do ponto de vista.[200] No prefácio de seu livro, Heaviside afirma que ainda não há tratados sobre álgebra vetorial úteis para a física matemática e em harmonia com a matemática cartesiana, à qual ele atribui grande importância. Ou seja: está desprezando os quatérnions como um sistema vetorial útil. O capítulo III do volume I do *Electromagnetic Theory* se chama "Os elementos da álgebra e análise vetorial", composto de 173 páginas nas quais apresenta sua teoria vetorial, inclusive com exemplos aplicados na teoria eletromagnética.

A polêmica de Heaviside contra os quatérnions começa na seção do capítulo III chamada "O caráter enigmático dos quatérnions e a simplicidade comparativa ganha ao ignorá-los", na qual começa chamando Tait de "metapsicomatemático" e diz que quando leu o único tratado acessível sobre quatérnions (o de Tait) sentiu "sobre seus ombros o velho homem do mar quaterniônico". Sobre os quatérnions, disse que são não apenas dispensáveis, mas também um "demônio de magnitude inconsiderável". Heaviside nega totalmente a influência dos quatérnions em sua obra ao afirmar que "não há um fantasma de nenhum quatérnion em meus artigos". Segundo ele, sua análise vetorial pode ser descrita como uma abreviação conveniente da análise cartesiana, ou como "Quatérnions sem quatérnions".[201]

Na resenha do livro *Vector Analysis* do discípulo de Gibbs, E. B. Wilson, oito anos após a controvérsia na *Nature*, Heaviside confessa as influências dos quatérnions sobre seu sistema em uma passagem na qual afirma que, apesar das dificuldades em entender os quatérnions, percebeu que eles poderiam ser utilizados em um trabalho vetorial. Porém ao tentar aplicá-los na teoria elétrica achou-os inconvenientes, antinaturais e em desarmonia com a matemática escalar pois o quadrado de um quatérnion é um número negativo. "Então joguei fora o quatérnion completo e mantive os escalares puros e vetores, usando uma álgebra vetorial muito simples em meus artigos de 1883 em diante".[202]

[200] CROWE 1967, p. 169.
[201] HEAVISIDE 1970, vol. I, pp. 134-35.
[202] HEAVISIDE 1970, vol. II, p. 136.

Agora resta saber por que Heaviside se tornou um adversário tão agressivo dos quatérnions e chegou a negar qualquer influência dos mesmos sobre o cálculo de vetores, sendo que as influências são enormes, já que o cálculo de vetores é uma simplificação dos quatérnions, como o próprio Heaviside afirmou.

Uma hipótese para explicar esta mudança tão drástica é que, durante a controvérsia, Heaviside sentiu a necessidade de distanciar seu sistema dos quatérnions para que as pessoas notassem que era uma coisa nova e independente. Talvez Heaviside também não tivesse notado de imediato que estava criando um novo sistema pois, para ele, estava fazendo apenas uma simplificação nos quatérnions para usá-los mais facilmente na física. Somente durante a controvérsia percebeu que tinha em mãos um sistema matemático novo e que deveria ser promovido entre os físicos.

Um grande ponto a favor da aceitação dos vetores entre os físicos é que as definições foram feitas usando vetores que representam grandezas físicas e foram aplicadas imediatamente a problemas emergentes na época, tornando os conceitos mais interessantes e atraentes para os físicos. Essa estratégia usada por Heaviside é bem mais eficiente que a usada por Tait ao apresentar os quatérnions no *Treatise*, pois esse livro segue a conduta dos matemáticos acrescido apenas de alguns exemplos de interesse para os físicos.

Esta estratégia de aplicar diretamente os vetores aos problemas físicos sem fazer uma apresentação formal antes não foi deliberada. Desde os tempos de estudante Heaviside não gostava do enfoque axiomático da geometria euclidiana e preferia uma forma mais prática de aprender matemática. Era essencialmente um homem prático com grandes habilidades matemáticas e que gostava da matemática como uma ferramenta para seu trabalho em física.[203]

Apesar das disputas com os quaternionistas, Heaviside reconhece o valor do sistema de quatérnions como sistema matemático.

[203] NAHIN 1988.

> No entanto, aplicações práticas de lado, e olhando para eles do ponto de vista puramente quaterniônico, devo acrescentar que a invenção dos quatérnions deve ser considerada como o feito mais notável da inteligência humana. Análise vetorial, sem os quatérnions, poderia ser encontrada por qualquer matemático através do exame cuidadoso da matemática Cartesiana; mas criar os quatérnions requer um gênio.[204]

A tabela no final deste capítulo mostra exemplos das notações utilizadas no *Elements of Vector Analysis* por Gibbs, no *Electromagnetic Theory* de Heaviside, no *Treatise on Electricity and Magnetism* de Maxwell e no *Treatise on Quaternions* de Tait, mostrando que os quatro trabalhos são similares no simbolismo empregado e nas idéias matemáticas que expressam. Isso pode ser explicado pela hipótese que Gibbs e Heaviside partiram de Maxwell para estudar a análise de quatérnions na obra de Tait e, ao escreverem sobre análise vetorial, simplificaram os conteúdos desenvolvidos por Tait, seguindo o uso que Maxwell fez dos quatérnions, usando uma linguagem e notação parecidas com Tait e Maxwell.

3.14 A controvérsia

O grande debate entre análise vetorial e quatérnions aconteceu na década de 1890, envolvendo 8 revistas científicas importantes, 12 cientistas e 36 publicações, indicando que o assunto era de grande interesse na época. A grande maioria dos artigos polêmicos foi publicada entre 1890 e 1894.[205] Mais da metade dos artigos apareceu na revista *Nature*. Neste trabalho não vamos discutir individualmente cada artigo publicado, mas sim discutir as idéias e argumentos envolvidos em cada lado da disputa.[206]

---

[204] HEAVISIDE 1970, vol. II, p. 557.

[205] O número de artigos polêmicos sobre o assunto publicados antes de 1890 e após 1894 foi muito pequeno, por isso podemos concentrar a atenção neste período.

[206] Para conhecer um resumo do conteúdo de cada artigo, veja os artigos BORK 1966 e STEPHENSON 1966.

Podemos considerar como início do debate a publicação da terceira edição do *Treatise on Quaternions* de Tait de 1890. No prefácio, Tait se refere ao sistema de Gibbs como "um monstro hermafrodita composto pelas notações de Hamilton e Grassmann"[207] e considera Gibbs como o responsável pelo atraso do reconhecimento dos quatérnions como o sistema matemático mais elegante, compacto, expressivo e o mais adaptado para descrever o espaço euclidiano. Tait ataca o sistema vetorial de Gibbs por usar uma notação diferente dos quatérnions e, principalmente, por introduzir dois produtos separados: o produto escalar e vetorial.

Em 2 de abril de 1891 inicia-se o debate nas páginas da *Nature* com um artigo de Gibbs[208] respondendo às críticas de Tait. Os artigos de Gibbs[209] ilustram seu estilo educado porém forte, sem se deixar envolver por argumentos passionais, ao contrário de Tait e Heaviside. Reconhece que tais questionamentos sejam normais em uma época na qual há tanto interesse em torno das álgebras múltiplas e critica Tait por negar qualquer desvio do uso dos quatérnions no tratamento de vetores, desvios estes que já haviam sido defendidos por Maxwell. A crítica de Tait se relaciona particularmente à questão de notação, mas Gibbs crê que "há uma questão mais profunda de noções nas entrelinhas da notação".[210] Essas noções seriam os produtos vetorial e escalar. Argumenta que esses produtos são fundamentais pois representam relações importantes em física e geometria e que tais relações são pouco encontradas no produto entre quatérnions, mesmo considerando que os quaternionistas lidam com relações espaciais.

Para Gibbs, uma das vantagens da análise vetorial seria o fato de, ao contrário dos quatérnions, poder ser estendida para espaços de quatro ou mais dimensões. Para Tait[211] esta questão não tinha interesse pois a física lida com grandezas no espaço euclidiano. Knott[212] responde negando que seja importante poder estender o sistema vetorial para maior

---

[207] GIBBS 1891a, p. 511.
[208] GIBBS 1891a.
[209] GIBBS 1891a, GIBBS 1891b, GIBBS 1893a, GIBBS 1893b.
[210] GIBBS 1891, p. 511.
[211] TAIT 1891, p. 608.
[212] KNOTT 1893a, p. 217.

número de dimensões para a solução de problemas físicos. Isto seria querer "resolver a questão irlandesa através de uma discussão sobre a vida social em Marte..."

Essa suposta vantagem da análise vetorial não existe, pois é impossível estendê-la para espaços com mais de três dimensões já que o produto vetorial, do modo como foi definido por Gibbs, só existe em um espaço tridimensional. A generalização para espaços com dimensão maior que três foi feita por Clifford, a partir da análise de quatérnions.[213]

No início da controvérsia Gibbs encara a questão da disputa através de um ponto de vista mais liberal, concluindo que "a posição dos quaternionistas não é a única forma de se ver o assunto vetores e o método que pode parecer um monstro de um ponto de vista, pode ser normal e inevitável de outro".

Crowe[214] classifica como irônico o fato de o aspecto do sistema de Gibbs mais atacado por Tait[215] ser a díade (produto entre dois vetores) pois por cerca de meio século os matemáticos atacaram o produto de quatérnions quase da mesma maneira que Tait atacou Gibbs. Também é estranho que um quaternionista estranhe inovações no produto, já que os quatérnions devem sua existência à violação da propriedade comutativa no produto entre quatérnions.

No segundo artigo de Gibbs[216] publicado na *Nature* após o artigo de Tait, Gibbs lida principalmente com a questão de prioridade e começa a mudar de estratégia, pois tenta ligar seu sistema ao de Grassmann e negar qualquer relação com o de Hamilton. Para neutralizar os esforços de Tait pela prioridade, aumentou o prestígio de Grassmann comparando suas idéias às de Hamilton e argumentando que os métodos de Grassmann eram superiores. Além disso, discutiu os aspectos do sistema de Grassmann que podem ser encontrados no seu próprio sistema.

Gibbs defende sua separação do produto de dois quatérnions em uma parte escalar e outra vetorial, argumentando que os próprios quaternionistas também fazem pouco uso dos

---

[213] CLIFFORD 1882.
[214] CROWE 1967, p. 186.
[215] TAIT 1891, p. 608.
[216] GIBBS 1891b.

quatérnions e que usam muito mais o produto escalar e vetorial entre dois vetores separadamente. Nenhum quaternionista respondeu a este questionamento e de fato, a maior parte das aplicações e exemplos encontrados nos livros sobre quatérnions usam os produtos separados e também apenas a parte vetorial de um quatérnion.

Na edição de 16 março de 1893 da *Nature*, Gibbs volta ao debate com um artigo chamado "Quatérnions e a Álgebra dos Vetores"[217] no qual discute principalmente notação e critica o estilo de apresentação de Hamilton que escondeu a "simplicidade, perspicácia e brevidade" do enfoque vetorial e pôs as relações geométricas entre os vetores em segundo plano. Gibbs mantém que há duas tradições liderando a situação. A primeira é a dos grandes tratados de física do passado que estabeleceram gradualmente noções fundamentais e operações (utilizando componentes cartesianas). A segunda tradição caminha paralela a primeira e em parte deriva dela, consistindo na criação do sistema vetorial formal. Gibbs argumenta que essas duas tradições estavam convergindo na década de 1890 para um enfoque vetorial, apesar das disputas. Conclui criticando Hamilton mas parabenizando Tait e os quaternionistas da segunda geração por apresentarem o sistema de quatérnions de uma maneira mais aceitável.

Outro autor importante envolvido no debate foi Cargill Gilston Knott que publicou em 1892 o artigo "Recent Innovations in Vector Theory" nos *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*[218]. Knott foi assistente de Tait entre 1879 e 1883 e depois seu biógrafo e um forte defensor dos quatérnions. Foi professor de física na Universidade Imperial do Japão e após 1882 professor de Matemática Aplicada na Universidade de Edinburgh.[219]

O artigo critica os trabalhos de MacFarlane, Heaviside e sobretudo de Gibbs. Knott discute o trabalho do Reverendo O'Brien e conclui que a análise vetorial da época havia evoluído muito pouco desde o estágio alcançado por O'Brien em 1852.[220] Seu sistema é

[217] GIBBS 1893a.
[218] KNOTT 1893a.
[219] CROWE 1967.
[220] O'BRIEN 1852 e SMITH 1982.

baseado no “efeito produzido pela translação de magnitudes direcionadas” que podem ser representados como um produto entre a magnitude transladada e a translação realizada. Utiliza os símbolos . e × para representar os dois tipos de produto, um “lateral” e outro “longitudinal”, sem especificar se são quantidades numéricas ou direcionadas. O sistema de O’Brien possui rudimentos do sistema vetorial desenvolvido por Gibbs e Heaviside, mas eles não o citam, nem mesmo após Knott chamar atenção para o sistema de O’Brien.

A estratégia de Knott era mostrar que o trabalho de Gibbs-Heaviside não era novo, mas apenas um antigo sistema. Não percebeu que, na realidade o sistema de Gibbs-Heaviside era uma transformação do próprio sistema de Hamilton.

O ponto mais criticado por Knott, como pelos quaternionistas em geral, foi a separação dos dois tipos de produto entre dois vetores, o que significa deixar de ver um quatérnion como entidade fundamental. Knott argumenta que, sem os quatérnions, a divisão entre dois vetores é impossível e como essa operação é fundamental, os quatérnions também o são. Mas o fato é que nenhum quaternionista discutiu aplicações desta operação para mostrar que ela é realmente interessante para as necessidades físicas. Além disso, critica o abandono do sinal negativo na frente do produto escalar pois para que a propriedade associativa permaneça válida, o quadrado de um vetor unitário deve ser igual a -1.

Por outro lado, os quaternionistas já haviam abandonado a propriedade comutativa e isso não deveria causar-lhes estranheza. De fato, em 1840 Hamilton já havia argumentado que não há nada de errado em definir um produto que viole a propriedade comutativa para defender o produto entre quatérnions. Em 1890, no entanto, Knott afirma que um sistema que viola a propriedade associativa não é natural.

Em 1892 Heaviside entra no debate, com o artigo “On the Forces, Stresses, and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field”[221] no qual zomba de Tait ao atribuir a causa da demora na aceitação do cálculo de quatérnions como sendo a falta de um tratado adequado sobre o assunto. Concorda de maneira geral com os argumentos de Gibbs

[221] HEAVISIDE 1893.

publicados na *Nature* a favor da análise vetorial, sendo que o fato de Gibbs e Heaviside concordarem em muitos aspectos (exceto na notação) fortaleceu suas posições. Esse artigo pode ser incluído entre as outras publicações de Heaviside nas quais a polêmica sobre análise vetorial aparece junto com resultados físicos importantes e novos.

O papel de Heaviside na controvérsia da década de 1890 na *Nature* é o de inimigo mortal dos quatérnions, pois Heaviside nega qualquer influência dos quatérnions sobre seu sistema e ataca qualquer um que escreva a favor da palavra *quatérnion*. No entanto, seus trabalhos anteriores mostram que ele não foi tão inimigo dos quatérnions no início de sua análise vetorial e ele mesmo afirma várias vezes que seu sistema é uma simplificação do sistema de Hamilton e demonstra ter estudado a fundo o trabalho do inimigo.

Em junho de 1892 Alexander McAulay (1863–1931) publicou um artigo intitulado "Quatérnions como um Instrumento Prático de Pesquisa Física".[222] O artigo é interessante pois reflete uma fraqueza dos defensores dos quatérnions no debate: eles não apresentaram novos exemplos de aplicação que pudessem aumentar o interesse do público, contrariando o que é sugerido pelo título. Acusa Maxwell de promover o abandono dos quatérnions mas, como vimos, Maxwell foi o grande divulgador dos quatérnions através do *Treatise on Electricity and Magnetism*.

Alexander MacFarlane foi aluno de Tait em Edinburgh e em 1891 tornou-se professor na University of Texas. Foi secretário de física da *American Association for the Advancement of Science* e um dos participantes mais ativos no debate sobre sistemas vetoriais. A posição de MacFarlane[223] era intermediária entre os vetorialistas e quaternionistas, pois defendia a mudança do sinal da parte escalar do produto entre vetores mas também defendia o produto completo entre vetores, isto é, a soma da parte escalar e vetorial. Como vimos, o sinal negativo é criticado pelos vetorialistas pois é necessário mudar o sinal quando se deseja transformar uma equação escrita em quatérnions em uma

[222] MACAULAY 1892.
[223] MARLANE 1893.

equação escrita nas componentes cartesianas, o que, para eles, torna a transformação não imediata e natural.

MacFarlane criticou o uso de versores quadrantais e vetores unitários como se fossem a mesma coisa e atribui a isso toda a discussão em torno do sinal negativo do produto escalar. Argumenta que o sinal negativo que aparece no produto escalar vem da tentativa de se usar o mesmo símbolo para um versor quadrantal e para um vetor unitário. Como vimos, a rotação está associada ao versor quadrantal e conseqüentemente ao fato de $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Por outro lado, o vetor unitário é um vetor de módulo um, que não tem nada a ver com rotação e cujo quadrado é positivo. A interpretação de MacFarlane é que se deve tratar o vetor como uma entidade independente da rotação, usando um símbolo diferente e com isso evitar o sinal negativo no produto escalar.

Para MacFarlane a equação $jk = i$ é uma convenção que deve ser interpretada como significando que o plano no qual estão j e k tem orientação indicada pela normal i, com a consideração adicional de que o ângulo entre j e k deve ser positivo.

No sistema de MacFarlane não aparece o sinal negativo no produto escalar pois usa o cos $(180°-\theta)$, ou seja, muda o ângulo usado no produto escalar. Dessa forma está mudando a causa do problema (sinal) para uma questão de definição do ângulo envolvido no produto escalar.

MacFarlane, discordando de Gibbs e Heaviside, considera que o produto completo é mais conveniente aos estudantes pois obedece à propriedade associativa e contém uma parte que envolve o seno e outra que envolve o cosseno. A diferença com relação a Tait e Hamilton é apenas o sinal negativo na parte escalar. Argumenta que, se mantivermos o sinal negativo, grandezas físicas que são essencialmente positivas como energia cinética teriam que ser revistas, pois o quadrado do vetor velocidade seria negativo. Maxwell[224] também havia levantado esta questão em uma carta para Tait de 1878. Os quaternionistas não a responderam e os defensores da análise vetorial também não a aproveitaram a favor de seu sistema. Apesar de o artigo de MacFarlane ter sido muito bem escrito, não se tornou

[224] CROWE 1967, p. 138.

popular pois veio para complicar uma situação já complicada e mais um sistema vetorial não foi bem vindo pelos defensores dos sistemas já existentes.

McAulay publicou em 1892 o artigo “On the Mathematical Theory of Electromagnetism” usando quatérnions na teoria eletromagnética dentro da tradição de Maxwell.[225] Embora pareça que o artigo foi cientificamente menos importante que o de Heaviside, é uma exibição impressionante do uso de quatérnions. Esse trabalho ajudou a causa quaterniônica pois se desviou um pouco da tradição pura de quatérnions introduzindo uma nova notação. Apesar de não usar o produto completo entre quatérnions, não foi criticado pelos quaternionistas.

Um artigo publicado em 5 de janeiro de 1893 mostra bem a falta de preocupação de Tait em responder a seus críticos de forma mais incisiva.[226] Tait começa dizendo que achava que sua resposta a Gibbs em 1891 já tinha sido suficiente para mostrar a impotência de um sistema vetorial no qual falta o produto quaterniônico, mas após o artigo de Heaviside percebeu que havia se enganado. Afirma que após ler quatro páginas do artigo de Heaviside “percebi que não apenas teria que desaprender Quatérnions (contra o que podemos dizer muito) mas também aprender uma nova e inculta paródia de notações a mim familiares; assim tenho que abandonar a tentativa”. Em muitas situações Tait subestimou seus oponentes ou adotou a estratégia questionável de pensar que eles não mereciam uma resposta detalhada.

O artigo de Knott, chamado “The Quaternions and its Depreciators” contém quase que um resumo da controvérsia envolvendo os quatérnions pois classifica as afirmações dos depreciadores de quatérnions em três grupos. O primeiro questiona “o valor dos quatérnions como uma concepção geométrica fundamental”; o segundo “a questão da notação” e o terceiro “a questão do sinal do quadrado de um vetor”. [227]

[225] MACAULAY 1893.
[226] TAIT 1893.
[227] KNOTT 1893b.

A dificuldade matemática do sistema de quatérnions também contribuiu para afastar adeptos, tanto que William Peddie[228], professor assistente de Tait em Edinburgh se refere a Gibbs, Heaviside e MacFarlane como homens que facilitaram o caminho para os estudantes de sistemas vetoriais pois o estudo de um método matemático muito geral, como o de quatérnions, é difícil por partir de poucas definições e por isso terem que usar desenvolvimentos mais elaborados para chegar a seus resultados.

No último artigo da controvérsia, Tait[229] começa admitindo que os quatérnions não são aplicáveis para espaços com mais de três dimensões e comenta que os quatérnions evoluíram ao longo do século. Afirma que através de Hamilton o sistema evoluiu de um sistema muito artificial para um sistema absolutamente natural. Tait comenta que Hamilton falhou ao lidar com *i, j, k* e que só o fez para tornar sua obra mais aceitável entre os cartesianos e menos abstrata. Nos três volumes de Hamilton há, segundo Tait, indícios de seu desejo de se livrar do *i, j, k* , mas se o fizesse não teria nenhum leitor. Tait admite que ele mesmo gostaria de se livrar do *i, j, k* e que planeja fazê-lo em uma quarta edição de seu livro, ou seja, pretende tornar seu sistema mais geral e abstrato, mas essa quarta edição não foi feita.

3.15 Conclusão

De uma maneira geral, podemos dizer que Maxwell associou as idéias vetoriais com eletricidade e magnetismo tornando imprescindível o desenvolvimento de algum tipo de análise vetorial. Estudando as cartas entre Maxwell e Tait vimos que o que Maxwell fez foi selecionar os pontos que julgou interessantes do cálculo dos quatérnions e deixou de lado os aspectos que não lhe foram diretamente úteis para o seu trabalho em eletromagnetismo. Fez isso de uma maneira natural pensando estar usando os quatérnions da forma como Tait usaria e não com o objetivo de abrir caminho para uma nova análise vetorial.

[228] PEDDIE 1893.
[229] TAIT 1895.

O uso que Maxwell fez dos quatérnions foi seletivo, isto é, usou apenas os conceitos que eram importantes para o desenvolvimento de sua teoria eletromagnética. Sem perceber, determinou os aspectos necessários a uma nova análise vetorial a partir das idéias do sistema de quatérnions, mas sem as idéias que não lhe eram úteis. Tait não percebeu que Maxwell estava abrindo caminho para que fossem introduzidas mudanças no sistema de quatérnions pois, como mostram as correspondências entre os dois, ele foi consultado várias vezes por Maxwell, viu e opinou sobre várias provas do *Treatise* que Maxwell lhe enviou, sem criticar essas mudanças.

Gibbs e Heaviside também fizeram uma coisa parecida. A transformação do sistema de quatérnions para o sistema vetorial não foi proposital e ninguém percebeu que os quatérnions estavam sendo abandonados até que Gibbs escreveu um tratado formal para apresentar a nova álgebra vetorial que não tinha vários conceitos existentes nos quatérnions, além de ter uma nova notação. Tait só foi perceber que seu sistema estava mudado a partir disso. Maxwell, Gibbs e Heaviside não estavam tentando construir um novo sistema matemático. O que eles queriam era tornar o sistema de Hamilton mais simples e mais fácil de ser usado em física.

A simplicidade do sistema de Gibbs-Heaviside é matematicamente questionável. Comparando-o com o sistema de quatérnions, vemos que ambos não são comutativos, já que o produto vetorial não é comutativo; o sistema de quatérnions é associativo mas o sistema de Gibbs-Heaviside não é; além disso, no sistema de quatérnions só existe um produto, enquanto que no sistema vetorial são definidos dois produtos. O sistema de quatérnions permite a divisão, mas na análise vetorial a divisão não é unívoca. O sistema de Gibbs-Heaviside pode ser mais fácil de ser usado por ter uma notação mais clara e ser menos geral, mas não podemos dizer que ele é matematicamente mais simples.

O debate ocorrido na década de 1890 entre os defensores do sistema de quatérnions e os defensores da análise vetorial ilustra os elementos que levaram à escolha da álgebra vetorial como o sistema matemático mais adequado para tratar o eletromagnetismo na época.

Como Gibbs, Heaviside não criou em geral novos teoremas mas, ao contrário de Gibbs, associou análise vetorial com um grande número de novas e importantes idéias em eletricidade, principalmente na linha de desenvolvimento seguida por Maxwell. Tanto Gibbs como Heaviside tinham um pé na matemática e outro na física. Essa interessante mistura os levou a introduzir simplificações no método dos quatérnions que diminuíram sua aparência de sistema puramente matemático e o tornaram mais agradável aos físicos da época. De um modo geral, a tarefa dos envolvidos com análise vetorial na década de 1840 foi diferente da tarefa na década de 1880. Os últimos se dedicaram mais a uma seleção e adaptações do que à criação propriamente dita.

Os defensores dos quatérnions não apresentaram argumentos novos durante o debate e também não apresentaram novas aplicações físicas para os quatérnions, numa época em que Heaviside estava publicando vários trabalhos sobre a teoria eletromagnética na revista *Electrician* usando seu novo sistema vetorial. Os quaternionistas estavam mais preocupados em preservar o sistema de Hamilton que em desenvolver novas aplicações para os quatérnions que seriam úteis para convencer a comunidade da necessidade do velho sistema de Hamilton.

Tait era o maior defensor e a pessoa que mais contribuiu para o desenvolvimento do sistema de quatérnions, mas demonstrou uma falta de interesse em responder às críticas feitas ao sistema, provavelmente por julgar que os quatérnions eram um sistema tão bom que dispensava maiores comentários, principalmente dirigidos a interlocutores pouco conhecidos como Gibbs e Heaviside. Porém, Heaviside usou uma tática mais eficiente para defender seu sistema.

Um ponto importante desta tática a favor da aceitação dos vetores entre os físicos é que as definições foram feitas usando vetores “reais”, ou seja, vetores que representam grandezas físicas e aplicadas imediatamente a problemas físicos, como a força elétrica, densidade de corrente de condução, força magnética, indução magnética, corrente elétrica. Desta forma, o uso dos conceitos se torna bem mais evidente e interessante para os físicos do que se as definições forem feitas da forma matemática tradicional e os exemplos apresentados nos capítulos finais. Essa estratégia usada por Heaviside é bem mais eficiente que a usada por Tait ao apresentar os quatérnions no *Treatise* pois o livro de Tait é um livro que segue a conduta dos matemáticos acrescido de alguns exemplos de interesse para os físicos. Heaviside foi direto para as aplicações nos problemas importantes da época, sem se prender ao formalismo matemático. Mesmo no calor do debate, Alfred Lodge atribuiu o sucesso da álgebra vetorial e sua hegemonia entre os físicos à forma como foi apresentada por Heaviside por meio de aplicações a problemas de interesse dos físicos da época.[230]

A controvérsia sobre a presença do sinal negativo é defendida pelos quaternionistas como uma questão de elegância algébrica, simplicidade e naturalidade, enquanto que os adeptos da análise vetorial argumentam em termos mais pragmáticos.

Havia uma tendência, principalmente entre os quaternionistas, em tratar a questão do produto como algo a mais que uma questão de definição arbitrária e sim como uma questão de princípios, enquanto que Gibbs e Heaviside a tratavam como uma questão de facilidade prática. Apesar de a questão sobre o sinal ser legítima ela é matematicamente impossível de ser solucionada pois é possível desenvolver formalismos coerentes adotando qualquer uma das duas alternativas. Sendo assim, ambas as partes tinham pouco a acrescentar a não ser reafirmar suas opiniões e enriquecer a sua defesa com novas aplicações. O fato de os defensores da análise vetorial conseguirem obter os principais resultados obtidos pelos quaternionistas não significa que seu sistema seja superior, mas certamente isso contribui para tornar o sistema atraente para o público interessado no uso da álgebra vetorial para resolver problemas físicos.

Considerando a relação entre o formalismo vetorial e as teorias eletromagnéticas da época (teorias de campo e teorias de ação direta à distância), vale ressaltarmos que o operador diferencial ∇ só é útil em uma teoria de campo. Este operador não faz sentido em uma teoria de ação direta à distância para os fenômenos eletromagnéticos.

---

[230] LODGE 1892.

HAMILTON e TAIT 1843 e 1867	**MAXWELL 1873**	**GIBBS 1881**	**HEAVISIDE 1883**
$\alpha = xi + yj + zk$	$\Im = iX + jY + kZ$	$\alpha = xi + yj + zk$	$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
$\alpha\beta = \mathrm{S}\alpha\beta + \mathrm{V}\alpha\beta$			
$\mathrm{S}\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz')$	$S\,\mathrm{BH} = -(xx' + yy' + zz')$	$\alpha . \beta = +(xx' + yy' + zz')$	$\mathbf{AB} = +(\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2 + \mathrm{A}_3\mathrm{B}_3)$
$\mathrm{V}\alpha\beta = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$	$\mathrm{VAB} = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$	$\alpha \times \beta = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k$	$\mathbf{Vab} = \mathbf{i}(\mathrm{a}_2\mathrm{b}_3 - \mathrm{a}_3\mathrm{b}_2) + \mathbf{j}(\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1\mathrm{b}_3) + \mathbf{k}(\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1)$
$\nabla\omega = \mathrm{S}\nabla\omega + \mathrm{V}\nabla\omega$			$\nabla\mathbf{R} = \mathrm{conv}\ \mathbf{R} + \mathrm{curl}.\mathbf{R}^{\clubsuit}$
$\mathrm{S}\nabla\omega$	$S\,.\,\nabla\omega = \mathrm{conv}\ \omega$	$\nabla.\omega$	$\mathrm{div}\ \mathbf{D} = \nabla\mathbf{D}^{\spadesuit}$
$\mathrm{V}\nabla\omega$	$V\,.\,\nabla\omega = \mathrm{curl}\ \omega$	$\nabla \times \omega$	$\mathrm{curl}\ \mathbf{E} = \mathrm{V}\nabla\mathbf{E}$
$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$	$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$	$\nabla.\nabla = +\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$	$\nabla^2 = +\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)$

♣Usou esta equação em 1883, mas mudou no *Electromagnetic Theory* de 1891.

♠No artigo “Some electrostatic and magnetic relations” de 1883, usou conv **D** que é igual a –div **D**.

4. A SIMETRIA DAS GRANDEZAS ELETROMAGNÉTICAS

4.1 Introdução

Como vimos no Capítulo 3, o cálculo vetorial atual foi desenvolvido por Gibbs e Heaviside a partir do formalismo de quatérnions. Gibbs e Heaviside se interessaram por quatérnions após lerem o trabalho de Maxwell sobre eletromagnetismo, principalmente o *Treatise on Electricity and Magnetism*, publicado em 1873.

Apesar de terem se inspirado em Maxwell, os fundadores do cálculo vetorial não incorporaram ao sistema vetorial as idéias de Maxwell sobre a existência de dois tipos de vetores (os vetores "polares" e "axiais", em linguagem moderna). Essa falha prejudicou o programa inicial de Maxwell de criar uma teoria eletromagnética que explicasse a natureza física dos fenômenos, pois sem essa distinção não fica claro que os fenômenos elétricos e magnéticos são de naturezas distintas. Isso se agrava mais ainda quando usamos os mesmos símbolos para representar os diferentes tipos de vetores.

A questão de simetria dos campos eletromagnéticos só foi esclarecida com os trabalhos de Pierre Curie do final do século XIX. Curie apontou em 1894 o problema que existe no uso do mesmo símbolo para representar grandezas físicas de naturezas diferentes, como o campo elétrico (vetor polar) e magnético (vetor axial). No decorrer da presente pesquisa chamou-nos a atenção a grande dificuldade em localizar autores que tivessem compreendido a importância do alerta de Curie e que tivessem implementado o uso de símbolos diferentes para representar os dois tipos de vetores.

Woldemar Voigt em 1910 e Paul Langevin em 1912 perceberam a relevância das observações de Curie e propuseram novos símbolos para representar vetores axiais e, desta forma, diferenciá-los dos vetores polares representados por uma seta. A importância das contribuições de Voigt e Langevin parece não ter sido percebida por nenhum historiador da ciência anteriormente.

4.2 Os vários tipos de grandezas físicas definidas por Maxwell

No artigo *On the mechanical classification of physical quantities*[231] de 1871 e no *Treatise on electriciy and magnetism,*[232] Maxwell discute a necessidade de se distinguir as grandezas físicas por meio das diferentes grandezas matemáticas que as representam. A primeira divisão utilizada por Maxwell é a distinção entre grandezas escalares e vetoriais feita por William Hamilton:[233]

> Uma das mais importantes realizações do método de Hamilton é a divisão das grandezas entre Escalares e Vetoriais. É possível definir completamente uma grandeza Escalar por uma única especificação numérica. Esse valor numérico não depende de forma alguma das direções dos eixos coordenados. Um Vetor, ou grandeza direcionada, requer para sua definição três especificações numéricas referentes às direções dos eixos coordenados.[234]

Além dos vetores, Maxwell distingue uma outra grandeza relacionada com direções espaciais que, em linguagem moderna, são os tensores:

> Há grandezas físicas de outro tipo que são relacionadas com direções no espaço, mas que não são vetores. Tensões e deformações em corpos sólidos são exemplos dessas grandezas, como também são algumas das propriedades dos corpos consideradas na teoria da elasticidade e na teoria da dupla refração. Grandezas desta classe necessitam de *nove* especificações numéricas para suas definições.

[231] MAXWELL 1965, vol. 2, pp. 257-266.
[232] MAXWELL 1954, vol. 1, pp. 9-14.
[233] Veja seção 3.4.
[234] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 10.

> Elas são expressas na linguagem de quatérnions por funções lineares vetoriais de um vetor.[235]

Maxwell introduz duas distinções entre as grandezas vetoriais. A primeira diferencia os vetores referentes a linhas e os vetores referentes a áreas.[236] Por exemplo, a força resultante em qualquer direção pode ser medida pelo trabalho que realiza sobre um corpo quando o corpo se move por uma pequena distância em tal direção, dividido pela distância. Neste caso, a força é definida com referência a uma linha. Maxwell usa o termo "intensidade" para se referir a grandezas deste tipo.

Por outro lado, o fluxo de calor em qualquer direção em qualquer ponto de um corpo sólido pode ser definido em relação a uma área, como a quantidade de calor que atravessa uma pequena área perpendicular a esta direção, dividido pela área e pelo tempo. Há também certos casos nos quais uma grandeza pode ser medida tanto em relação a uma linha quanto em relação a uma área. Por exemplo, a velocidade de um fluido pode ser medida com relação à velocidade das partículas individuais ou com relação à quantidade de fluido que atravessa uma área determinada. No caso da eletricidade, não conhecemos o valor de sua densidade e nem da velocidade da eletricidade no condutor; conhecemos apenas a relação entre a densidade e velocidade, em uma teoria de fluidos. Portanto, o mais adequado é considerar a eletricidade como sendo do tipo fluxo.

As intensidades eletromotrizes e magnéticas pertencem à classe de grandezas definidas em relação a uma linha, por isso Maxwell se refere a elas como Intensidades. A indução elétrica e magnética e as correntes elétricas pertencem à segunda classe e são definidas em termos de áreas. Maxwell se refere a elas como Fluxos. Cada uma das intensidades produz um respectivo fluxo:

[235] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 10.
[236] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 11-13.

> Assim, a intensidade eletromotriz produz corrente elétrica em condutores e tende a produzi-la em dielétricos.[...] Da mesma forma, a intensidade magnética produz indução magnética.[237]

Maxwell identificou certas relações fluxo-intensidade relevantes para a teoria eletromagnética. Por exemplo: em um dielétrico, o deslocamento elétrico D é um fluxo produzido pela intensidade elétrica E. O deslocamento elétrico é definido como a quantidade de eletricidade que atravessa uma área perpendicular a E e é dada pela expressão

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{K}\mathbf{E}$$

Embora essa expressão seja idêntica à usada atualmente, seu significado é bastante diferente. Maxwell interpretou D como um fluxo de cargas provocado pelo campo elétrico E e não como um campo do mesmo tipo que E, multiplicado por uma constante.

Essa distinção entre vetores do tipo Intensidades e Fluxos, só faz sentido dentro do espírito da teoria de Maxwell que associava as grandezas eletromagnéticas com grandezas mecânicas de um éter em movimento e que, portanto, poderiam estar associadas a deslocamentos, velocidades e fluxos.

Em seguida, Maxwell introduz uma segunda distinção, entre vetores com propriedades longitudinais e propriedades rotacionais. Essa distinção continua sendo usada atualmente (no entanto, com um sentido mais abstrato). Hoje em dia nos referimos às “propriedades de simetria” dos vetores e não associamos os vetores a translações e rotações de nenhum meio físico.

Maxwell comentou que esta segunda divisão entre as grandezas vetoriais "embora muito importante de um ponto de vista físico, não é necessariamente observada considerando-se métodos matemáticos"

[237] MAXWELL 1954, vol. 1, p. 12.

A direção e a magnitude de uma grandeza podem depender do efeito que ocorre na direção de uma certa linha, ou podem depender de algo que tenha a natureza de uma rotação ao redor daquela linha como um eixo. As leis de combinação de grandezas direcionadas são as mesmas se elas forem longitudinais ou rotacionais, de modo que não há diferença no tratamento matemático das duas classes, mas há circunstâncias físicas que indicam a qual destas duas classes devemos associar um fenômeno particular.[238]

Como um exemplo disso, temos a lei circuital de Ampère escrita na forma diferencial discutida por Maxwell na parte IV do artigo “Physical Lines”. A expressão matemática relaciona a corrente elétrica com o campo magnético: *p, q, r* são as componentes do vetor densidade de corrente elétrica, α, β, γ são as componentes cartesianas do vetor intensidade do campo magnético:

$$p = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right), \text{ etc.}$$

Para ilustrar o profundo significado dessas equações, Maxwell listou uma série de exemplos mecânicos para os quais essas equações poderiam ser aplicadas:

1) Se α, β, γ representam deslocamentos lineares ou mudanças de posição, então *p, q, r* representam deslocamentos rotatórios ou mudança de posição angular.

2) Se α, β, γ representam velocidades lineares, então *p, q, r* representam velocidades angulares.

3) Se α, β, γ representam forças, então *p, q, r* representam um torque ou torção.

De uma maneira geral, se α, β, γ representam quantidades lineares, então *p, q, r* representam quantidades rotatórias. As relações inversas também são válidas. Essas

---

[238] MAXWELL 1954, vol.1, p. 13.

equações representam um tipo de relação entre fenômenos de caráter rotatório com fenômenos de caráter linear e vice-versa.

Maxwell sugeriu que uma maneira de saber se um fenômeno tem um caráter linear ou rotatório seria olhar para seus efeitos: “Todos os efeitos diretos de qualquer causa que tenha o caráter longitudinal devem ser longitudinais, e [...] os efeitos diretos de uma causa rotatória devem ser rotatórios”.[239] Maxwell cita alguns efeitos da corrente elétrica, entre eles a eletrólise da água (Faraday havia procurado algum efeito rotatório na eletrólise, sem obter nenhum resultado positivo). Maxwell concluiu que o fenômeno magnético deve ser do tipo rotatório e a força elétrica deve ser de tipo longitudinal a partir de vários argumentos.

Quatro tipos de evidência contribuíram para Maxwell concluir que o magnetismo é rotatório: 1) os efeitos lineares da corrente elétrica, como a eletrólise; 2) falta de efeitos rotatórios da corrente elétrica; 3) falta de efeitos lineares no magnetismo; 4) efeitos rotatórios no magnetismo, como a rotação do plano de polarização da luz.

Para Maxwell, a natureza do campo eletromagnético deveria ser mecânica e as equações que descrevem as relações eletromagnéticas seriam as expressões de condições mecânicas. No entanto, a estrutura das equações do eletromagnetismo relaciona a força elétrica e a magnética através de fórmulas que só podem ser válidas se representarem a relação entre uma quantidade linear (seja força ou deslocamento) com uma quantidade rotacional (seja torque ou rotação). Dessa forma, não importa se é o magnetismo ou a eletricidade que possui um caráter linear ou rotacional, mas sim que sejam diferentes entre si.

Essa distinção entre dois tipos de variáveis se relaciona com a distinção moderna entre dois tipos de vetores, isto é, vetores polar e axial. As quantidades lineares de Maxwell são descritas atualmente como vetores verdadeiros ou vetores polares com respeito a reflexões espaciais. As quantidades rotatórias de Maxwell correspondem aos pseudo-vetores ou vetores axiais.

[239] MAXWELL 1862, p. 86.

A distinção de Maxwell entre vetores longitudinais e vetores rotacionais foi ignorada pelos fundadores do cálculo vetorial que, como vimos, se basearam no trabalho de Maxwell e no cálculo de quatérnions para desenvolver o formalismo vetorial.[240] Isso levou ao uso de símbolos iguais para representar os dois tipos distintos de vetores e, conseqüentemente, não foi possível perceber claramente que as grandezas elétricas e magnéticas são de naturezas distintas, já que o mesmo símbolo é usado para representar todos os tipos de grandezas vetoriais.

Essa questão foi retomada por Pierre Curie em seus trabalhos sobre simetria das grandezas eletromagnéticas publicados no final do século XIX, nos quais discute detalhadamente os vários tipos de simetria das grandezas físicas e ressalta as diferenças entre vetores, pseudo-vetores, escalares e pseudo-escalares.

4.3 Argumentos intuitivos de simetria

Existem muitas situações físicas em que podemos prever o que vai acontecer utilizando apenas argumentos de simetria. Imagine, por exemplo, dois objetos em repouso: uma esfera com uma carga elétrica distribuída uniformemente em sua superfície, e uma carga elétrica próxima a ela (figura 4.1).

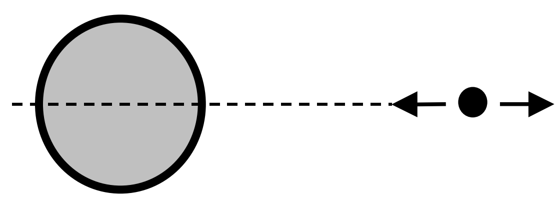

Figura 4.1. Por argumentos de simetria, podemos dizer que a força entre as duas esferas está na direção que une seus centros.

[240] Veja o capítulo 3.

Sem utilizar equações e sem saber os valores de várias grandezas (cargas, distâncias) não podemos prever qual será o valor da força entre esses dois corpos. No entanto, por um simples argumento de simetria, podemos dizer que a força entre a esfera maior e a carga menor terá a direção da reta que une os seus centros, para um lado ou para o outro. Não é preciso utilizar nenhuma lei do eletromagnetismo para chegar a essa conclusão sobre a direção da força. Essa conclusão se baseia apenas na simetria da situação. Se, em vez de forças elétricas, pensarmos em forças gravitacionais, a conclusão será exatamente a mesma (porém, como só existem forças gravitacionais atrativas, poderíamos também saber o *sentido* da força).

Suponhamos, no entanto, que em vez da esfera carregada temos um objeto com outra forma qualquer. Nesse caso, o que poderíamos afirmar? A única coisa que podemos saber *com certeza* é que se a figura for plana e se a pequena carga estiver nesse plano, a força entre elas também estará no mesmo plano. Se imaginarmos que a figura qualquer e a carga de prova estão sobre esta folha de papel, não existe nenhum motivo para imaginarmos que a carga poderia sofrer uma força para fora da folha (para cima ou para baixo do papel). Ou seja, no caso de *qualquer* forma plana, se uma carga elétrica de prova estiver perto de um corpo plano com carga elétrica e se ambos estiverem no mesmo plano, é *impossível conceber* que a força entre eles empurre (ou puxe) a carga elétrica *para fora do plano* (figura 4.2). A força estará, necessariamente, em alguma direção pertencente ao próprio plano onde estão a figura e a carga de prova.

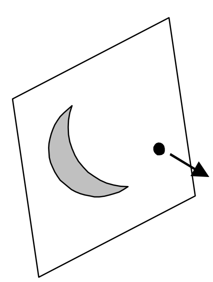

Figura 4.2. É impossível que a força entre duas formas planas esteja fora do plano definido por ela.

Apesar de parecer muito estranha a existência de alguma força dirigida para fora do plano onde estão todos os corpos que interagem entre si, ela existe. Podemos ver isso no eletromagnetismo. Como exemplo de uma questão intrigante envolvendo noções de simetria, vamos analisar a força **F** agindo sobre uma carga elétrica *q* com velocidade **v** em um campo magnético uniforme com indução **B**. A força **F** é dada por $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Isto significa que a força que age sobre a carga é perpendicular ao campo e à velocidade. Como o campo magnético e a força definem um plano, seria esperado que a carga continuasse a se mover neste plano; no entanto, não é isso que ocorre (figura 4.3). Aparece uma força perpendicular ao plano, sem nenhum motivo aparente, que desvia a carga para fora do plano. Qualquer um poderia se perguntar: como o movimento da carga no mesmo plano do campo pode criar algo perpendicular ao plano? Alguém poderia tentar responder: "Porque o produto vetorial em $\mathbf{F}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ produz um vetor perpendicular a **v** e **B**." Mas essa não é uma explicação física; apenas descreve a regra matemática utilizada.

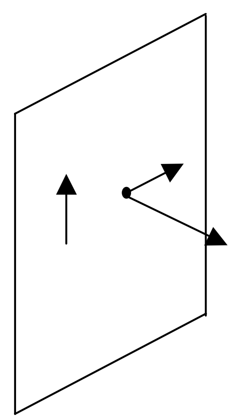

Figura 4.3. A força sobre uma carga em movimento em um campo magnético é perpendicular ao plano definido pela velocidade e pelo campo.

O experimento de Ørsted, que mostrou em 1820 a relação entre eletricidade e magnetismo, também apresenta uma aparente violação da simetria "intuitiva" dos fenômenos. Consideremos um fio metálico retilíneo, colocado na direção Norte-Sul. Sob este fio, suponhamos que haja uma bússola, cuja agulha está também na direção Norte-Sul (figura 4.4). O plano vertical que passa pelo fio e pela agulha parece ser um plano de simetria do sistema. Se, agora, passarmos uma corrente elétrica pelo fio, a agulha magnética se desviará do plano. Portanto, surgiram forças perpendiculares ao plano onde estavam o fio, a corrente elétrica e a agulha magnética. É difícil compreender o que ocorre em uma situação deste tipo, se pensarmos sobre a simetria do fenômeno. A solução, que não é intuitiva, será apresentada mais adiante.

Estas questões raramente são discutidas nos livros-texto.[241] Para entendermos melhor estes fenômenos, será necessário examinar a simetria das grandezas eletromagnéticas e também usar o princípio de simetria de Curie, já que o conhecimento das simetrias é fundamental para facilitar a compreensão dos fenômenos físicos, particularmente dos fenômenos eletromagnéticos.

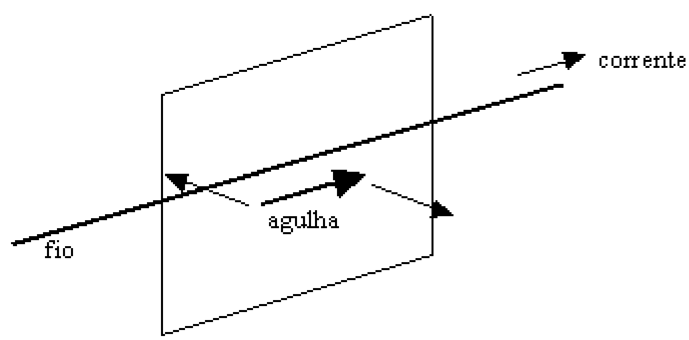

Figura 4.4. Esquema da aparente quebra de simetria na experiência de Ørsted.

Pierre Curie (1859-1906) reconheceu os comportamentos distintos dos campos elétrico e magnético sob o ponto de vista de sua simetria (um aspecto central, que será explicado mais adiante). Também percebeu que as leis básicas do eletromagnetismo apenas estabelecem a simetria relativa entre os campos e a simetria absoluta de cada um desses campos é arbitrária. Segundo Curie, o ensino da Física é uma oportunidade de discutir as questões de simetria.[242] No estudo do eletromagnetismo, por exemplo, é possível começar

[241] O livro NUSSENZVEIG 1997, p. 129 cita rapidamente que a força e a velocidade são vetores polares enquanto que o campo magnético é um vetor axial, mas não discute em detalhes as implicações desta diferença. Os livros didáticos para o ensino médio nem ao menos citam que há tipos diferentes de vetores.
[242] CURIE 1894b, p. 393.

com a discussão da simetria do campo elétrico e magnético, o que daria mais sentido às demonstrações matemáticas.

Vamos analisar como Pierre Curie aliou seus argumentos teóricos sobre as propriedades de simetria de grandezas físicas com resultados experimentais, tais como eletrólise e polarização da luz, para determinar as propriedades de simetria das grandezas eletromagnéticas. Vamos também analisar a experiência de Ørsted usando argumentos modernos de simetria para entendermos a aparente quebra de simetria que ocorre no desvio de uma agulha imantada próxima a um fio percorrido por uma corrente. Veremos que as dificuldades citadas acima também estão relacionadas com os símbolos usados para representar os diferentes tipos de grandezas vetoriais.[243]

4.4 Tipos de simetria

Os conceitos básicos de simetria não se originam na física e sim na geometria. Auguste Bravais (1811-1863), físico e mineralogista, sistematizou esses conceitos e os aplicou à classificação de cristais.[244] A conceituação apresentada a seguir, baseia-se em um artigo que ele publicou em meados do século XIX.

Os elementos de simetria aos quais Curie se refere são planos, eixos e pontos que podem ser usados para especificar as transformações. Para analisar os fenômenos eletromagnéticos, é importante considerar dois grupos de simetria contendo um eixo de isotropia: grupo das grandezas equivalentes a um cone (campo elétrico, força, velocidade, etc.) e grupo das grandezas equivalentes a um cilindro rodando ao redor de seu eixo (campo magnético, torque, velocidade angular).[245]

[243] Nem mesmo os inventores do cálculo vetorial usado atualmente perceberam que há dois tipos de vetores com propriedades de simetria diferentes (SILVA & MARTINS 2002).
[244] BRAVAIS 1849.
[245] Curie discute quatro grupos de simetria que têm como elemento de simetria um eixo isotrópico, isto é, um eixo em relação ao qual qualquer rotação é uma transformação simétrica. Os quatro grupos são: o grupo cujos elementos são transformações simétricas que podem ser executadas em um cilindro em repouso; os membros dos conjuntos das transformações simétricas executadas em um sistema composto por dois cilindros coaxiais

Consideremos inicialmente um cone, ou um cilindro não homogêneo (um cilindro cuja cor ou densidade ou temperatura varie em função da altura considerada). Nesses dois casos, mostrados na figura 4.5, o eixo do cilindro e o do cone são eixos de simetria: qualquer plano que contenha esses eixos é um plano de simetria, pois a reflexão de uma metade do cilindro (ou do cone) nesses planos é igual a ela mesma. No entanto, não existe nenhum plano *perpendicular* ao eixo dessas figuras que seja um plano de simetria, porque a parte de cima e a parte de baixo desses objetos são diferentes entre si.

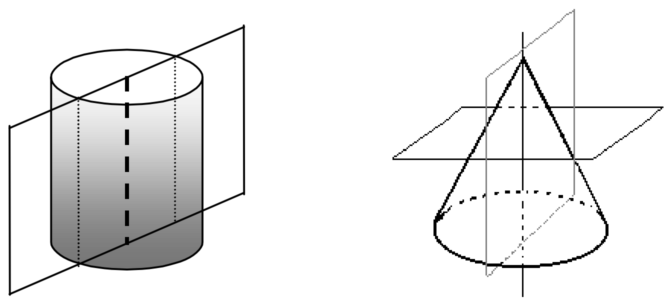

Figura 4.5. Um cilindro não homogêneo e um cone são simétricos com relação a planos que contêm seus eixos, mas não são simétricos com relação a planos perpendiculares aos seus eixos.

Pensemos em um sólido de revolução como uma esfera, um elipsóide de revolução, um cilindro ou um disco. Todos eles possuem um eixo de simetria. Além disso, todos esses exemplos possuem também um plano de simetria perpendicular ao eixo de simetria. Imaginemos, agora, que um desses sólidos está girando em torno desse eixo. Esse movimento de rotação *diminui a simetria do sistema*. A simetria de um corpo parado é diferente da simetria do mesmo corpo girando.

O cilindro em rotação não é simétrico em relação a reflexões nos planos que passam por seu eixo de rotação pois uma metade do cilindro é diferente de sua imagem, isto é, ambas giram em sentidos contrários, como mostra a figura 4.6. No entanto, o cilindro em rotação é simétrico com relação ao plano perpendicular a seu eixo, passando por seu centro, isto é, uma metade do cilindro é igual a sua imagem refletida no plano.

---

rodando em sentidos opostos; os conjuntos de setas; e os de um cilindro rodando ao redor seu eixo. Todos são

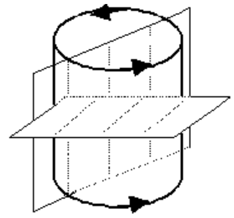

Figura 4.6. Um cilindro em rotação é simétrico com relação a um plano perpendicular a seu eixo.

4.5 Vetores polares e axiais

As grandezas físicas que são representadas por vetores têm ou a mesma simetria de um cone ou de a um cilindro girando. Grandezas vetoriais que são representadas por segmentos de retas orientadas, tais como deslocamento, velocidade, força e momento exibem a mesma simetria de um cone. Já as grandezas relacionadas com rotações e resultantes de um produto vetorial tais como as que correspondem à velocidade angular, torque e momento angular exibem a mesma simetria de um cilindro girando. Podemos associar estes dois tipos de simetria a dois tipos distintos de vetores: vetores polares (vetores propriamente ditos) e vetores axiais (pseudo-vetores).

Um vetor polar é aquele cujas componentes mudam de sinal quando há uma inversão dos eixos coordenados. Eles têm esse nome pois são da mesma natureza que o raio vetor proveniente de um pólo. O grupo de simetria de um vetor polar é o de um cone com eixo paralelo ao vetor. As três componentes do vetor conservam os mesmos valores após uma rotação qualquer do sistema de eixos em torno da direção do vetor e após uma reflexão por um plano paralelo ao vetor. A mudança do sinal por uma inversão dos eixos corresponde à ausência de centro no grupo de simetria do vetor polar.

Para exibir as propriedades de simetria de um vetor, vamos considerar reflexões em planos paralelos e perpendiculares ao vetor. Um vetor simétrico não muda de sinal em uma reflexão e um antissimétrico muda. Vetores polares são simétricos com relação a reflexões

---

subgrupos do grupo formado pela simetria de um cilindro em repouso.

em um plano paralelo pois o vetor refletido possui a mesma direção que o vetor original (figura 4.7a). Por outro lado, os vetores polares são antissimétricos com relação a reflexões em um plano perpendicular pois a direção do vetor refletido é oposta ao vetor original (figura 4.7b).

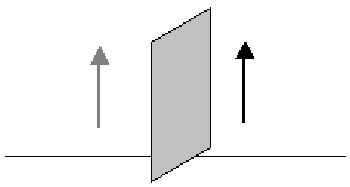

Figura 4.7a. Um vetor polar é simétrico com respeito a uma reflexão paralela.

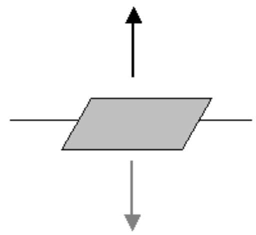

Figura 4.7b. Um vetor polar é antissimétrico com relação a uma reflexão perpendicular.

Os vetores axiais, por outro lado, pertencem ao grupo de simetria de um cilindro circular girando em torno do eixo passando pelo vetor. As transformações de coordenadas que deixam invariáveis as componentes de um vetor deste tipo são as rotações de um ângulo qualquer em torno da direção do vetor; as reflexões em um plano perpendicular a direção do vetor e as inversões. Essas operações correspondem à existência de um centro de simetria do vetor. O grupo de tais transformações é um subgrupo que deixa invariantes as componentes de um vetor chamado axial, em analogia com uma rotação em torno de um eixo.

Os vetores axiais são antissimétricos com respeito a reflexões em um plano paralelo (figura 4.8a) e simétricos com relação a reflexões em um plano perpendicular (figura 4.8b).[246]

[246] ALTMANN 1992, pp. 23-25.

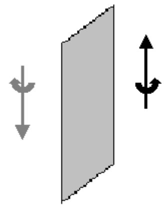

Figura 4.8a. Um vetor axial é antissimétrico com relação a uma reflexão em um plano paralelo.

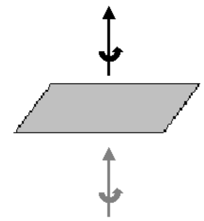

Figura 4.8b. Um vetor axial é simétrico com relação a uma reflexão perpendicular.

Tanto um vetor polar quanto um axial têm três componentes e o mesmo símbolo é usado para representar ambos, embora eles sejam dois objetos completamente diferentes, sob o ponto de vista de sua simetria.

Vamos analisar, em seguida, a simetria dos campos elétrico e magnético.

4.6 O princípio de simetria de Pierre Curie

Vamos, agora, retornar à primeira situação física que analisamos para aplicar a idéia de plano de simetria e com isso entendermos as idéias gerais do princípio de Curie. A análise que Curie fez dos conceitos de simetria é bastante complexa. Vamos explicar aqui apenas alguns aspectos do seu trabalho.

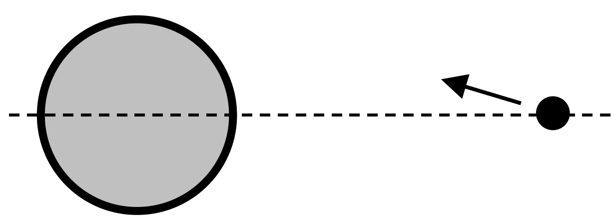

Figura 4.9. Uma força resultante entre a esfera e a carga fora da linha que as une violaria o princípio de Curie

Se tivermos uma esfera carregada e uma carga de prova próxima a ela (como havíamos descrito) qualquer plano que passe pela reta que une os seus centros é um plano de simetria do conjunto, e essa reta é um eixo de simetria do sistema (figura 4.9).

Quais tipos de fenômenos podem surgir em um sistema como esse? É aqui que Pierre Curie introduziu um princípio de simetria dos fenômenos físicos: "A simetria das causas se mantém nos efeitos". Se um sistema possui um certo tipo de simetria, todos os fenômenos que surgem nesse sistema devem conservar aquela simetria. No caso que estamos considerando, se surgisse uma força resultante que *não* tivesse a direção da reta que une os centros das duas cargas, isso seria uma quebra da simetria inicial e violaria o princípio de Curie.

Imaginemos, por exemplo, que a força produzida sobre a carga de prova tivesse a direção indicada na figura 4.9. Nesse caso, a força e a reta que une os dois centros definem um único plano de simetria. Nenhum outro plano que passa pela reta que une os dois centros seria, agora, um plano de simetria. Portanto, a simetria do efeito seria menor do que a simetria da causa. O princípio de Curie afirma que isso não pode ocorrer. Os efeitos que podem surgir devem manter a existência do eixo de simetria que havia inicialmente. Assim, apenas podem surgir forças que tenham a mesma direção desse eixo, pois apenas nesse caso a simetria inicial será mantida.

Raciocínios de simetria como esses são comuns na física e muitas vezes nem nos damos conta daquilo que está por trás desses argumentos. O conceito de simetria é intuitivo e já era utilizado na Antigüidade, por vários filósofos. Arquimedes usou esse tipo de argumento em seu trabalho *Sobre o Equilíbrio dos Planos* escrito no século III a.C. Em seus estudos sobre estática, postulou: "Corpos de pesos iguais localizados a distâncias iguais estão em equilíbrio e pesos iguais a distâncias diferentes não estão em equilíbrio e se inclinam na direção do peso que está a maior distância".[247] Se aplicarmos este postulado de Arquimedes para analisarmos uma balança de braços de mesmo comprimento e pratos iguais, parece-nos óbvio que a balança permanecerá em equilíbrio se os pesos sobre os

---

[247] COHEN & DRABKIN 1958 p. 186.

pratos e os braços da balança forem iguais (figura 4.10). Mas por que isso nos parece óbvio? A resposta é "por uma questão de simetria". Além disso, também nos parece óbvio que ocorre movimento da balança apenas quando os pesos ou os braços das balanças são diferentes. Novamente o motivo para acharmos isso óbvio está relacionando com simetria, mas agora com *assimetria*[248] entre os braços ou os pesos.

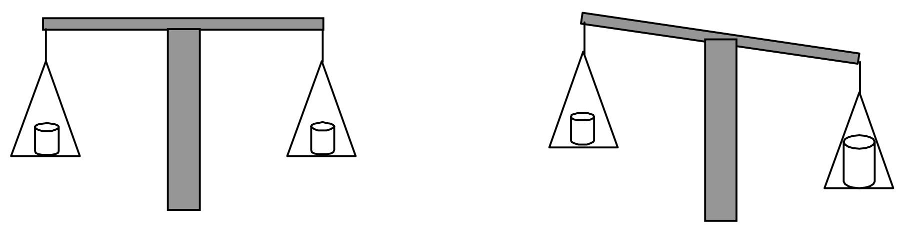

Figura 4.10. A existência de uma assimetria é necessária para que ocorra algum movimento.

Este exemplo da balança nos permite perceber que, para que ocorra algum movimento (fenômeno) da balança, é necessário que haja alguma assimetria nos pesos ou no tamanho dos braços (causas). Este é justamente o significado do princípio de simetria de Pierre Curie proposto em 1894.

Curie discutiu as condições necessárias para a existência de fenômenos físicos. De acordo com Curie, certos elementos de simetria podem coexistir com certos fenômenos, mas eles não são necessários para a existência dos fenômenos. O que é necessário é que certos elementos de simetria *não existam*, ou seja, é a *assimetria* que cria o fenômeno. Assim, as operações que indicam uma assimetria, indicam uma propriedade possível do sistema. Curie afirmou que os elementos de simetria de um fenômeno permanecem nos efeitos produzidos e que quando um fenômeno revela uma assimetria, essa assimetria deve estar presente nas causas deste fenômeno. Isso significa que podemos conhecer a assimetria das causas de um fenômeno observando a assimetria dos efeitos produzidos:[249]

---

[248] Assimetria também pode ser interpretada como ausência de simetria ou como quebra de simetria.
[249] CURIE 1894b, p. 401.

1. Quando certas causas produzem certos efeitos, os elementos de simetria das causas devem aparecer nos efeitos produzidos.

2. Quando certos efeitos revelam uma certa assimetria, tal assimetria deve existir nas causas que os produziram.

A assimetria é a característica importante, pois não é possível deduzir a existência de uma simetria na causa a partir da existência de uma simetria no efeito já que os efeitos produzidos podem ser muito mais simétricos que suas causas. Além disso, várias assimetrias podem se combinar e resultar em um efeito simétrico, como ocorre em efeitos macroscópicos dependentes de fatores microscópicos que simetrizam as perturbações recebidas (causas). Também não podemos afirmar que uma assimetria nas causas permaneça nos efeitos pois certas causas de assimetria podem não influenciar certos fenômenos.

O método usado por Curie requer o conhecimento da simetria de algumas grandezas físicas como ponto de partida e assume que cada fenômeno físico é caracterizado por uma única simetria. Uma das principais conseqüências do princípio de Curie é estabelecer o papel da assimetria como condição necessária para a existência de algum fenômeno físico.

O princípio de simetria de Curie nos permite encontrar resultados e relações entre as grandezas físicas a partir da análise das simetrias dessas estruturas. Os artigos de Curie tiveram um importante papel ao explicitar e deixar claros os argumentos de simetria que são usados intuitivamente na discussão e elaboração de teorias físicas. Geralmente associamos uma estrutura geométrica a uma grandeza física e tratamos estes entes geométricos usando argumentos de simetria, entre outras coisas. Curie partiu de uma análise geométrica para depois aplicá-la na física. Propôs o princípio de simetria em termos da assimetria dos fenômenos físicos e não em termos da simetria, como seria de se esperar. Como no caso da balança de pratos, é a assimetria o aspecto importante e não a simetria.

A descrição de um sistema é uma abstração que depende de uma base teórica e de um conjunto de conceitos inseridos num paradigma. Com isto em mente, devemos olhar para as propriedades de simetria de um sistema como as propriedades *da descrição do sistema* e não do sistema propriamente dito.

Do ponto de vista das idéias gerais, o conceito de simetria se aproxima do conceito de dimensão, que será discutido no próximo capítulo. Esses conceitos são caracterizados pelo meio material no qual ocorre o fenômeno e por uma grandeza física que terá uma certa dimensão. Dois meios com a mesma assimetria têm entre si uma ligação particular da qual se podem tirar conseqüências físicas. Uma ligação do mesmo gênero existe entre duas grandezas de mesma dimensão.[250]

Há uma grande classe de circunstâncias nas quais o princípio de simetria tem poder de previsão e pode ser usado de forma heurística na formulação de novas teorias. O princípio de Curie tem um poder preditivo pois estabelece restrições para as situações possíveis. Se as leis envolvidas são deterministas e conhecidas, o princípio se aplica em todas as transformações sob as quais estas leis são invariantes. O princípio de Curie também pode ser útil para checar soluções analíticas de problemas e para obter soluções parciais para problemas complicados sem ter que resolvê-los analiticamente.[251]

4.7 A experiência de Ørsted e o princípio de Curie

No início do século XIX houve a busca de uma relação entre eletricidade e magnetismo guiada por uma suposição sobre as semelhanças entre os fenômenos elétricos e magnéticos. Como exemplo da busca das interações entre fenômenos elétricos e magnéticos há o resultado positivo obtido em 1803 por Johann Wilhem Ritter sobre efeitos magneto-químicos análogos à eletrólise[252] e a descoberta do eletromagnetismo em 1820 por Hans Christian Ørsted (1777-1851). Vamos analisar a descoberta do eletromagnetismo utilizando argumentos modernos de simetria e não procuraremos fazer uma reconstrução histórica.[253]

---

[250] CURIE 1894b, p. 393.
[251] CHALMERS 1970, p. 134.
[252] MARTINS 1986.
[253] Para uma reconstrução histórica da descoberta do eletromagnetismo por Ørsted veja MARTINS 1986.

Nesta experiência, um fio condutor percorrido por uma corrente elétrica gera um campo magnético capaz de girar uma agulha imantada, como mostrado na figura 4.11b.

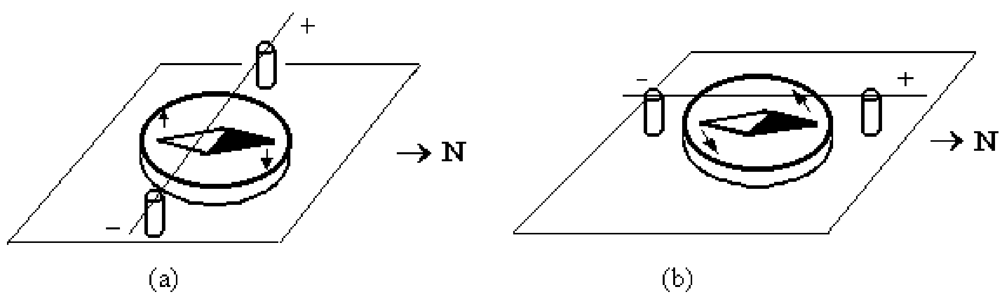

Figura 4.11. Configuração antissimétrica e simétrica da agulha e do fio na experiência de Ørsted.

Nos primeiros experimentos de Ørsted o fio era colocado perpendicularmente sobre a agulha magnética na direção Leste-Oeste (figura 4.11a); ele esperava que os pólos magnéticos se movessem para que o dipolo ficasse paralelo ao fio, produzindo uma rotação da agulha, mas nenhum efeito foi observado.[254] No entanto, quando o fio é colocando na direção Norte-Sul, acima de uma agulha magnética, ela gira como mostrado pelas setas na figura 4.11b.

Provavelmente Ørsted insistiu na configuração perpendicular por anos já que a configuração paralela (figura 4.11b) não deveria apresentar nenhum resultado positivo, de acordo com a interpretação "intuitiva" da simetria dos fenômenos. Nesta configuração, o fio e a agulha determinam um plano vertical que, aparentemente, é o plano de simetria do sistema. Poderíamos esperar apenas algum movimento da agulha no plano. Por exemplo: a agulha poderia ser atraída ou repelida pelo fio ou ter um de seus pólos atraído e o outro repelido pelo fio. Mas não esperaríamos que ocorresse a deflexão da agulha para fora do

[254] Nesta posição, de acordo com o conhecimento atual, a agulha magnética sofre uma força no plano vertical, não produzindo nenhum efeito observável.

plano e sempre para o mesmo lado. O surpreendente do experimento de Ørsted é a rotação da agulha em um sentido determinado sem uma causa aparente.[255]

Em termos do conceito “intuitivo” de simetria, diríamos que a configuração (a) é a configuração antissimétrica e a configuração (b) é a simétrica. Como discutido acima, o esperado seria algum efeito na configuração antissimétrica, pois é a assimetria de um sistema que possibilita a existência de algum fenômeno. Para entendermos o que acontece neste experimento em termos do princípio de simetria de Curie, devemos olhar com mais atenção para a simetria das grandezas envolvidas. À primeira vista, estamos considerando que as grandezas elétricas (corrente elétrica) e as grandezas magnéticas (dipolo magnético da agulha imantada) têm as mesmas propriedades de simetria. Mas será que isso é verdade?

Para respondermos a esta pergunta, vamos fazer uma análise mais geral das questões sobre simetrias envolvidas na experiência de Ørsted. Para isso, vamos substituir a corrente e a agulha por entes geométricos: os vetores $\vec{\mathbf{i}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, respectivamente, não importando se são vetores polares ou axiais, por enquanto.[256]

Há muitas alternativas possíveis para as posições relativas entre o fio e a agulha. As duas extremas são suficientes para a análise e por isso vamos analisar o que ocorre quando o fio está paralelo ou perpendicular ao plano meridiano da agulha. Do ponto de vista da simetria, essas configurações são, respectivamente, antissimétrica e simétrica com relação a uma reflexão no plano meridiano e estão representadas na figura 4.12.

[255] Normalmente se interpreta a descoberta de Ørsted como sendo resultado do acaso, mas o estudo da história da descoberta do eletromagnetismo por Ørsted mostra que foi preciso muito mais que sorte e que várias idéias pré-concebidas sobre as propriedades de simetria do fenômeno tiveram que ser superadas; veja MARTINS 1986.

[256] A discussão abaixo foi baseada em ALTMANN 1992, pp. 15-20.

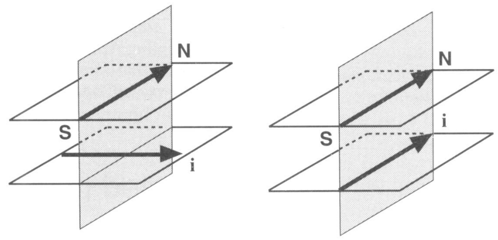

Figura 4.12. Configurações antissimétrica e simétrica.

Vamos começar analisando o caso antissimétrico. Neste caso, a causa é antissimétrica e espera-se um efeito antissimétrico também, como mostra a figura 4.13. As configurações antissimétricas que poderiam gerar algum efeito sobre a agulha são: o fio acima da agulha e perpendicular a ela em um plano horizontal e o fio colocado verticalmente ao lado de uma das extremidades da agulha.

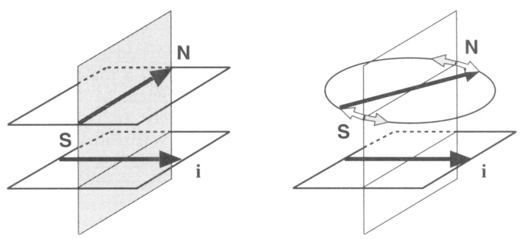

Figura 4.13. Configuração antissimétrica e efeito não nulo esperado

Na configuração antissimétrica não há um plano que seja plano de simetria para os dois vetores simultaneamente. Neste caso, espera-se uma rotação da agulha magnética indicada pelas setas brancas pois, como vimos na seção 4.6, esta rotação também é antissimétrica. Nesta configuração a simetria (ou melhor, a assimetria) é conservada após o movimento da agulha, isto é, a simetria da causa é a mesma que a do efeito e por isso se espera um resultado não nulo para o experimento. No entanto, surpreendentemente, esta configuração não apresenta efeito algum.

Na configuração simétrica mostrada na figura 4.14, há um plano vertical que contém o fio e a agulha. Este plano é, aparentemente, um plano de simetria do sistema pois não há nada que diferencie um lado do plano do outro. Quando a corrente elétrica é ligada, a simetria deveria manter-se a mesma e não haveria, aparentemente, nenhum motivo para a agulha girar para nenhum dos dois lados do plano. Caso haja algum resultado ele será antissimétrico, de modo que a simetria não se conservará. Logo, para que a simetria se conserve não pode haver movimento da agulha; porém, a agulha gira.

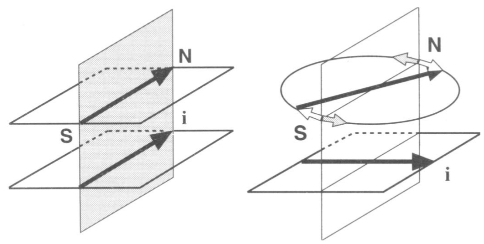

Figura 4.14. Configuração simétrica e efeito não nulo inesperado

A rotação da agulha na configuração simétrica *é incompatível com a existência de um plano de simetria no sistema*. De acordo com o princípio de Curie, a rotação da agulha só é possível caso os vetores $\vec{\mathbf{i}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ tenham simetrias diferentes, isto é, sejam de tipo diferentes (polar ou axial). Com esta hipótese nenhum dos planos será plano de simetria para os dois vetores simultaneamente e com isso há a possibilidade da existência de algum efeito no sistema. Sob este aspecto, a experiência de Ørsted é uma experiência de determinação de simetria relativa entre os vetores $\vec{\mathbf{i}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$. O que ela nos permite saber é que os vetores $\vec{\mathbf{i}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ *obrigatoriamente têm simetrias diferentes*, mas não temos como saber qual a simetria de cada um deles individualmente. Para isso outros experimentos são necessários.

A estranha simetria do fenômeno descoberto por Ørsted parecia indicar que a eletricidade e o magnetismo, embora inter-relacionados, possuíam estruturas muito diferentes. Os argumentos acima indicam que *é impossível que o campo elétrico e magnético sejam vetores do mesmo tipo*. Para determinar qual a simetria do próprio campo elétrico e do campo magnético, Curie estudou outros fenômenos relacionados ao eletromagnetismo, como a eletrólise e a rotação do plano de polarização da luz.

Curie pensou sobre o campo elétrico entre duas placas circulares de zinco e cobre, como as placas de um capacitor, para determinar que a simetria do campo elétrico é a mesma simetria de uma seta.[257] Uma carga colocada em algum ponto do campo também indica que o campo tem a simetria de uma seta pois esta carga perceberá uma força (efeito do campo) que tem a simetria de uma seta. Com isso, concluímos que a simetria do campo elétrico é justamente a simetria de uma seta. É a mesma simetria de uma força, de uma velocidade e da atração gravitacional. Todos esses fenômenos são representados por uma flecha, do ponto de vista de simetria.

Podemos determinar a simetria da corrente elétrica considerando uma situação na qual um campo elétrico é causa de uma corrente elétrica e outra situação na qual a corrente elétrica é causa da decomposição química na eletrólise. Analisando essas situações concluímos que a simetria da corrente elétrica também é a simetria de uma seta. As simetrias da corrente elétrica e da polarização elétrica são, necessariamente as mesmas do campo elétrico pois ele é causa destes fenômenos. Todos eles são vetores polares.[258]

Uma vez determinada a simetria polar do campo elétrico, o campo magnético deve necessariamente ter uma simetria axial. Curie discutiu vários experimentos que confirmam isso, entre eles a rotação do plano de polarização da luz sob a ação de um campo magnético.

Vamos considerar um feixe de luz polarizada que incide sobre um líquido ativo opticamente com simetria cilíndrica na direção do eixo do cilindro. Um exemplo de líquido opticamente ativo é uma solução de água com açúcar. As moléculas de dextrose (glicose) são assimétricas.

Podemos olhar para o problema considerando ou não a microestrutura do líquido. Se ignorarmos esta microestrutura o princípio de Curie não é válido. O plano de simetria do

[257] CURIE 1894b, pp. 403-404.
[258] CURIE 1894b, p. 404.

problema passa pelo raio e contém o campo $\vec{\mathbf{E}}$ ou $\vec{\mathbf{H}}$ da luz, dependendo de qual é considerado como vetor polar. Como o plano de polarização é rodado quando o raio passa pelo líquido, o raio emergente (efeito) não é simétrico em relação ao plano de simetria inicial. Para explicarmos a aparente quebra de simetria, devemos olhar para a microestrutura do líquido e dizer que as moléculas que compõem o líquido ativo não são simétricas em relação a uma reflexão no plano de simetria definido anteriormente. Essa assimetria das moléculas possibilita a existência do fenômeno de rotação do plano de polarização da luz.

Faraday descobriu que o plano de polarização da luz sofre uma rotação quando atravessa um meio opticamente inativo (como o vidro) submetido a um campo magnético paralelo à direção de propagação do feixe de luz. Da mesma forma que no caso dos líquidos ativos, se um campo magnético é capaz de induzir a rotação do plano de polarização da luz, devemos concluir que este campo possui uma assimetria, de tipo axial, que produz esse efeito.

Não teríamos como saber qual é a simetria característica dos campos elétrico e magnético se conhecêssemos apenas os fenômenos gerais de eletricidade como eletricidade estática, eletricidade dinâmica, magnetismo, eletromagnetismo e indução. Poderíamos, por exemplo, escolher para o campo magnético a simetria que atribuímos ao campo elétrico, o que nos obrigaria a atribuir para o campo elétrico a simetria que anteriormente atribuímos ao campo magnético. Isso não levaria a nenhum absurdo com relação à nossa hipótese inicial sobre a simetria completa da matéria em movimento.

Os argumentos usados acima para determinar as simetrias contêm a hipótese de que a carga elétrica é uma quantidade *escalar* fundamental. Se tivéssemos trabalhado com a hipótese da existência de pólos magnéticos como carga fundamental básica, as considerações acima teriam levado ao campo magnético como tendo a simetria de uma seta e o campo elétrico e a corrente com a simetria de um cilindro girando.[259] Isso não quer

[259] CHALMERS 1970, p. 139 e MARTINS 1988, p.55.

dizer que os pólos magnéticos sejam impossíveis se o campo magnético é axial, e sim que os pólos teriam que ser grandezas *pseudo-escalares*.[260]

Se considerarmos a agulha magnética composta por pólos magnéticos pseudo-escalares, também poderíamos explicar um movimento da agulha na configuração simétrica da figura 4.13. Neste caso, a agulha e o fio não definem um plano de simetria. Embora a corrente (grandeza polar) seja simétrica sob uma reflexão em um plano paralelo, uma grandeza pseudo-escalar não é. Com isso, vemos que a agulha e a corrente não definem juntas um plano de simetria e, pelo princípio de Curie, algum efeito é esperado (rotação da agulha).

Os campos elétrico e magnético são, obrigatoriamente, grandezas com simetrias diferentes, como pode ser concluído da experiência de Ørsted. No entanto, ambos são representados pelo mesmo símbolo, isto é, ambos costumam ser representados por uma flecha.[261] Curie apontou em 1894 que o costume de se representar o campo magnético por uma flecha é problemático do ponto de vista da simetria, visto que o campo magnético não se modifica por uma reflexão em um plano normal à sua direção mas muda de sentido por uma reflexão em um plano paralelo à sua direção. Isto é exatamente o contrário do que acontece com uma flecha.[262]

A interpretação usual da experiência de Ørsted afirma que o campo magnético é algo que "gira" em torno do fio. A figura 4.15 é a representação usual do campo girando ao redor de um fio. Analisando a simetria da corrente (causa) e do campo ao redor do fio (efeito) em relação a um plano paralelo ao fio, vemos que a corrente se comporta como um vetor simétrico com relação a reflexões em um plano que contém o fio e o campo girando ao redor do fio se comporta como um vetor antissimétrico. De acordo com o princípio de Curie, é impossível que uma causa simétrica gere um efeito antissimétrico. O problema todo está na representação do campo como algo que gira em torno do fio.

---

[260] Se um número real A é uma função do vetor posição **r** de tal modo A(**r**) = ± A(–**r**), então A é ou um escalar ou um pseudo-escalar, se o sinal + ou – prevalecer.
[261] CURIE 1894b, p. 456.
[262] CURIE 1894b, p. 407.

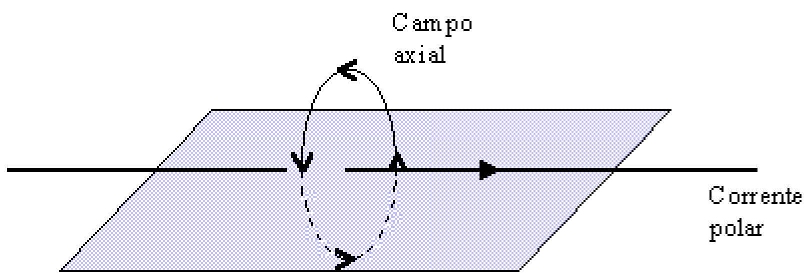

Figura 4.15. Representação usual do campo gerado por uma corrente em um fio

De acordo com a discussão acima, o campo magnético tem uma simetria axial. Qual seria a representação adequada do campo magnético? Uma imagem correta da simetria axial do campo magnético, seria pensar que *em cada ponto* do campo há algo girando e que as linhas de força ao redor do fio são compostas por infinitas partes que giram ao redor da linha. O correto seria representarmos o campo como uma circunferência que gira em torno de si mesma e não em torno do fio, como na figura 4.16.

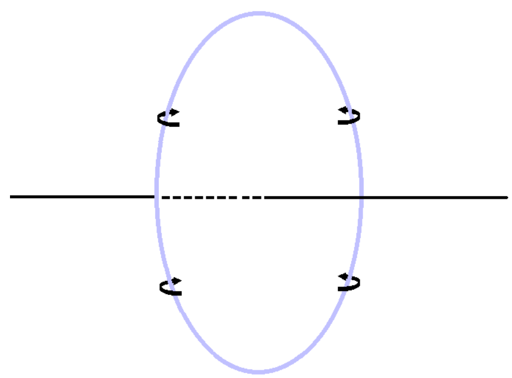

Figura 4.16. Representação do campo gerado por uma corrente em um fio considerando os aspectos de simetria

Esse tipo de representação coincide com a imagem que, no século XIX, se fazia das linhas de força magnética, que eram imaginadas geralmente como algo dotado de rotação. No entanto, essas idéias eram baseadas em analogias mecânicas e na hipótese do éter. A análise de Curie independe dessas analogias e do éter.

4.8 As contribuições de Langevin

Paul Langevin publicou em 1912 o artigo “Notions Géométriques Fondamentales” na *Encyclopédie des Sciences Mathematiques*.[263] Este artigo é uma tradução do artigo de Max Abraham, “Geometrische Grundbegriffe”[264], publicado na enciclopédia alemã *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* em 1901. Neste artigo, Abraham faz um resumo dos principais aspectos da álgebra vetorial, explicando quais as operações que envolvem vetores, os tipos de vetores (polares e axiais), relação entre tensores e vetores axiais, campos vetoriais, etc. Abraham não se limita a apresentar o sistema de Gibbs-Heaviside, acrescenta discussões sobre aspectos de simetria dos vetores, citando Pierre Curie, entre outros.

Langevin não fez apenas uma tradução; ele inseriu inúmeros comentários e aprofundou algumas questões presentes no artigo de Abraham. A principal mudança introduzida por Langevin na tradução francesa é o uso da notação vetorial, enquanto que Abraham usa um misto de notação de coordenadas com notação vetorial - por exemplo, escreve os vetores em coordenadas, mas usa os símbolos ∇, div, curl, V (produto vetorial) e S (produto escalar). Langevin inicia o artigo explicando detalhadamente o princípio de simetria de Curie, apresenta uma discussão sobre as diferenças entre grandezas escalares e pseudo-escalar e também chama atenção para a necessidade do uso de símbolos diferentes para representar vetores com simetrias diferentes.

Segundo Langevin, para designar as diferenças entre os tipos de grandezas envolvidas em um sistema é conveniente obedecer às seguintes condições:[265]

É necessário empregar-se símbolos diferentes para denotar os diferentes tipos de grandezas.

[263] LANGEVIN 1912.
[264] ABRAHAM 1901.
[265] LANGEVIN 1912, p. 3.

Estes signos devem ser fáceis de serem elaborados tipograficamente, usando caracteres comuns.

Os símbolos das operações devem obedecer tanto quanto possível às analogias entre os diversos algoritmos e não devem usar símbolos como parênteses ou colchetes.

É necessário empregar-se uma terminologia simples e que não cause confusão.

4.8.1 Escalares e pseudo-escalares

Langevin também diferencia entre escalares puros e pseudo-escalares.[266] Os escalares (definidos por Hamilton) são grandezas determinadas por um parâmetro e podem ser conhecidas pela determinação do parâmetro e de sua dimensão. A medida de um escalar indica quantas unidades ele contém de uma certa espécie e suas dimensões mostram como essas unidades variam quando se modificam unidades fundamentais como massa, tempo, comprimento.[267]

Os escalares comuns não exigem para a sua medida a definição de um sentido positivo de rotação, suas medidas permanecem invariáveis sob todas as transformações de coordenadas, rotações e inversões. Essas grandezas são chamadas *escalares puros* e serão representados por uma letra qualquer sem um símbolo especial.

Um campo escalar uniforme possui o grupo de simetria do meio isotrópico, ou seja, o grupo da esfera. A produção de um efeito representado por uma grandeza de tal tipo (mudança de temperatura, variação de energia interna, etc.) é possível em um meio qualquer, independente de sua simetria.

Há outras grandezas não vetoriais, representadas por um único número, cujas medidas dependem da escolha de uma rotação como positiva - como, por exemplo, o ângulo sólido. As grandezas deste tipo são chamadas de *pseudo-escalares* e são representadas por Langevin por uma letra com um ponto embaixo: $\underset{\cdot}{\alpha}$.

---

[266] LANGEVIN 1912, p. 4.

[267] Veja o capítulo seguinte sobre dimensão das grandezas físicas.

O grupo de simetria do campo uniforme de um pseudo-escalar compreende todas as rotações e algumas reflexões. É um sub-grupo do grupo esférico, como por exemplo o de uma esfera preenchida com um líquido opticamente ativo. A produção de um efeito por um grupo deste tipo não é possível em um meio desprovido de simetria por reflexão. Uma grandeza pseudo-escalar muda de sinal quando ocorre uma inversão nos eixos, mas não quando ocorre uma rotação.

O produto e o quociente de dois escalares de mesma classe é um escalar puro, enquanto que o produto ou o quociente de dois escalares de classes diferentes é um pseudo-escalar.

4.8.2 Vetores polares, vetores axiais e tensores

Abraham chama a atenção para a diferença entre vetores polares e axiais, citando Hamilton e Grassmann, mas não propõe o uso de símbolos diferentes para representá-los. Em sua tradução, Langevin propõe o uso de uma letra qualquer com uma flecha em cima $\vec{\mathbf{B}}$ para denotar um vetor polar.[268] Como vimos na discussão sobre a experiência de Ørsted e pelos comentários de Curie, a representação de um vetor axial por uma reta orientada não é inteiramente adequada. Langevin propõe[269] uma flecha circular em torno da direção do vetor para representar um vetor axial: $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{B}}$.

Langevin discute o problema da representação dos tipos diferentes de vetores da seguinte forma.[270] Costuma-se representar o paralelogramo resultante do produto vetorial por uma seta perpendicular ao seu plano com comprimento proporcional à sua área. Esta representação não é adequada, pois quando a superfície é refletida em um plano paralelo ao paralelogramo, sua imagem é igual a si mesma, mas a linha representativa muda de sentido e portanto não é um símbolo adequado.

[268] LANGEVIN 1912, p. 7.
[269] LANGEVIN 1912, p. 11.
[270] LANGEVIN 1912, pp. 11-14.

A teoria de quatérnions e os desenvolvimentos posteriores da análise vetorial não se deram conta deste fato. O primeiro a distinguir entre as linhas direcionadas e o paralelogramo resultante do produto vetorial foi Alfred North Whitehead (1861-1947) no livro *A treatise on universal algebra*, de 1898. Whitehead sugere que é melhor empregar o termo "fluxo" para designar um vetor do tipo área, mas não propõe nenhum símbolo diferente para representar esse tipo de vetor.[271] Grassmann também interpretou o produto entre dois vetores como sendo uma área, porém, não associou nenhum símbolo especial para representar essa área e também não discutiu questões relativas à simetria dos entes envolvidos visto que seu enfoque não era vetorial.[272] A importância de tal distinção já havia sido reconhecida por Maxwell, que chama as duas categorias de grandezas dirigidas de vetores *translacionais* e *rotatórios*, como vimos na seção 4.2.

Langevin discute que o produto escalar entre dois vetores do mesmo tipo é um escalar e o produto escalar entre vetores de tipos diferentes é um pseudo-escalar. Além disso, o produto vetorial entre dois vetores do mesmo tipo é um vetor axial, ao passo que o produto vetorial entre dois vetores de tipos diferentes é um vetor polar.[273]

Embora Langevin não discuta as propriedades das operações envolvendo o operador ∇, é importante ressaltarmos algumas dessas propriedades. O operador ∇ pode ser usado na forma de produto vetorial (rotacional) ou produto escalar (divergente ou gradiente). O rotacional de um campo vetorial polar é um vetor axial e o rotacional de um campo vetorial axial é um vetor polar. No caso do divergente, o divergente de um campo vetorial polar é uma grandeza escalar e o divergente de um campo vetorial axial é uma grandeza pseudo-escalar.

Langevin discute o fato de podermos realizar a transformação das equações relativas aos campos vetoriais e tensoriais e relacioná-los com sistemas de coordenadas ortogonais quaisquer, independentemente da escolha dos eixos de coordenados utilizados.[274] Propõe o

[271] WHITEHEAD, p. 549.
[272] Sobre a álgebra de Grassmann, veja a seção 3.10.
[273] LANGEVIN 1912, p. 13.
[274] LANGEVIN 1912, pp. 52-53.

método desenvolvido por Gregorio Ricci do cálculo diferencial absoluto para procurar diretamente os invariantes do campo vetorial ou tensorial.

Como exemplo de sua notação distinta para designar vetores polares e axiais, Langevin escreve as equações da eletrodinâmica usando uma seta comum para indicar os vetores polares $(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{D}})$ e uma seta torcida para indicar os vetores axiais $(\overset{\curvearrowright}{B}, \overset{\curvearrowright}{H})$.[275]

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot}\, \overset{\curvearrowright}{H}, \qquad \text{div}\, \vec{D} = 4\pi e,$$

$$-\frac{1}{V}\frac{\partial \overset{\curvearrowright}{B}}{\partial t} = \text{rot}\, \vec{E}, \qquad \text{div}\, \overset{\curvearrowright}{B} = 4\pi m$$

Figura 4.17. Equações de Maxwell escritas com a notação de Langevin que diferencia vetores polares de axiais.

Note-se que a quarta equação de Langevin deveria ter sido escrita com um ponto sob a letra *m* pois se trata de um pseudo-escalar.

No início do século XX, além de Paul Langevin, Woldemar Voigt também discutiu aspectos conceituais e a melhor notação para representar os diferentes tipos de vetores e, em 1910, também propôs novos símbolos para representar grandezas com simetria polar e axial, sem propor nenhum símbolo especial para representar as grandezas pseudo-escalares:[276]

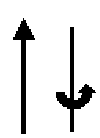

Figura 4.18. Os símbolos propostos por Voigt para representar vetores polares e axiais.

[275] LANGEVIN 1912, p. 56. Notemos que Langevin estava considerando a existência de monopólos magnéticos.
[276] VOIGT 1910, p. 130.

Apesar da importância do uso de símbolos diferentes para representar grandezas diferentes, Langevin e Voigt não conseguiram fazer com que suas sugestões fossem aceitas e incorporadas na notação usada pelos físicos e matemáticos.

4.9 Um paradoxo interessante

Entre as várias leis físicas associadas com o produto vetorial, vamos considerar a expressão da força magnética $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Alguém pode se perguntar como pode ser possível o produto vetorial entre o vetor polar $\vec{\mathbf{v}}$ e o vetor axial $\vec{\mathbf{B}}$ produza o vetor polar $\vec{\mathbf{F}}$. Isto não é óbvio e devemos olhar com mais atenção para a natureza destes vetores para obtermos uma resposta.

Vamos adotar a interpretação usual para os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores unitários *polares*. Como discutido acima, as componentes de $\vec{\mathbf{F}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ devem ser escalares e as componentes de $\vec{\mathbf{B}}$ devem ser pseudo-escalares para que sejam vetores polares e axiais respectivamente.

Temos então $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores polares; $\breve{B}_x, \breve{B}_y, \breve{B}_z$[277] como pseudo-escalares; e v_x, v_y, v_z como escalares. A força $\vec{\mathbf{F}}$ é obtida pelo produto vetorial $q\,\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circ}{\breve{B}}$ e, de acordo com o método usual de cálculo, pode ser escrita como

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \overset{\circ}{\breve{B}}) = q(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \times (\breve{B}_x \vec{i} + \breve{B}_y \vec{j} + \breve{B}_z \vec{k}) \Rightarrow \tag{4.1a}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = q(v_y \breve{B}_z - v_z \breve{B}_y)\vec{\mathbf{i}} + q(v_z \breve{B}_x - v_x \breve{B}_z)\vec{\mathbf{j}} + q(v_x \breve{B}_y - v_y \breve{B}_x)\vec{\mathbf{k}} \tag{4.1b}$$

A carga elétrica q é um escalar. Na expressão final, cada quantidade entre parênteses é um pseudo-escalar pois o produto e o quociente entre dois números da mesma

---

[277] Nós estamos propondo o uso de uma barra arrendondada para representar uma grandeza pseudo-escalar pois é mais simples este símbolo tipograficamente.

classe é um escalar puro, enquanto que o produto e o quociente entre dois números de classes diferentes é um pseudo-escalar.

Portanto, o produto vetorial $\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}$ deveria ser um vetor axial pois é a soma de produtos entre um pseudo-escalar e vetores polares, isto é, é uma soma de vetores axiais. Desta forma, um paradoxo emerge: como a força $\vec{\mathbf{F}}$ é um vetor polar e o lado direito da equação parece ser um vetor axial? Este paradoxo surge porque interpretamos $\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}}$ como sendo vetores polares desde o início. Mais adiante veremos a solução.

Pela multiplicação de dois vetores é possível gerar novos objetos. Por exemplo: o produto vetorial de dois vetores polares é um vetor axial.[278] Para entender isso, vamos analisar um caso simples do produto vetorial $\vec{\mathbf{C}}=\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$ no qual as componentes A_z e B_z são nulas. De acordo com as regras usuais para o produto vetorial, $\vec{\mathbf{C}}$ tem apenas uma componente $C_z=A_xB_y - A_yB_x$.

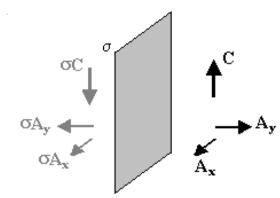

Figura 4.19. Um vetor polar A cuja componente z é nula. O vetor C é um vetor axial.

Vamos considerar um plano de reflexão σ paralelo ao plano *xz* (figura 4.19). As componentes A_x e B_x são simétricas quando consideramos uma reflexão paralela em σ, isto é, $\sigma A_x = A_x$ e $\sigma B_x = B_x$. Mas as componentes A_y e B_y são antissimétricas em relação a uma reflexão perpendicular em σ, isto é $\sigma A_y = -A_y$ e $\sigma B_y = -B_y$. Portanto, $\sigma\vec{\mathbf{C}} = \sigma(A_xB_y - A_yB_x) = (-A_xB_y + A_yB_x) = -\vec{\mathbf{C}}$, logo o vetor $\vec{\mathbf{C}}$ se comporta como um vetor axial sob reflexões em um plano paralelo σ.

[278] ALTMANN 1992, p. 63.

Quando se representa um vetor polar $\vec{\mathbf{A}}$ como $\vec{\mathbf{A}} = A_X\vec{\mathbf{i}} + A_Y\vec{\mathbf{j}} + A_Z\vec{\mathbf{k}}$, os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ são entendidos como vetores polares unitários e as componentes de $\vec{\mathbf{A}}$ (isto é, A_x, A_y e A_z) são escalares. Mas se tentarmos representar um vetor axial $\vec{\mathbf{C}}$ como $\vec{\mathbf{C}} = C_x\vec{\mathbf{i}} + C_y\vec{\mathbf{j}} + C_z\vec{\mathbf{k}}$ surge um problema: se os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ forem entendidos como vetores unitários *polares*, então $\vec{\mathbf{C}}$ também deveria ser entendido como um vetor polar pois a adição de vetores polares produz vetores polares.

Se assumirmos que $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ são vetores *polares*, é possível representar um vetor *axial* como $\vec{\mathbf{C}} = C_X\vec{\mathbf{i}} + C_Y\vec{\mathbf{j}} + C_Z\vec{\mathbf{k}}$, desde que C_x, C_y, C_z sejam pseudo-escalares.

Também seria possível considerar $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores *axiais*. Neste caso, no entanto, seria impossível, à primeira vista, representar um vetor polar (tal como posição) como $\vec{\mathbf{r}} = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}$. Mas é possível representar um vetor polar $\vec{\mathbf{A}}$ como $\vec{\mathbf{A}} = A_X\vec{\mathbf{i}} + A_Y\vec{\mathbf{j}} + A_Z\vec{\mathbf{k}}$, com $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores axiais, se A_x, A_y, A_z forem entendidos como pseudo-escalares. Assim $\vec{\mathbf{A}}$ é um vetor polar pois é a soma de pseudo-escalares multiplicados pelos vetores axiais.[279] Contrariamente, se considerarmos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores *polares*, é possível representar um vetor *axial* como $\vec{\mathbf{C}} = C_x\vec{\mathbf{i}} + C_y\vec{\mathbf{j}} + C_z\vec{\mathbf{k}}$ desde que C_x, C_y, C_z sejam pseudo-escalares. Isto está pressuposto implicitamente na álgebra vetorial usada pelos físicos, embora os livros-texto não discutam esses conceitos. Retornemos agora à equação discutida inicialmente (equação 4.2):

$$\vec{\mathbf{F}} = q\,\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circ}{\breve{B}} = q.(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}) \times (\breve{B}_x\vec{i} + \breve{B}_y\vec{j} + \breve{B}_z\vec{k}) \Rightarrow \tag{4.2a}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = q(v_y\breve{B}_z - v_z\breve{B}_y)\vec{\mathbf{i}} + q(v_z\breve{B}_x - v_x\breve{B}_z)\vec{\mathbf{j}} + q(v_x\breve{B}_y - v_y\breve{B}_x)\vec{\mathbf{k}} \tag{4.2b}$$

[279] ALTMANN 1986, p. 205.

Como o produto vetorial entre dois vetores polares é um vetor axial, então os símbolos $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ que aparecem na equação (4.2b) são vetores axiais pois são os produtos $\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}},\ \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}},\ \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}$ da equação (4.2a). Teríamos, assim, dois tipos de vetores $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ – um conjunto polar e outro axial. Esta nova propriedade de simetria trazida pelo produto vetorial não aparece explicitamente pois usamos o mesmo símbolo para representar vetores polares e axiais. Se no entanto usarmos uma seta arredondada, teremos $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$ etc. Porém isso gera um novo problema, pois escolhemos no começo que $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ são vetores polares e é impossível termos $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$ e $\vec{\mathbf{i}}$ formando uma base ao mesmo tempo, então é impossível construir uma álgebra vetorial fechada.

Uma solução para o paradoxo inicial seria interpretar $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ em (4.2b) como vetores axiais e usar setas arredondadas para representá-los, isto é, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}$. Neste caso, as componentes da velocidade $\breve{v}_x, \breve{v}_y, \breve{v}_z$ deveriam ser pseudo-escalares e as componentes do campo magnético B_x, B_y, B_z deveriam ser escalares para que possamos ter a velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ como um vetor polar e o campo magnético $\overset{\circlearrowleft}{B}$ como um vetor axial. Portanto, teríamos $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$, etc., e a força $\vec{\mathbf{F}}$ poderia ser calculada como $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circlearrowleft}{B}$:

$$\vec{\mathbf{F}} = q(v_y \breve{B}_z - v_z \breve{B}_y)\, \overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} + q(v_z \breve{B}_x - v_x \breve{B}_z)\, \overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}} + q(v_x \breve{B}_y - v_y \breve{B}_x)\, \overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}. \tag{4.3}$$

No entanto, notemos que agora temos um novo conjunto de vetores unitários $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}$ e que isso é inconsistente com a interpretação usual de $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ como vetores polares.

Se quisermos manter apenas o conjunto antigo $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ de vetores unitários polares, é necessário usar um pseudo-escalar unitário $\breve{1}$ e introduzir as novas regras $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \breve{1}\vec{\mathbf{i}}$, etc. Neste caso, ao invés da equação (4.3) podemos escrever:

$$\vec{\mathbf{F}} = \breve{1}[q(v_y \breve{B}_z - v_z \breve{B}_y)\vec{\mathbf{i}} + q(v_z \breve{B}_x - v_x \breve{B}_z)\vec{\mathbf{j}} + q(v_x \breve{B}_y - v_y \breve{B}_x)\vec{\mathbf{k}}] \tag{4.4}$$

É impossível construir uma álgebra vetorial fechada usando apenas vetores polares (ou axiais) e grandezas escalares pois o produto vetorial gerará vetores axiais dos vetores polares (e vice-versa). Portanto, quando se representa vetores por suas componentes, há duas possibilidades: ou se usa vetores polares e axiais junto com escalares e regras de multiplicação apropriadas (tais como $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}} = \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$ etc.) ou se usa apenas vetores polares ou axiais junto com escalares e pseudo-escalares com regras de multiplicação convenientes (tais como $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \breve{1}\vec{\mathbf{i}}$, etc.). Qualquer que seja a escolha, será útil usar símbolos diferentes para representar escalares, pseudo-escalares, vetores polares e vetores axiais.

Suponha, por exemplo, que escolhemos usar apenas vetores unitários axiais, isto é, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{j}}$, $\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{k}}$. Neste caso, as componentes da velocidade $\breve{v}_x, \breve{v}_y, \breve{v}_z$ devem ser pseudo-escalares e as componentes do campo magnético B_x, B_y, B_z deve ser escalares para que a velocidade $\vec{\mathbf{v}}$ seja um vetor polar e o campo magnético $\overset{\circlearrowleft}{B}$ um vetor axial. A força $\vec{\mathbf{F}}$ pode ser calculada como $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{v}} \times \overset{\circlearrowleft}{B}$. Esta força é a soma de termos vetoriais polares tais como $(\breve{v}_y B_z - \breve{v}_z B_y)\overset{\circlearrowleft}{\mathrm{i}}$.

Note-se que esse tipo de dificuldades não existia no sistema de quatérnions, porque eles eram definidos de outra forma, constituindo uma álgebra fechada por definição. Não há "quatérnions polares" e "quatérnions axiais". No entanto, Hamilton foi o causador da confusão, ao identificar a parte vetorial de um quatérnion com vetores comuns (polares) e ao usar i, j, k para indicar tanto versores quanto vetores unitários polares.

A notação tradicional de setas para representar indiferentemente os vetores polares e axiais dificulta que se perceba que a força e a velocidade são grandezas físicas com simetria polar enquanto que o campo magnético tem simetria axial. Esta tradição começou no final do século XIX com a invenção do sistema vetorial atual por Gibbs e Heaviside a partir do sistema de quaternions.

4.10 Conclusão

A discussão da experiência de Ørsted, sob a luz do trabalho de Curie sobre simetria, mostra que os fenômenos gerais do eletromagnetismo, bem como as equações de Maxwell, nos conduzem apenas a uma relação entre as simetrias dos campos elétrico e magnético, de tal sorte que se adotarmos a simetria polar para o campo elétrico, somos obrigados a adotar a simetria axial para o magnético e vice-versa.

Devido a essa indeterminação, foi necessário buscar outros fenômenos para determinar a simetria dos campos (fenômenos eletroquímicos e a rotação do plano de polarização da luz). Com esses fenômenos, aliados à hipótese de que a carga elétrica é uma grandeza escalar, Curie conclui que o campo elétrico é uma grandeza polar e o campo magnético é uma grandeza axial. Se tivéssemos adotado a hipótese de que a carga elétrica é um pseudo-escalar, teríamos concluído que o campo elétrico é uma grandeza axial e o campo magnético é uma grandeza polar. De uma maneira geral, com os experimentos discutidos por Curie é impossível determinar qual a verdadeira natureza das grandezas eletromagnéticas.

Apesar de Curie ter publicado seu trabalho em 1894, atualmente as propriedades de simetria das grandezas eletromagnéticas são raramente discutidas devido ao costume de se usar setas para representar todos os tipos de grandezas vetoriais. A notação tradicional de setas para representar tanto vetores polares quanto axiais torna difícil perceber que o campo elétrico e o campo magnético são grandezas com simetrias diferentes. Esta tradição começou no final do século XIX com a invenção do sistema vetorial por Gibbs e Heaviside a partir do sistema de quaternions.Curie sugeriu que símbolos diferentes deveriam ser usados para representar as grandezas com simetrias diferentes, no entanto, não chegou a propor nenhum símbolo novo. Isso foi feito por Woldemar Voigt e Paul Langevin em 1910 e 1912, respectivamente.

Uma análise das propriedades de simetria mostra que é errado identificar um quaternion puro como um vetor (polar) comum, como Gibbs e Heaviside fizeram quando desenvolveram sua álgebra vetorial e como alguns autores ainda fazem hoje em dia. Finalmente, a raiz do mal entendido entre quaternions puros e vetores comuns pode ser encontrada nos significados conflitantes atribuídos a *i, j, k* por Hamilton e Tait e no uso do mesmo símbolo para representar o que chamamos atualmente de vetores polar e axial.

No caso específico deste capítulo, o estudo histórico nos permite rever as raízes de dificuldades conceituais que permeiam o eletromagnetismo e o cálculo vetorial. No entanto, a solução para essas dificuldades não é puramente histórica: ele requer uma profunda discussão das propriedades de simetria dos dois tipos de vetores e o uso de uma nova notação.

5. DIMENSÃO DAS GRANDEZAS ELETROMAGNÉTICAS

5.1 Introdução

Atualmente os físicos utilizam dois sistemas dimensionais para tratar a teoria eletromagnética: o sistema eletrostático e o sistema eletromagnético. Os físicos também estão acostumados com a idéia de que a escolha entre os sistemas é arbitrária e se relaciona apenas com as unidades nas quais as grandezas são expressas.

No entanto, isso nem sempre foi assim. No século XIX, a maneira de encarar a análise dimensional era completamente diferente. Físicos importantes da época, como Maxwell por exemplo, achavam que a análise dimensional poderia ajudar a encontrar uma maneira de representar mecanicamente as grandezas eletromagnéticas. Essa idéia está relacionada com sua crença no caráter mecânico da natureza, isto é, Maxwell acreditava que todas as grandezas físicas, inclusive as eletromagnéticas, estavam relacionadas com propriedades mecânicas do éter. De fato, Maxwell elaborou toda sua teoria eletromagnética pressupondo a existência do éter, elaborando modelos mecânicos concretos para representar as linhas de força. Nesses modelos as grandezas eletromagnéticas eram tratadas em termos de grandezas mecânicas, como velocidade, deslocamento, energia cinética, rotação, velocidade angular, etc. Para Maxwell, o campo eletromagnético não era algo abstrato como é considerado hoje em dia, mas sim alterações mecânicas de um éter real.[280]

No final do século XVIII, François Daviet de Foncenex (1734–1799) criou o conceito de dimensionalidade das grandezas matemáticas e físicas. A primeira aplicação da análise dimensional foi publicada em 1761.[281] Esse conceito foi depois popularizado por Fourier, no seu tratado *Teoria Analítica do Calor* de 1822.[282]

---

[280] Sobre os modelos mecânicos de éter de Maxwell e de outros da época, veja o Capítulo 2 desta tese e WHITTAKER 1973, HUNT 1991 e DARRIGOL 2000.
[281] FONCENEX 1760.
[282] A história da análise dimensional ainda não foi totalmente explorada. Veja, por exemplo, os artigos DUNCAN 1949, BERNARDINI 1976, MACAGNO 1971, MARTINS 1981.

A dimensionalidade das grandezas mecânicas nunca gerou grande discussão. No entanto, no caso do eletromagnetismo, surgiram diferentes sistemas dimensionais, associados a diferentes modos de interpretar a própria natureza das grandezas eletromagnéticas.

Logo no início do seu *Treatise on Electricity and Magnetism*, Maxwell introduz a noção de dimensionalidade física. Adotando o sistema eletrostático de unidades, ele reduz todas as grandezas eletromagnéticas às dimensões mecânicas fundamentais de massa [M], comprimento [L] e tempo [T]. No capítulo 10 do segundo volume de seu livro, Maxwell analisa de modo mais geral essa questão, mostrando que as leis do eletromagnetismo não *determinam*, sozinhas, a dimensionalidade das grandezas eletromagnéticas, existindo pelo menos duas alternativas possíveis: o sistema eletrostático e o sistema eletromagnético.

Ao invés de admitir uma arbitrariedade nesse tipo de análise, diferentes autores se posicionaram defendendo uma ou outra forma de análise. Muitos físicos importantes, como Rudolf Clausius, Oliver Lodge, Joseph John Thomson, Hermann Helmholtz e outros, discutiram a questão. O debate acalorado ocorrido nas duas últimas décadas do século XIX mostrou que a discussão sobre a dimensionalidade física das grandezas eletromagnéticas estava relacionada a diferentes posições sobre a existência do éter ou de ações à distância. Além disso, para alguns autores o problema estava relacionado com a aceitação (ou não) de algumas das leis físicas do eletromagnetismo. Na transição do século XIX para o século XX, Reginald Fessenden tentou estabelecer, através de argumentos teóricos e experimentais, qual seria a *verdadeira* dimensionalidade (e natureza física) das grandezas elétricas e magnéticas[283].

A análise dimensional desenvolvida no século XIX estava preocupada em encontrar formas de descrever mecanicamente todas as grandezas físicas em termos de grandezas mecânicas, como massa, comprimento e tempo. Com o advento da teoria da relatividade, nesta mesma época, as discussões de Fessenden e outros anteriores tornaram-se sem sentido e foram abandonadas juntamente com as discussões sobre as propriedades do éter. Apesar

---

[283] FESSENDEN 1900a.

disso esse tema é importante do ponto de vista histórico pois foi debatido por vários físicos importantes da época e ainda não foi explorado pelos historiadores da ciência.

O objetivo deste capítulo é estudar alguns dos trabalhos publicados na transição entre os séculos XIX e XX (antes do desenvolvimento da teoria da relatividade) que discutiram sistemas dimensionais usados no eletromagnetismo e que tentaram relacionar as dimensões das grandezas eletromagnéticas com propriedades do éter e com a verdadeira natureza física dessas grandezas, principalmente os trabalhos de Fessenden.

5.2 Análise dimensional

As primeiras idéias sobre dimensão estão associadas com conceitos geométricos: as linhas, superfícies e volumes que teriam uma, duas e três dimensões respectivamente. Os nomes "número quadrado" e "número cúbico" são vestígios desta relação. Os expoentes de uma equação algébrica receberam também o nome de *dimensões*. Essa associação entre dimensões e os expoentes foi feita inicialmente por Descartes e seguida por muitos geômetras no século XIX. No fim do século XIX esse uso desapareceu e atualmente a palavra "dimensão" não é mais sinônimo de expoente, potência ou grau.

Foncenex conhecia o uso de dimensão como expoente e foi a partir deste conceito matemático que elaborou o conceito análogo de dimensão física. A maior contribuição de Fourier foi usar as idéias de dimensões geométricas em um contexto físico e considerando como unidades básicas comprimento, tempo e temperatura. Segundo Fourier, as equações físicas expressam relações entre quantidades físicas e portanto são independentes das unidades escolhidas, isto é, as equações são invariantes sob mudanças de unidades. A extensão de Fourier da análise dimensional geométrica para a análise dimensional aplicada à física foi tão natural que muitos autores posteriores não perceberam a diferença entre suas idéias e as idéias puramente geométricas.[284]

---

[284] MARTINS 1981.

Em 1863, Maxwell e Fleming Jenkin publicaram o *Report on the 33rd Meeting of the British Association on Standards of Electrical Resistance*. Discutem neste trabalho problemas de medidas de grandezas físicas, sistemas de unidades e dimensões. De acordo com Maxwell[285], todas as grandezas físicas poderiam ser definidas com relação a três grandezas mecânicas: comprimento [L], massa [M] e tempo [T].[286] Maxwell relacionou dimensões com sistemas de unidades no apêndice C do *Report*:

> Cada medida mencionada envolve, como fatores, apenas medidas de espaço, tempo e massa. Essas medidas entram às vezes com alguma potência e outras vezes com outras. Ao passar de um conjunto de unidades fundamentais para outro, e por outros motivos, é útil conhecer com qual potência cada uma dessas medidas fundamentais entra nas unidades derivadas. Assim o valor de uma força é diretamente proporcional ao comprimento e à massa, mas inversamente proporcional ao quadrado do tempo. Isso é expresso dizendo que as *dimensões* de uma força são LM/T^2.[287]

Seguindo o mesmo caminho acima, seria possível determinar as dimensões de todas as grandezas físicas, inclusive as eletromagnéticas. No entanto, a necessidade de apenas três grandezas (M, L, T) não era unanimidade entre os físicos da época pois ela estava relacionada com a idéia de ser possível representar as grandezas eletromagnéticas apenas em termos mecânicos, como propriedades do éter. Essa idéia, que se manteve presente na física até o advento da teoria da relatividade, foi defendida por Maxwell e seus seguidores.

Atualmente, a mecânica e a dinâmica são tratadas com três dimensões fundamentais. A teoria eletromagnética requer uma quarta dimensão no Sistema Internacional de Unidades (SI): a corrente elétrica. Para tratar a termodinâmica no SI, foi necessária a introdução da temperatura termodinâmica como nova unidade fundamental. A

---

[285] MAXWELL 1863, p. 132.

[286] O uso dos símbolos M, L, T elevados a uma certa potência entre colchetes para representar as dimensões de uma grandeza foi introduzido por Maxwell (MAXWELL 1954, Vol. 1, pp. 2-6).

[287] MAXWELL 1863, p. 132.

química analítica necessitou de uma sexta grandeza básica, a *quantidade de substância* (número de moles). O SI atual inclui uma sétima grandeza fundamental chamada *intensidade luminosa* que é necessária para a medida da luminosidade pelo olho humano. Isso significa que atualmente temos sete grandezas fundamentais no SI.[288]

Existe uma maneira formal de tratar a análise dimensional. Esse tratamento matemático da análise dimensional como uma classe de funções caracterizada por um tipo generalizado de homogeneidade não será explorado neste capítulo por não estar relacionado com o período estudado.[289]

5.3 Maxwell e as dimensões das grandezas eletromagnéticas

Para determinar as dimensões das grandezas eletromagnéticas como, por exemplo, carga elétrica, corrente elétrica, força eletromotriz, intensidade de campo magnético, entre outras, Maxwell construiu dois sistemas diferentes de dimensões: o eletrostático e o eletromagnético. Ambos são construídos em termos das dimensões mecânicas (massa, comprimento e tempo). No entanto, as dimensões das grandezas eletromagnéticas diferem, dependendo do sistema adotado.[290]

No sistema eletrostático as grandezas eletromagnéticas são determinadas a partir da determinação das dimensões da carga elétrica unitária. No sistema eletromagnético as grandezas são determinadas a partir das dimensões do pólo magnético.

De acordo com a lei de Coulomb, a força entre duas cargas elétricas é dada por $F = \frac{ee'}{r^2}$. No Sistema Internacional adicionamos uma constante a essa equação, mas é possível fazer essa constante igual à unidade. Para obter as dimensões da carga elétrica em

[288] Sobre as classes de unidades no Sistema Internacional veja PAGE 1978.
[289] Sobre o tratamento matemático da análise dimensional veja LANGHAAR 1946, DOBROT 1953, BRAND 1957.
[290] MAXWELL 1954.

termos de M, L, T, Maxwell usou as dimensões de força e de distância, determinando assim a dimensão da carga elétrica $[e]=[M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}]$.

Podemos obter a dimensão do pólo magnético através da equação da força exercida por uma corrente sobre um dos pólos de uma agulha magnética. $F = \frac{mil}{d^2}$, onde m é a intensidade do pólo, i a intensidade de corrente, l o comprimento do fio e d a distância entre o fio e o pólo. A dimensão de corrente é $[i]=[e/t]$, com isso, a dimensão do pólo magnético, no sistema eletrostático é $[m]=[M^{1/2}L^{1/2}]$.[291]

No sistema eletromagnético começa-se pela determinação das dimensões do pólo magnético a partir da lei de Coulomb para monopólos magnéticos, $F = \frac{mm'}{r^2}$, de modo que a dimensão do monopólo magnético também é $[m]=[M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}]$. Nesse caso, a partir da mesma equação acima para a força exercida por uma corrente sobre um pólo, obtém-se que a dimensão da carga elétrica é $[e]= [M^{1/2}L^{1/2}]$.

As dimensões das outras grandezas eletromagnéticas são definidas a partir da carga elétrica ou do pólo magnético. Como os dois sistemas diferem entre si sobre quais são as unidades fundamentais (carga elétrica ou monopólo magnético), as dimensões das outras grandezas também são diferentes nesses sistemas.

A figura abaixo mostra uma tabela no *Treatise* comparando as dimensões das grandezas eletromagnéticas nos dois sistemas:[292]

[291] EVERETT 1882, pp. 431-32. Em seu *Treatise on electricity and magnetism* Maxwell utilizou outros argumentos para deduzir a dimensão do pólo magnético.
[292] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 267.

626.] *Table of Dimensions.*

	Symbol.	Dimensions in Electrostatic System.	Dimensions in Electromagnetic System.
Quantity of electricity	e	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.
Line-integral of electromotive intensity	E	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$.
Quantity of magnetism Electrokinetic momentum of a circuit	m p	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.
Electric current Magnetic potential	C Ω	$[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.
Electric displacement Surface-density	$\mathfrak{D}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.
Electromotive intensity	$\mathfrak{E}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$.
Magnetic induction	$\mathfrak{B}$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.
Magnetic force	$\mathfrak{H}$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.
Strength of current at a point	$\mathfrak{C}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$	$[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.
Vector potential	$\mathfrak{A}$	$[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$	$[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Figura 5.1. Dimensões das grandezas eletromagnéticas nos sistemas eletrostático e eletromagnético de unidades.

Analisando as razões entre as dimensões da carga elétrica e do monopólo magnético no sistema eletrostático e no sistema eletromagnético, vemos que esse quociente tem sempre as dimensões de velocidade: $[e/m]=[LT^{-1}]$ no sistema eletrostático e $[m/e]=[LT^{-1}]$ no sistema eletromagnético. Como Maxwell tinha em mente que os campos eram propriedades mecânicas do éter, interpretou que essa dimensão de velocidade deveria estar associada a uma velocidade real, associada a alguma propriedade do meio eletromagnético, isto é, a alguma propriedade do éter.[293]

Esta dedução baseada em considerações dimensionais parece não ter satisfeito Maxwell pois ele buscou imediatamente outro tipo de demonstração "para mostrar que a

[293] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 413.

grandeza que estamos buscando *realmente* é uma velocidade” e “para obter uma concepção física da velocidade”.[294]

No capítulo 20 do *Treatise*, Maxwell associou esta velocidade com a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas em um meio não condutor:

> É evidente que a velocidade da luz e a razão entre as unidades são quantidades da mesma ordem de magnitude. [...] Espera-se que, por experimentos posteriores, a relação entre as magnitudes das duas grandezas possa ser determinada com maior precisão. Ao mesmo tempo nossa teoria, que afirma que essas duas grandezas são iguais e atribui uma razão física para essa igualdade, certamente não é contrariada pela comparação entre esses resultados.

A equação de propagação de uma perturbação eletromagnética em um meio não condutor é similar à equação de propagação em um sólido elástico incompressível:[295]

$$
\begin{aligned}
K\mu \frac{d^2F}{dt^2} + \nabla^2 F = 0 \\
K\mu \frac{d^2G}{dt^2} + \nabla^2 G = 0 \\
K\mu \frac{d^2H}{dt^2} + \nabla^2 H = 0
\end{aligned}
$$

onde F, G, H são as componentes do potencial vetor.

A interpretação da constante $V = \frac{1}{\sqrt{K\mu}}$ das equações acima como sendo a velocidade de propagação da luz foi uma associação entre argumentos teóricos baseados na análise dimensional e os resultados experimentais de medidas da velocidade de propagação

[294] MAXWELL 1954, pp. 413-430, grifo nosso.
[295] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 434.

da luz através do ar e do espaço interplanetário com os resultados das medidas das unidades elétricas, como mostram as tabelas abaixo.[296]

Velocidade da luz (m/s)	
Fizeau	314.000.000
Paralaxe e aberração	308.000.000
Foucault	298.360.000

Tabela 4.1. Medidas da velocidade de propagação da luz utilizadas por Maxwell

Razão das unidades elétricas (m/s)	
Weber	310.740.000
Maxwell	288.000.000
Thomson	282.000.000

Tabela 4.2. Cálculos diferentes para a razão e/m.

O próprio Maxwell admitiu que sua análise deu margem a interpretações equivocadas. Por exemplo, ao invés de manter μ e κ e usar que $n[\mu^{-1/2}\kappa^{-1/2}]$ é uma velocidade, ele conclui que uma quantidade n definida como "o número de unidades eletrostáticas em uma unidade eletromagnética [...] é uma velocidade". Como podemos ver, essa notação apresenta uma dificuldade desnecessária.[297]

A discussão de Maxwell sobre dimensões, bem como todo seu trabalho, influenciou um grande número de físicos que também discutiram a questão. Na seção seguinte, vamos analisar brevemente os trabalhos de alguns pesquisadores da época sobre o assunto.

5.4 Análise dimensional e as diferentes teorias eletromagnéticas

[296] MAXWELL 1954, vol. 2, p. 436.
[297] RÜCKER 1894.

Maxwell e alguns de seus seguidores, como J. D. Everett, J. J. Thomson, O. Lodge, A. W. Rücker, W. Williams e outros admitiam que a escolha entre os sistemas eletrostático e eletromagnético de unidades seria uma escolha arbitrária. No caso de Maxwell, podemos considerar que essa atitude é coerente com sua desistência da tentativa de encontrar um modelo mecânico específico para o éter, contentando-se com o estabelecimento da mera *possibilidade* de um modelo mecânico, através da obtenção do lagrangeano. Apesar de concordarem neste aspecto, discutiram várias questões relacionadas com as definições das grandezas eletromagnéticas e com as propriedades do meio eletromagnético.

No ano de 1882, houve um debate nas páginas da revista *Philosophical Magazine* sobre qual seria a maneira correta de determinar as dimensões do pólo magnético.[298] Não discutiremos em detalhes os artigos envolvidos, discutiremos apenas suas idéias gerais. Esse debate é a conseqüência natural dos diferentes aspectos pelos quais o assunto pode ser considerado. A discussão sobre as dimensões de um pólo magnético serve para ilustrar a divergência de pensamento entre os eletricistas britânicos sob a influência de Faraday e Maxwell e os filósofos continentais representados por Clausius. De uma maneira geral, podemos resumir a discussão como um conflito entre o ponto de vista britânico no qual o meio (éter) é reconhecido como um agente ativo e está sempre presente tanto na mente quanto nas fórmulas, e o ponto de vista continental no qual o meio é entendido como espaço vazio e assim é tratado nas fórmulas.[299]

A conexão entre *m* e *e* foi estabelecida partindo das pesquisas de Ørsted e Ampère. A unidade de corrente aplicável ao fenômeno eletromagnético não é a unidade eletrostática mas uma nova unidade que pode ser definida de várias maneiras diferentes, como por exemplo:

> [...] a unidade eletromagnética de corrente é aquela que produz uma unidade de potencial magnético em um ponto quando seu circuito subtende uma unidade de

[298] CLAUSIUS 1882, EVERETT 1882a, EVERETT 1882b, LODGE 1882, THOMSON 1882a e THOMSON 1882b.
[299] LODGE 1882, p. 357.

ângulo sólido. Também é a que produz uma unidade de intensidade magnética em uma dada direção, em um ponto no qual o ângulo sólido subtendido por seu circuito está variando em uma taxa unitária por unidade de deslocamento. E também, é a corrente que quando flui ao redor de uma área unitária é equivalente a um magneto de momento unitário."[300]

Lodge se pergunta se a definição da unidade de corrente é independente das propriedades magnéticas do meio ou é necessário introduzir um fator para expressar a influência do meio que não seja o vácuo.[301]

J. J. Thomson e outros de Cambridge consideram que isso é assunto para ser decido experimentalmente. Segundo eles, para concordar com a visão de Maxwell, o experimento deveria mostrar que o efeito magnético de um solenóide e o de um ímã são diferentes em um meio no qual μ é diferente de 1. Para Lodge, isso significa que Maxwell deveria ter feito uma distinção entre o meio dentro do solenóide (correspondente ao ímã) e o meio fora. Em sua opinião Maxwell enfatizou que solenóides artificiais poderiam ser comparados com cascas magnéticas no espaço fora da casca e que a linha de integração nunca poderia atravessar os circuitos. Lodge considera que os efeitos de ímãs e de correntes são equivalentes.[302] A escolha de μ igual ou diferente de 1 está relacionada com as propriedades do meio magnético. Se $\mu=1$, o campo magnético produzido por um circuito percorrido uma corrente elétrica seria igual ao produzido por um imã cujo eixo é normal ao plano do circuito. Sendo assim, escolher μ igual ou diferente de 1 não é uma questão arbitrária e deve ser resolvida através de experimentos.

A equação dimensional que descreve esta equivalência é $[m]=[L\mu e T^{-1}]$. Substituindo $[m/e]=[\mu^{1/2}\kappa^{-1/2}]$, obtemos $[\mu\kappa]=1/v^2$. As relações $[\mu\kappa]\equiv 1/v^2$, $[\mu e^2]\equiv[\kappa m^2]\equiv[ML]$ e $[\mu\kappa v^2]\equiv 1$ devem valer para qualquer sistema de unidades, sendo que na convenção eletrostática $[\kappa]=1$ e na convenção eletromagnética $[\mu]=1$.

---

300 LODGE 1882, p. 359.
301 LODGE 1882, p. 360.

Segundo Lodge, o efeito do meio é um fato e nenhuma teoria pode dispensar a constante μ. A teoria de Ampère dá uma interpretação a essa constante considerando que existem circuitos de corrente (molecular ou não) no campo. Cita Maxwell: "Para sermos capazes de usar o sistema de medida eletrostático ou eletromagnético devemos manter o coeficiente μ, lembrando que seu valor é a unidade no sistema eletromagnético".

Lodge desenvolveu em um dos apêndices de *Modern View of Electricity* um sistema no qual μ e κ^{-1} têm, respectivamente, dimensões de densidade $[ML^{-3}]$ e rigidez $[ML^{-1}T^{-2}]$. Com isso mostrou que as dimensões de todas as outras quantidades tornam-se únicas e passíveis de interpretações puramente dinâmicas. Por exemplo, momento magnético torna-se momento linear, indução magnética é momento linear por unidade de volume, força magnética é velocidade, força elétrica é pressão, corrente é deslocamento vezes velocidade, auto indução é "inércia por unidade de área", etc.[303]

Na mesma época, surgiram vários trabalhos propondo um sistema de dimensões único que pudesse ser testado experimentalmente e que descrevesse a natureza real das grandezas eletromagnéticas, como, por exemplo, os de Arthur Rücker.

5.4.1 Arthur Rücker

No cálculo de dimensões das grandezas físicas freqüentemente se depara com uma ou mais quantidades desconhecidas. No artigo *On the Suppressed Dimensions of Physical Quantities* de 1889, Arthur W. Rücker considerou a permissividade elétrica χ e a permeabilidade magnética μ, como constantes dimensionais fundamentais nas equações dimensionais das grandezas eletromagnéticas.[304] Neste artigo, Rücker desenvolve a idéia de que as dimensões de certas grandezas como χ e μ não devem ser suprimidas e devem aparecer explicitamente nas equações dimensionais da mesma forma que M, L, T. Quando

---

[302] LODGE 1882, pp. 361-62.
[303] WILLIAMS 1892.
[304] RÜCKER 1889.

Maxwell escreveu as equações dimensionais mostradas na figura 5.1, considerou que χ e μ são adimensionais. Neste caso, as dimensões dessas quantidades são suprimidas e as dimensões das grandezas eletromagnéticas são escritas em termos de M, L, T, a partir das equações de *e* ou *m*.

Segundo Rücker, as dimensões de unidades dependentes das unidades fundamentais não indicam sua natureza mecânica, mas são úteis para indicar se os dois lados de uma equação estão dimensionalmente corretos.

Rücker propõe a introdução de símbolos para as unidades fundamentais secundárias ao invés de suprimir suas dimensões pois, no caso das unidades elétrica e magnética, o método indica claramente a causa da diferença entre as dimensões de uma mesma quantidade em termos de M, L, T. Além disso, indica que as dimensões de quantidades diferentes no mesmo sistema que são aparentemente iguais com relação a M, L, T na realidade são diferentes se suas dimensões com relação a κ ou μ forem diferentes. Por exemplo: o deslocamento elétrico e a intensidade eletromotriz são grandezas diferentes que possuem dimensões iguais, caso a dimensão de κ seja suprimida; o mesmo ocorre com a força magnética e a indução magnética caso a unidade de μ seja suprimida. Segundo Rücker, seu método pode sugerir uma explicação para o caráter artificial das unidades elétricas e magnéticas pois, se as dimensões de κ e μ forem conhecidas, provavelmente as unidades elétrica e magnética podem ser simplificadas.[305]

Os sistemas eletrostático e eletromagnético são determinados a partir da supressão das dimensões da capacidade indutiva e da permeabilidade magnética respectivamente. Sugere que seria melhor manter os símbolos que representam essas quantidades como sendo unidades fundamentais secundárias. Com isso, teríamos as equações $[D]=[M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\kappa^{1/2}]$ e $[B]=[M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}\mu^{1/2}]$. Como $[D]=[eL^{-2}]$, a dimensão da carga elétrica seria $[e]=[M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\kappa^{1/2}]$. A dimensão da carga magnética seria obtida por $[B]=[mL^{-2}]$ e $m=[M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}\mu^{1/2}]$.

---

[305] RÜCKER 1889, p. 42.

O sistema de Rücker foi adotado por, entre outros, Gray em seu *Absolute Measurements in Electricity and Magnetism* e por Everett na última edição de *Units and Physical Constants*.[306]

5.5 O enfoque geométrico da análise dimensional

A descrição das dimensões das grandezas físicas em termos de M, L, T não considera o caráter vetorial ou escalar das grandezas. Essa questão foi discutida por S. P. Thompson e por W. Williams, no entanto ela não foi incorporada à análise dimensional usada atualmente.

Durante a discussão do trabalho de Rücker, Thompson apontou que duas grandezas completamente diferentes, como trabalho e momento de uma força têm a mesma dimensão $[ML^2T^{-2}]$. Thompson sugeriu que é preciso considerar o comprimento e a direção de uma grandeza para evitar esse tipo de problema. Propôs que a dimensão de uma grandeza vetorial seja multiplicada por $\sqrt{-1}$ para indicar seu caráter vetorial.[307] A escolha do fator $\sqrt{-1}$ é uma clara influência da teoria de quatérnions que, como vimos no capítulo 3, considera que uma grandeza vetorial obtida pela multiplicação de um escalar por um versor que representa uma multiplicação por $\sqrt{-1}$.

Williams considera as fórmulas dimensionais de uma grandeza como a expressão simbólica da natureza física desta grandeza. De uma maneira geral, as fórmulas dimensionais são úteis quando usadas no sentido numérico, mas quando estamos interessados em definir as identidades físicas das várias grandezas, as fórmulas dimensionais escritas apenas em termos de M, L, T falham e por isso Williams sugeriu que seria útil especificar a direção de cada grandeza. Williams propõe o uso de X, Y, Z no lugar de L para expressar a direção de um certo comprimento e com isso resolver o problema de grandezas diferentes com mesma dimensão. Assim, a dimensão de uma força na direção x é

[306] WILLIAMS 1892.

MXT^{-2}, a dimensão do trabalho realizado por essa força ao longo da direção *x* é MX^2T^{-2} e a dimensão de um torque no plano XZ é $MXZT^{-2}$.[308]

Atualmente consideramos que os ângulos são grandezas adimensionais, no entanto, no final do século XIX isso não era consenso. Williams atribuiu dimensão para os ângulos, por exemplo, XY^{-1} seria a dimensão do ângulo formado pelo arco X e raio Y. A dimensão de um ângulo sólido seria YZX^{-2}, onde YZ são as dimensões de uma superfície e X a dimensão do raio de uma esfera. O número π entra nas grandezas físicas de duas maneiras diferentes: pode entrar na forma puramente geométrica significando um número definido de radianos ou como um ângulo; neste caso deveria ter as dimensões do ângulo.[309]

Williams considera importante fazer uma clara distinção física entre *números puros* e *números concretos*. Cada número concreto deve ter dimensão física definida em termos de massa, comprimento e tempo. Apenas números puros podem não ter dimensão. Do ponto de vista físico, um número puro é definido como a razão entre dois números concretos do mesmo tipo. Um número puro também é chamado de tensor (adotando a nomenclatura de Hamilton). Se os números concretos corresponderem a grandezas vetoriais, a razão entre eles será um número puro apenas se as grandezas tiverem a mesma direção. Assim, a razão entre uma força na direção X com outra força na direção Y tem a dimensão $[MXT^{-2}]/[MYT^{-2}]=[XY^{-1}]$, isto é, possui a dimensão de um ângulo ou rotação, indicando que para comparar a magnitude de duas forças é necessário rodar uma em direção à outra. Assim, de uma maneira geral, a razão entre duas grandezas vetoriais do mesmo tipo é um número puro ou uma grandeza do tipo rotação, que Williams chamou de versor[310], como na teoria de quatérnions.

Normalmente representamos as dimensões de uma área e de um volume por $[L^2]$ e $[L^3]$, respectivamente. No entanto, segundo Williams, seria melhor representar as dimensões como produtos dos vetores perpendiculares X, Y, Z pois o produto de vetores

---

[307] RÜCKER 1889, pp. 37-50.
[308] WILLIAMS 1892 p. 363.
[309] WILLIAMS 1892 p. 365.
[310] WILLIAMS 1892, p. 370-71.

paralelos não pode nunca representar áreas e volumes.[311] O uso apenas do comprimento L nas dimensões de uma grandeza esconde as propriedades geométricas da grandeza física e não permite perceber a diferença entre grandezas como torque e trabalho.

Seguindo a nomenclatura de quatérnions, Williams propõe também o uso de versores quadrantais nas dimensões de uma grandeza para tornar possível a visualização ao mesmo tempo da dependência numérica e também a dependência geométrica. Por exemplo, escrevendo $X = iL$, $Y = jL$, $Z = kL$, temos

Força	MXT^{-2}	$M(iL)T^{-2}$	vetor
Trabalho	MX^2T^{-2}	$(iL)^2T^{-2}$	escalar
Torque	$MXYT^{-2}$	$MijL^2T^{-2} = MkL^2T^{-2}$	vetor

Assim, os índices M, L, T indicam a dependência numérica das grandezas com relação às unidades fundamentais, enquanto que as propriedades geométricas das grandezas são mostradas explicitamente por *i, j, k*.

Vemos claramente que Williams está utilizando idéias da álgebra de quatérnions e relacionado-as com análise dimensional. Como vimos, o cálculo de quatérnions é uma forma de visualizar geometricamente as grandezas vetoriais e a análise dimensional é uma forma de representar mecanicamente as grandezas físicas. Esse tipo de combinação não foi adotado, no entanto, pelos outros autores.

5.6 A análise dimensional e a natureza dos fenômenos eletromagnéticos

Alguns anos mais tarde, no início do século XX, a discussão sobre sistemas de unidades volta à tona com os artigos de L. G. Muaux, P. Joubin, W. Williams, Reginald Aubrey Fessenden e outros. Vamos nos concentrar nos trabalhos de Muaux e Fessenden,

[311] WILLIAMS 1892, p. 372.

pois ambos estavam preocupados em determinar qual seria o sistema dimensional mais adequado para tratar as grandezas eletromagnéticas, porém com enfoques diferentes.

Muaux propõe-se a estudar a generalização da interpretação mecânica dos fenômenos físicos através da análise dimensional.[312] Seu objetivo é encontrar um sistema que seja geral, real e racional. Segundo Muaux, cada grandeza elétrica e magnética deve possuir dimensões relacionadas com uma grandeza mecânica. Para ele, o papel mecânico atribuído a cada grandeza deve ser real e portanto possível de ser testado experimentalmente; no entanto, não sugere nenhum experimento com essa finalidade.[313] Como "sistema racional" entende que é um sistema no qual as grandezas eletromagnéticas estejam relacionadas com grandezas mecânicas e tenham as mesmas dimensões. Apesar disso, seu sistema é muito mais preocupado com as relações algébricas entre as dimensões das grandezas do que com o significado físico dessas dimensões. Muitas vezes chega a resultados que são numericamente iguais mas com significados físicos diferentes.[314]

Fessenden, por sua vez, estava interessado em conhecer a "verdadeira natureza" das grandezas eletromagnéticas através da análise dimensional e não apenas determinar as relações algébricas para essas grandezas. Estava preocupado em determinar quais as conseqüências físicas da adoção do sistema eletrostático ou do sistema eletromagnético de unidades e, a partir disso, determinar qual a teoria mais adequada para ser utilizada para tratar os fenômenos eletromagnéticos.[315] Baseou-se no trabalho de W. Williams publicado em 1892, *On the Relation of the Dimensions of Physical Quantities to Directions in Space*, no qual Williams argumenta que embora μ e κ sejam grandezas da mesma ordem, isto é, ambos são capacidades, suas dimensões não têm que necessariamente ser iguais, a menos que os fenômenos elétrico e magnético sejam fenômenos do mesmo tipo.[316] Se forem de tipos diferentes, como provavelmente são, um sendo uma deformação e o outro um movimento de rotação, então μ e κ devem ter dimensões diferentes.

[312] MAUX 1905.
[313] MUAUX 1906, p. 353.
[314] MUAUX 1906.
[315] FESSENDEN 1900a.

De um modo geral, haveria duas classes de teorias eletromagnéticas que podem ser dividas entre as que consideram a densidade virtual do éter constante em todos os meios (o que seria equivalente a tomar a permeabilidade magnética μ como a densidade do éter) e aquelas que consideram a elasticidade virtual do éter constante em todos os meios (o que seria equivalente a considerar a capacidade indutiva específica χ como sendo a densidade do éter).[317] Na primeira classe estão as teorias de Fresnel, Thomson e FitzGerald. Na segunda classe estão as teorias de Neumann, MacCullagh e Larmor.[318]

Fessenden tentou aliar argumentos teóricos com os resultados experimentais disponíveis na época para determinar qual seria a verdadeira dimensão das grandezas eletromagnéticas e, conseqüentemente, a teoria eletromagnética correta. Lembremos que as diferentes teorias estavam associadas com diferentes propriedades mecânicas do éter. Assim, seria possível também conhecer as propriedades do éter.

Fessenden estava preocupado em conhecer a verdadeira natureza das grandezas eletromagnéticas e não apenas uma relação matemática coerente entre essas grandezas. Seu objetivo era "conhecer o que a eletricidade realmente é". Ele também pensava que "essas questões também sugerem um número de experimentos possíveis para esclarecer o assunto". Achava que seria relevante saber se, por exemplo, um circuito pesa mais quando é percorrido por uma corrente, ou se a velocidade da luz é maior quando percorre o centro de um solenóide magnetizado.

Fessenden reclama que apenas o peso da autoridade tende a afirmar a impossibilidade de se determinar a dimensão absoluta e encarar a teoria das dimensões como uma questão arbitrária. J. J. Thomson, por exemplo, afirma que a dimensão de uma grandeza é arbitrária e depende do sistema adotado. Thomson também afirma que "uma teoria de dimensões não pode nos dizer o que é a eletricidade, seu objetivo é apenas nos permitir encontrar a mudança na medida numérica de uma dada carga elétrica ou nas outras

---

[316] WILLIAMS 1892.
[317] FESSENDEN 1900a, p. 3.
[318] Várias das teorias de ambas as classes foram tratadas por Heaviside no *Electromagnetic Theory*. Veja também WHITTAKER 1973 e DARRIGOL 2000.

quantidades elétricas, quando as unidades de comprimento, massa e tempo são mudadas de uma determinada maneira".[319]

No entanto, Fessenden acredita que é possível determinar qual a verdadeira natureza das grandezas físicas através de um novo ramo da matemática que poderia ser muito útil para a física, principalmente para a determinação de novos fenômenos, no qual a fórmula de uma grandeza representa a natureza íntima dessa grandeza qualquer que seja ela. Esse ramo da matemática seria chamado de "matemática qualitativa". Esse método estaria preocupado em fazer deduções baseadas na qualidade de uma entidade física enquanto que os métodos tradicionais estão preocupados com quantidades e direções.[320]

O problema se divide em duas partes: conhecer a natureza das grandezas envolvidas e também sua configuração. Se conhecermos a natureza das grandezas elétricas e magnéticas, poderemos escolher a configuração mais apropriada entre elas. O objetivo de Fessenden é mostrar que há quatro quantidades eletromagnéticas desconhecidas (quantidade de eletricidade, quantidade de magnetismo, capacidade indutiva específica e permeabilidade) mas somente três fenômenos independentes. Em seu trabalho[321] de 1895, Fessenden escreveu as três equações do eletromagnetismo envolvendo as quatro grandezas eletromagnéticas (E, B, μ e χ). Como há quatro grandezas relacionadas e apenas três equações, é possível haver um infinito número de teorias, todas de acordo com as três equações. Para contornar este problema, Fessenden introduziu uma quarta equação envolvendo uma nova variável Z, definida como a razão entre $\chi^{1/2}$ e $\mu^{1/2}$, que poderia ser qualquer combinação de M, L, T:

$$
\begin{aligned}
&Q/P=\chi^{1/2}/\mu^{1/2}\\
&QP=ML^2/T\\
&\chi^{1/2}\mu^{1/2}=T/L
\end{aligned}
\qquad (5.1)
$$

[319] FESSENDEN 1900a, p. 7.
[320] FESSENDEN 1900a, p. 7.
[321] FESSENDEN 1895.

$\chi^{1/2}/\mu^{1/2}=Z$,

onde P é a quantidade de magnetismo, Q é a quantidade de eletricidade e μ é a permeabilidade magnética e χ é a capacidade indutiva específica.

Substituindo χ e μ em termos de Z, temos

$$Q=M^{1/2}LZ^{1/2}/T^{1/2}$$
$$P=M^{1/2}L/Z^{1/2}T^{1/2}$$
$$\chi=TZ/L \tag{5.2}$$
$$\mu=T/LZ$$

As equações do eletromagnetismo são satisfeitas para qualquer escolha de Z. Isto quer dizer que há infinitas teorias possíveis para o eletromagnetismo. Para resolver o problema, Fessenden seleciona os valores de Z que poderiam ter algum sentido físico de acordo com as teorias eletromagnéticas da época.

Em seu artigo de 1892, Williams havia mostrado que haveria apenas duas soluções possíveis: ou χ é uma densidade e μ uma flexibilidade, ou χ é uma flexibilidade e μ uma densidade.[322] Além dele, P. Joubin[323] também havia analisado a maneira com que os expoentes de L, M, T χ e μ variam quando as quantidades elétrica e magnética são escritas em termos dessas grandezas e chegou também à conclusão de que χ deve ser uma flexibilidade e μ uma densidade. Joubin considerou as conseqüências para a interpretação mecânica das grandezas eletromagnéticas no sistema eletrostático e no eletromagnético. Por exemplo, no sistema eletrostático, o campo H é uma pressão (ou energia por unidade de volume); o potencial é uma tensão superficial (ou energia por unidade de superfície); etc. No sistema eletromagnético a densidade de corrente é uma velocidade angular; o campo

[322] A flexibilidade tem dimensão de inverso de pressão [LT^2/M], e a densidade seria [M/L^3].
[323] JOUBIN 1896.

magnético é uma velocidade linear; o potencial é energia por unidade de quantidade de magnetismo, etc.[324]

No entanto, segundo Fessenden, há muitos problemas com a dedução de Joubin: após chegar a doze teorias possíveis, Joubin conclui que a única aceitável é a que considera μ uma densidade, mas não apresenta nenhum razão para essa afirmação. Segundo Fessenden, pequenas mudanças no argumento de Joubin podem levar à conclusão de que χ (e não μ) é uma densidade.

Fessenden aponta, sem entrar em detalhes, que os efeitos mais promissores para encontrar-se a quarta equação são o efeito Hall, o efeito eletrostático de Kerr, o experimento de Fizeau e a rotação do plano de polarização da luz.

A seguir vamos mostrar a argumentação que Williams e Fessenden utilizaram na redução do número de teorias possíveis pela determinação de Z. Esta argumentação se baseia na hipótese de que as grandezas eletromagnéticas podem ser relacionadas com propriedades mecânicas do éter e impõe restrições sobre os possíveis índices de M, L, T. Os índices possíveis são os que têm alguma interpretação física. Z pode conter qualquer potência de M, L, T. Mas, observando as equações acima para Q, P, χ e μ, vemos que se Z não contiver M, então Q e P não podem ser grandezas semelhantes às grandezas mecânicas pois dependeriam de $M^{1/2}$ e nenhuma grandeza mecânica tem esse tipo de dimensão. Para que Q e P dependam de M na primeira potência, a potência de M em Z deve ser +1 ou –1.[325]

Williams discutiu sobre a potência de L que deve estar presente em Z. L não deve entrar nas grandezas eletromagnéticas com uma potência maior que 3 pois não há um significado físico para L^4 junto com M^1. Lembremos que L^1 é um comprimento, L^2 é uma área e L^3 é um volume. Pelas equações acima, L deve estar presente em Z com as potências 0, +2 ou –2. A capacitância ($C=\chi A/d$) de um capacitor tem a dimensão de $[\chi L]$ e a permeabilidade de um circuito magnético tem a dimensão $[\mu L]$, conclui que χ e μ não

[324] JOUBIN 1896.
[325] WILLIAMS 1892, pp. 385-88 e FESSENDEN 1900a, pp. 13-15.

podem ter a potência L^0. A capacitância e indutância são diretamente proporcionais à área da secção reta. Lembrando que χ e μ dependem de Z como mostrado nas equações acima, Fessenden Z deveria ter as potências +2 ou –2 para que χ e μ sejam proporcionais a L e a capacitância e indutância proporcionais a L^2.

Com relação ao expoente de T, pode-se argumentar que Q ou P não devem ter uma potência fracionária de T pois $[Q^2]$ e $[P^2]$ são proporcionais a T^{-2} e para isso, T deve ter índices +1 ou –1.

Para determinar os sinais dos expoentes de Z Fessenden analisa dois aspectos: As grandezas χ e μ são grandezas mecânicas; como não há nenhuma grandeza em mecânica com os expoentes de M e T iguais, exceto quando ambos são nulos, os sinais dos expoentes de M e T devem ser opostos para que M e T tenham índices com sinais opostos em χ e μ. Olhando agora para P e Q, vemos que se todos os expoentes de M e L forem positivos e T negativo, P não terá dimensão; e se todos os expoentes de M e L forem negativos e T positivo, Q não terá dimensão; portanto os expoentes de M e L devem ter sinais opostos. Sendo assim, M, L e T podem estar presentes em Z de duas formas: $M^{\pm 1}L^{\mp 2}T^{\mp 1}$, isto é, $Z=M/L^2T$ ou $Z=L^2T/M$. Substituindo Z nas equações para χ e μ vemos que χ é uma densidade e μ uma flexibilidade ou o contrário.

Para determinar quais as dimensões de χ e μ, Fessenden indica que Q/T é uma corrente e também uma medida da “gilbertância”, isto é, potencial magnético. Como μ é uma grandeza específica, Fessenden toma a gilbertância por unidade de comprimento, isto é, $Q/LT=H$. Analogamente $P/LT=F$ é a “voltividade” (potencial elétrico) por unidade de comprimento. A partir disso, Fessenden busca relações entre H e μ e F e χ.

Podemos escrever F, H, χ e μ em termos de M, L, T, Z. Atribuindo os dois valores possíveis de Z, isto é, $Z=M/L^2T$ ou $Z=L^2T/M$, nas equações (5.2) temos[326]

[326] Heaviside considera um grande número de teorias em seu livro *Electromagnetic Theory*. Considera particularmente as obtidas tomando-se $Z=M/L^2T$, o que faz com que χ seja uma densidade e μ uma flexibilidade (HEAVISIDE 1971, vol. 1, p. 254).

$F=[L/T]$	$\chi=[M/L^3]$	ou	$F=[M/LT^2]$	$\chi=[LT^2/M]$
$H=[M/LT^2]$	$\mu=[LT^2/M]$		$H=[L/T]$	$\mu=[M/L^3]$

Olhando para χ e μ vemos que quando um deles é visto como uma flexibilidade (inverso de pressão) ele terá a dimensão inversa da força correspondente. Fessenden supõe que serão, por isso, inversamente proporcionais. Com isso podemos verificar experimentalmente as relações de proporcionalidade entre a permeabilidade magnética com o potencial magnético por unidade de comprimento (intensidade magnética) e a capacitância com a tensão. Sabemos que para um capacitor a capacitância é diretamente proporcional à tensão, enquanto que para materiais ferromagnéticos a permeabilidade é inversamente proporcional ao campo magnético. Assim, restaria mostrar experimentalmente que a taxa dessa mudança é a dada pelas equações acima.

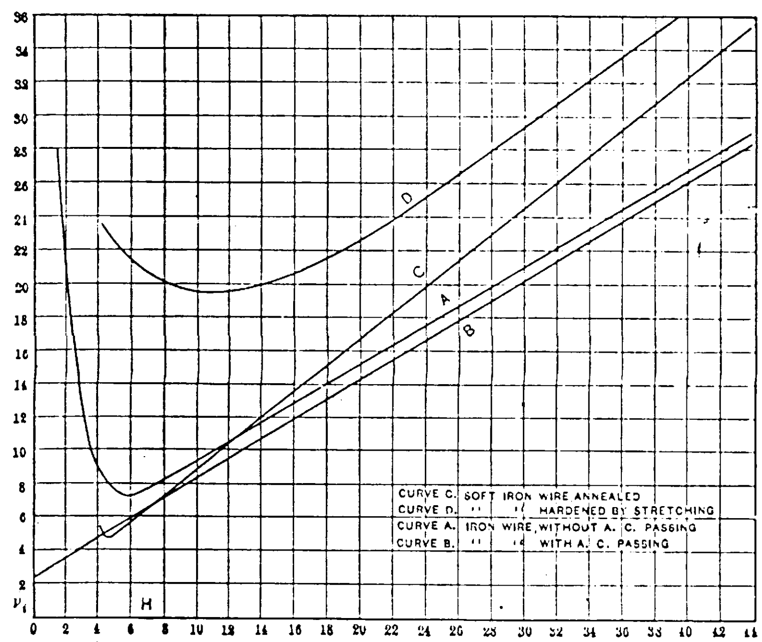

Figura 5.2. Curvas experimentais mostrando a relação entre ν (proporcional a $1/\mu$) e H.

Fessenden apresenta vários resultados experimentais de estudos da relação entre $1/\mu$ e H, como os mostrados na figura 5.2. Para valores altos de H, o gráfico é uma reta mostrando que $1/\mu$ é diretamente proporcional a H, mas para baixos valores de H essa relação se inverte. Fessenden apresentou outros experimentos para argumentar que para baixos valores de H ocorre uma sobreposição de outros fenômenos, como mostra a curva B. A próxima pergunta é saber se a relação é exata e se vale para todos os tipos de substâncias. No entanto, não havia resultados experimentais suficientes na época.

Fessenden indica que a relação entre μ e H não vale apenas para o ferro e outras substâncias fortemente ferromagnéticas, vale também para substâncias cujas relutâncias variam de 0,0003 até 1000 e por isso provavelmente é uma relação universal.[327]

Resumindo a argumentação de Fessenden:

1. Se as grandezas elétrica e magnética forem da mesma natureza que as mecânicas, então χ deve ser uma densidade e μ uma flexibilidade ou vice versa.

2. Sendo assim, χ deve ser inversamente proporcional a F ou μ deve ser inversamente proporcional a H.

3. Qualquer uma das duas grandezas, χ ou μ, que diminui quando a intensidade correspondente aumenta, deve ser uma flexibilidade.

4. χ não diminui quando F aumenta enquanto que μ diminui quando H aumenta.

5. A taxa com que μ aumenta com H está de acordo com a fórmula qualitativa.

6. Portanto, a natureza de μ é a de uma flexibilidade.

Assim, Z deve ter a dimensão de M/L^2T. Substituindo esse valor nas equações de Q, P, χ e μ obtém-se:

$Q=M/T$

$P=L^2$

$\chi=M/L^3$

$\mu=LT^2/M$[328]

[327] FESSENDEN 1900b.

[328] Atualmente as dimensões de μ também são $[LT^2/M]$ já que μ é dado em henry por metro. A unidade da permeabilidade magnética não é unanimidade, tendo sido discutida em 1957, veja KAPP 1957.

Como μ é uma flexibilidade, χ deve ser uma densidade. Fessenden cita alguns experimentos que relacionam refração com densidade de várias substâncias para mostrar que são diretamente proporcionais.

Note-se que, para chegar à sua escolha sobre a dimensionalidade das grandezas eletromagnéticas, Fessenden precisou adicionar várias condições, especialmente (1) a de que cada grandeza eletromagnética deve ter uma dimensão correspondente à de alguma grandeza mecânica conhecida, e (2) que as formulas dimensionais servem para prever relações físicas entre as grandezas – isto é, grandezas com mesma dimensionalidade dever ser diretamente proporcionais. A primeira condição é uma exigência natural para quem aceita teorias de éter; a segunda é sugerida (mas não exigida) pela análise dimensional.

5.7 Conclusão

No início do seu *Treatise on Electricity and Magnetism*, Maxwell introduz a noção de dimensionalidade das grandezas físicas. Ele reduz todas as grandezas eletromagnéticas às dimensões mecânicas fundamentais de massa [M], comprimento [L] e tempo [T] em dois sistemas dimensionais: o sistema eletromagnético e o sistema eletrostático.

Maxwell tinha em mente que os campos eram propriedades mecânicas do éter. Ao perceber que as razões entre as dimensões da carga elétrica e do monopólo magnético no sistema eletrostático e no sistema eletromagnético têm sempre as dimensões de velocidade, interpretou que essa dimensão de velocidade deveria estar associada a uma velocidade real, associada a alguma propriedade do meio eletromagnético, isto é, a alguma propriedade do éter. Isso o levou, depois, a relacionar essa razão com a velocidade das ondas eletromagnéticas.

Um dos aspectos importantes deste capítulo é que toda a discussão sobre a dimensionalidade das grandezas eletromagnéticas na época estava associada à idéia de ser possível relacionar essas grandezas com propriedades mecânicas ao éter. Apesar de Maxwell e seus seguidores concordarem que a escolha entre o sistema eletrostático e eletromagnético seria arbitrária, eles discordavam sobre várias questões relacionadas com a definição das grandezas eletromagnéticas e com as propriedades do éter associadas a essas grandezas.

No final do século XIX surgiram diferentes sistemas dimensionais associados a diferentes interpretações da natureza mecânica do eletromagnetismo. Nesta época foram publicados vários artigos na revista *Philosophical Magazine* discutindo a relação entre a dimensionalidade das grandezas eletromagnéticas e os diferentes modelos de éter.

Na mesma época, surgiram alguns trabalhos propondo um sistema de dimensões único que pudesse ser testado experimentalmente e que descrevesse a natureza real das grandezas eletromagnéticas, como, por exemplo, o de Arthur Rücker que considerou a permissividade elétrica χ e a permeabilidade magnética μ como constantes dimensionais fundamentais nas equações dimensionais das grandezas eletromagnéticas.

O fato de a descrição das dimensões das grandezas físicas em termos de M, L, T não considerar o caráter vetorial ou escalar dessas grandezas também foi discutido, mas esse aspecto não foi incorporado à análise dimensional usada hoje em dia. S. P. Thompson e W. Williams propuseram duas maneiras diferentes de especificar o caráter vetorial de algumas grandezas físicas. Thompson propôs que a dimensão de uma grandeza vetorial fosse multiplicada por $\sqrt{-1}$ para indicar seu caráter vetorial, indicando uma clara influência da teoria de quatérnions, que considera que uma grandeza vetorial é obtida pela multiplicação de um escalar por um versor dado pela unidade imaginária $\sqrt{-1}$. Williams propôs o uso de X, Y, Z no lugar de L para expressar a direção de um certo comprimento e com isso resolver o problema de grandezas diferentes com mesma dimensão.

Alguns anos mais tarde, no início do século XX, a discussão sobre sistemas de dimensões volta à tona principalmente com os artigos de Muaux e de Fessenden. Esses trabalhos se caracterizaram principalmente por buscarem uma forma de encontrar qual a verdadeira natureza das grandezas eletromagnéticas através da análise dimensional.

Segundo Muaux, cada grandeza elétrica e magnética deve possuir dimensões relacionadas com uma grandeza eletromagnética. Seu objetivo é encontrar um sistema que seja geral, real e racional. Apesar disso, seu sistema é muito mais preocupado com as relações algébricas entre as dimensões das grandezas do que com o significado físico dessas dimensões. Muitas vezes chega a resultados que são numericamente iguais mas com significados físicos diferentes.

Fessenden, por sua vez, estava preocupado em determinar quais as conseqüências físicas da adoção do sistema eletrostático ou do sistema eletromagnético de unidades e, a partir disso, determinar qual a teoria mais adequada para tratar os fenômenos eletromagnéticos e também conhecer as propriedades do éter. Para isso aliou argumentos de análise dimensional com resultados experimentais envolvendo o estudo da variação da permeabilidade com a intensidade do campo magnético em materiais ferromagnéticos. Com isso, conclui que a permeabilidade magnética corresponde ao inverso de uma pressão no éter e a capacitância elétrica corresponde a uma densidade do éter.

As discussões da época sobre dimensão das grandezas eletromagnéticas consideravam que o campo eletromagnético não era algo abstrato como é considerado hoje em dia, mas sim alterações mecânicas de um éter real e que, portanto, poderia ser possível determinar qual o verdadeiro caráter mecânico das grandezas eletromagnéticas. Com o surgimento da teoria da relatividade e conseqüente abandono de modelos baseados em um éter mecânico, essas discussões tornaram-se sem sentido e foram abandonadas juntamente com as discussões sobre as propriedades do éter.

6. O FORMALISMO QUADRIDIMENSIONAL

6.1 Introdução

No final do século XIX e início do século XX, Joseph Larmor (1857-1942), Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Henri Poincaré (1854-1912) e Albert Einstein (1879-1955) desenvolveram um novo formalismo para o eletromagnetismo, tornando-o compatível com o princípio da relatividade pela introdução das "transformações de Lorentz"[329]. As equações que descrevem fenômenos físicos (incluindo as equações de Maxwell) são covariantes sob essas transformações.

Na teoria eletromagnética relativística, o campo eletromagnético pode ser representado por um tensor quadridimensional antissimétrico $\mathbf{F_{\mu\nu}}$ de segunda ordem (μ, ν = 0, 1, 2, 3), cujas componentes estão associadas às componentes do campo elétrico **E** e da indução magnética **B**:[330]

$$\mathrm{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

As componentes desse tensor do campo eletromagnético podem ser calculadas a partir do quadrivetor potencial do campo eletromagnético[331] $\mathbf{A_\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)}$:

[329] WHITTAKER 1973 vol. 2, capítulo 2.

[330] A representação aqui utilizada assume **c** = 1 (JACKSON, *Classical electrodynamics*, p. 550; FEYNMAN et al., *Lectures on physics*, v. 2, p. 26-6). Em outros livros, pode aparecer o fator **c**. Além disso, os sinais dos elementos desse tensor podem variar dependendo das convenções utilizadas, e podem aparecer fatores multiplicados por **i**, conforme a notação adotada para a quarta coordenada relativística. Ver, por exemplo, LANDAU & LIFCHITZ, *Théorie du champ*, p. 79; MØLLER, *The theory of relativity*, p. 147.

[331] Continuamos a adotar **c**=1 (FEYNMAN et al., *Lectures on physics*, v. 2, pp. 25-6 a 25-9 e 26-5). Dependendo do sistema de unidades adotado, aparecem diferentes constantes nessas equações.

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\mu/\partial x_\nu - \partial A_\nu/\partial x_\mu \quad (6.2)$$

que permite escrever as equações de Maxwell de uma forma extremamente elegante e compacta, em quatro dimensões, utilizando o quadrivetor densidade de corrente $\mathbf{j_\mu = (\rho, j_x, j_y, j_z)}$:

$$\Box^2 A_\mu = j_\mu / \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \partial j_\mu/\partial x_\nu = 0 \quad (6.3)$$

Essa notação condensa um grande número de propriedades dos campos elétrico e magnético, tais como a transformação relativística entre esses campos, que permite, por exemplo, deduzir o campo eletromagnético de uma carga em movimento, dado seu campo (eletrostático) em repouso. O tensor incorpora as propriedades de simetria do campo elétrico e do campo magnético, já que esse tensor em quatro dimensões pode ser considerado como composto por um vetor tridimensional polar (campo elétrico) e por um pseudo-vetor (vetor axial) tridimensional ou tensor antissimétrico espacial (campo magnético).[332] Desse tensor se obtém a existência de dois invariantes do campo eletromagnético, sendo um deles um escalar ($\mathbf{B^2 - E^2 = inv}$.) e o outro um pseudo-escalar ($\mathbf{E \bullet B = inv}$.).[333]

Em geral, ao fazermos a transformação dos campos para um novo referencial, utilizamos dois referenciais S e S' cujo movimento relativo é na direção x. Nesse caso, a transformação dos campos é:

$$B'_1 = B_1 \qquad B'_2 = \gamma(B_2 + vE_3/c) \qquad B'_3 = \gamma(B_3 - vE_2/c)$$

$$E'_1 = E_1 \qquad E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3/c) \qquad E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2/c)$$

Podemos escrever essas transformações considerando uma velocidade relativa **v** qualquer entre os dois referenciais, e neste caso a equação geral é:

---

[332] Nem todos os autores chamam a atenção dos leitores para esse aspecto. O tipo de simetria dos campos elétrico e magnético é apontado por MØLLER, *The theory of relativity*, p. 147; JACKSON, *Classical electrodynamics*, pp. 248-9; LANDAU & LIFCHITZ, *Théorie du champ*, p. 79.

[333] Ver LANDAU & LIFCHITZ, *Théorie du champ*, p. 83; BECKER, *Electromagnetic fields and interactions*, p. 347.

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\frac{\mathbf{v}}{c}(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{E}) \tag{6.4}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\frac{\mathbf{v}}{c}(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B}) \tag{6.5}$$

É importante notarmos que os campos obtidos por uma transformação de Lorentz mantêm a mesma diferença em suas propriedades de simetria, isto é, o campo elétrico é um vetor polar e o campo magnético é axial.

Se, no tensor $F_{\mu\nu}$, mudarmos os sinais da segunda linha e da segunda coluna (que corresponde a uma mudança de sinal de **x**), teremos uma mudança de sinal de E_x, B_z e B_y. Isso significa que uma reflexão em um plano yz, perpendicular a x, altera o sinal de E_x mas não os de E_y e E_z (como acontece com um vetor polar). A mesma reflexão não altera o sinal de B_x, mas altera os sinais de B_y e B_z (como deve ocorrer no caso de um vetor axial).

Analisando cada termo na equação (6.4), vemos que o primeiro termo do lado direito $\gamma(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$ é um vetor polar pois é a soma de um vetor polar **E** com um produto vetorial entre um vetor polar e um axial ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$) que, como vimos no capítulo 4, é um vetor polar. O segundo termo do lado direito de (6.4) também é um vetor polar pois é o produto entre um escalar dado pelo produto escalar entre dois vetores polares (**v.E**) por uma velocidade, que é um vetor polar. Portanto, tanto **E**’ quanto **E** são vetores do mesmo tipo.

Olhando para a equação (6.5), vemos que tanto o vetor **B**’ quanto **B** são vetores axiais. O primeiro termo do lado direito é a soma de um vetor axial (**B**) com o produto vetorial entre dois vetores polares ($\mathbf{v} \times \mathbf{E}/c$) que, como vimos no capítulo 4, é um vetor axial. A quantidade entre parênteses no segundo termo do lado direito é uma grandeza pseudo-escalar pois é o produto escalar entre uma grandeza polar e uma grandeza axial (**v.B**). Sendo assim, o segundo termo do lado direito é um vetor axial pois é o produto entre um vetor polar (**v**) e uma grandeza pseudo-escalar.[334]

---

[334] Sobre as mudanças nas propriedades de simetria introduzidas pelos produtos escalar e vetorial veja SILVA & MARTINS 2002.

Esse formalismo matemático, desenvolvido no início do século XX, é considerado o mais adequado para representar a teoria eletromagnética de Maxwell sob forma relativística. Mas quais foram as etapas que levaram a esse formalismo, e quais as leis e conceitos físicos que estão por trás dele? Este é o tema que será estudado neste capítulo.

6.2 Lorentz e a eletrodinâmica dos corpos em movimento

Uma das questões estudadas pela óptica no final do século XIX e início do século XX era a relação entre a matéria comum e o éter, particularmente a detecção do movimento relativo da Terra em relação ao éter. Neste contexto Lorentz publicou vários trabalhos estudando a eletrodinâmica dos corpos em movimento.[335]

Vamos nos concentrar no artigo publicado em 1904, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less that of light*.[336] As premissas básicas deste trabalho são: as equações de campo para o éter estacionário e a força de Lorentz; a hipótese que uma translação global do sistema altera todas as forças como se elas tivessem origem eletromagnética; que um elétron em movimento se contrai longitudinalmente a uma taxa $\gamma^{-1} = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$; que todas as massas têm origem eletromagnética. A partir dessas hipóteses, Lorentz concluiu que os fenômenos ópticos não dependem do movimento de translação uniforme do sistema em qualquer ordem de v/c e também deduziu expressões para as massas longitudinal e transversal do elétron.[337]

Inicialmente Lorentz transformou as equações do campo eletromagnético de um sistema S em repouso com relação ao éter para um sistema inercial S' se movendo com **v** = v**i** com relação a S, usando as transformações de Galileu, mostrando que essas equações não mantêm a mesma forma. A seguir, viu que para manter a forma das equações invariante

[335] Não vamos discutir os esforços de Lorentz em explicar a ausência de efeitos do movimento dos corpos em relação ao éter nem sua teoria de elétrons. Para isso veja WHITTAKER 1973, MILLER 1981 e DARRIGOL 2000.
[336] LORENTZ 1952, pp. 11-34.
[337] DARRIGOL 2000, p. 362.

no novo sistema que se move com relação ao éter, seria necessário escrever as equações no novo sistema de coordenadas S' obtido através da transformação:[338]

$$x' = \beta l x,\ \ y' = l y,\ \ z' = l z,\ \ t' = t l/\beta - l\beta(v/c^2)x, \tag{6.6}$$

onde $\beta^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v^2}$ e l é uma quantidade numérica a ser determinada. Quando v = 0, o valor de l é igual a 1. Lorentz supôs que, para valores pequenos de v, ela difere da unidade em segunda ordem.[339]

A seguir mostrou que para que as equações de campo mantenham a mesma forma, as relações entre os campos, velocidades e densidades de carga devem ser:[340]

$$\begin{aligned}
&D'_x = 1/l^2 D_x,\ D'_y = \beta/l^2(D_y - v/cH_z),\ D'_z = \beta/l^2(D_z + v/cH_y),\\
&H'_x = 1/l^2 H_x,\ H'_y = \beta/l^2(H_y + v/cD_z),\ H'_z = \beta/l^2(H_z - v/cD_y),\\
&u'_{x'} = \beta^2 u_x,\ u'_{y'} = \beta u_y,\ u'_{z'} = \beta u_z,\\
&\rho' = \rho/l^3\beta.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Lorentz considerava essas transformações como uma ferramenta matemática e a interpretava apenas como uma transformação de coordenadas. Apesar de considerar que a coordenada temporal também se altera em uma mudança de referencial, Lorentz não a considerou como uma coordenada do mesmo tipo que as coordenadas espaciais e não utilizou nenhuma idéia semelhante a um "espaço-tempo". Esse enfoque foi introduzido logo depois por Poincaré.[341]

---

[338] LORENTZ 1952, p. 14.

[339] Em 1892, Lorentz havia obtido um conjunto de transformações de coordenadas ligeiramente diferente pois seguiu um caminho diferente, introduzindo um sistema de coordenadas intermediário S_r, como discute MILLER 1981, p. 27-29. A forma adotada posteriormente para essas transformações foi obtida por Poincaré.

[340] LORENTZ 1952, p. 15. Woldemar Voigt mostrou em 1887 que a equação de onda no espaço livre não se modificava sob transformações de coordenadas equivalentes às obtidas posteriormente e independentemente por Lorentz. Em 1897 Larmor obteve as mesmas transformações para as coordenadas e para os campos, mas não percebeu que essas transformações mantinham as equações de Maxwell invariantes para qualquer ordem de v/c (MILLER 1981, pp. 114-15).

6.3 As contribuições de Henri Poincaré

Henri Poincaré fez importantes contribuições para a teoria da relatividade em seu trabalho *Sur la dynamique de l'électron* publicado de forma resumida em 1905 e completamente em 1906.[342] Poincaré terminou este artigo um pouco antes do trabalho de Einstein datado de 30 de junho de 1905, publicado em setembro. Neste trabalho, Poincaré analisou as propriedades de transformação de muitas grandezas físicas, deu o tratamento completo da covariância das equações de Maxwell, introduziu quadrivetores e a tensão de Poincaré e provou o caráter de grupo das "transformações de Lorentz", introduzindo este nome e o nome "grupo de Lorentz":[343]

> A idéia de Lorentz pode ser resumida como se segue: sem modificar nenhum fenômeno aparente, se uma translação comum é imposta para todo o sistema, então as equações eletromagnéticas não são alteradas sob certas transformações, que chamaremos *transformações de Lorentz*. Dois sistemas, um imóvel e outro transladando-se, tornam-se a imagem exata um do outro.

As transformações de coordenadas utilizadas por Poincaré são[344]

$$X' = kl\,(x + \varepsilon t),\quad y' = yl,\quad z' = zl,\quad t' = kl(t + \varepsilon x), \tag{6.8}$$

onde l e ε são inicialmente descritas como duas constantes quaisquer e $k = \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

Em todo seu artigo, ε e l são constantes quaisquer a serem determinadas. Poincaré manteve a constante l com um valor qualquer, até encontrar uma justificativa para afirmar

---

[341] MILLER 1981, pp. 216-17.
[342] POINCARÉ 1906. Sobre as contribuições de Poincaré veja também os artigos GOLDBERG 1967 e CUJAV 1968.
[343] POINCARÉ 1906, p. 495.
[344] POINCARE 1906, p. 499

que *l* deveria ser igual a 1. Mostrou que apenas para $l = 1$, as equações de Maxwell são covariantes sob transformações de Lorentz.[345]

Entre as inovações de Poincaré, está a introdução de uma quarta coordenada imaginária *i*t, equivalente às três coordenadas espaciais, antecipando o trabalho de 1908 de Minkowski:[346]

> Vamos considerar x, y, z, it; δx, δy, δz, $i\delta t$; [...] como coordenadas de dois pontos em um espaço de quatro dimensões. Vemos que a transformação de Lorentz é exatamente uma rotação deste espaço em torno da origem, considerada fixa. Devemos ter também como invariantes apenas [...] as distâncias entre esses pontos e a origem ou, se preferirem, $x^2+y^2+z^2-t^2$, $x\delta x+y\delta y+z\delta z-t\delta t$, e $\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2-\delta t^2$.

Poincaré dedicou uma seção de seu trabalho para mostrar que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo, mostrando que duas transformações de Lorentz sucessivas podem ser substituídas por uma única transformação do mesmo tipo.[347] Poincaré interpretou as transformações de Lorentz como rotações ao redor da origem no espaço quadridimensional e mostrou a invariância da soma dos quadrados das coordenadas ($x^2 + y^2 + z^2 - t^2$), interpretada como uma medida de distância no espaço quadridimensional. Poincaré uniu as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes

Poincaré obteve a transformação correta para a densidade de carga e de corrente, mostrou como uma velocidade e uma aceleração se transformam e também considerou a transformação de um elemento de volume do espaço. Com isso, as equações de Maxwell são rigorosamente invariantes sob transformações de Lorentz.

Poincaré usou os invariantes do grupo de Lorentz como uma ferramenta poderosa e conveniente. Em seus cálculos do campo de um elétron acelerado, Poincaré foi o primeiro a usar a simplificação da transformação de Lorentz para o referencial em repouso da

---

[345] POINCARÉ 1906, pp. 535-36.

[346] POINCARÉ 1906, p. 542. Poincaré não utilizou o termo quadrivetor para designar este novo ente matemático.

[347] POINCARÉ 1906, pp. 513-15.

partícula. O campo do elétron foi obtido pela transformação do campo eletrostático no referencial em repouso. O campo magnético que aparece no referencial em movimento é perpendicular à velocidade e ao campo elétrico. Para generalizar esses resultados, Poincaré provou a invariância das propriedades que mantém os campos elétrico e magnético perpendiculares em uma onda eletromagnética transversal, que em notação moderna são escritas como $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$, $\mathbf{E.B} = 0$, $\mathbf{E.x} = 0$ e $\mathbf{B.x} = 0$. No formalismo de componentes usado por Poincaré essas expressões são escritas como[348]

$$
\begin{aligned}
&(\Sigma f^2 - \Sigma\alpha^2) = (\Sigma f'^2 - \Sigma\alpha'^2),\\
&\Sigma f\alpha = \Sigma f'\alpha', \qquad\qquad (6.9)\\
&\Sigma f'(x'-x'_1) = 0 \text{ e}\\
&\Sigma\alpha'(x'-x'_1) = 0
\end{aligned}
$$

Em linhas gerais, em seus trabalhos de 1905 e 1906, Poincaré mostrou que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo e que essa propriedade é necessária para descartarmos o movimento absoluto e com isso resguardar o principio da relatividade dos movimentos uniformes. Ele conseguiu unir as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes e foi o primeiro a representar a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço. Foi sobre esses princípios que Minkowsky elaborou em 1908 sua teoria de espaço-tempo.

6.4 O formalismo quadridimensional de Minkowski

Minkowski publicou dois artigos fundamentais para o desenvolvimento do formalismo quadridimensional do eletromagnetismo. Em 1908 Minkowski apresentou o artigo *Grundgleichngen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* (As

[348] POINCARÉ 1906, pp. 518-520.

equações fundamentais dos fenômenos eletromagnéticos dos corpos em movimento).[349] Neste trabalho Minkowski desenvolve seu formalismo quadridimensional na forma matricial e o aplica para mostrar que as equações da eletrodinâmica se mantêm invariantes sob transformações de Lorentz. O segundo trabalho que nos interessa, *Raum und Zeit* (Espaço e tempo), também foi publicado 1908, seis meses após o primeiro e é mais conhecido, tendo sido traduzido para o inglês. Nestes trabalhos, Minkowski aplica o formalismo quadridimensional na teoria eletromagnética utilizando o postulado da covariância das leis físicas sob transformações de Lorentz e discute aspectos geométricos associados ao novo formalismo quadridimensional. Nesta seção vamos discutir os aspectos relativos ao desenvolvimento do formalismo quadridimensional no eletromagnetismo presentes nesses dois trabalhos.

6.4.1 As transformações de Lorentz escritas no formalismo de Minkowski

Minkowski estabeleceu as bases de seu novo formalismo partindo da forma quadrática invariante $c^2t^2–x^2–y^2–z^2$, onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo.[350] As leis físicas seriam expressas com relação a um espaço quadridimensional com coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, onde x_4 é definida com uma coordenada temporal imaginaria dada por $x_4=it$.[351] As três coordenadas espaciais e a quarta coordenada temporal são modificadas por uma transformação de Lorentz. O eixo dessa quarta coordenada temporal é perpendicular aos outros três eixos espaciais.

Em seu artigo “As equações básicas dos processos eletromagnéticos dos corpos em movimento” Minkowski incorporou as idéias relativísticas de Einstein, Poincaré e Planck. Ele percebeu que as transformações de Lorentz formam um grupo e que as equações de Maxwell são covariantes em relação a este grupo. Compartilhou as idéias de Poincaré sobre

[349] MINKOWSKI 1910. Neste trabalho usaremos a reedição deste artigo na revista *Mathematische Annalen* em 1910.
[350] LORENTZ 1952, p. 77.
[351] No artigo publicado em 1910, Minkowski passou a considerar c= 1 e usar x_1,x_2, x_3, x_4, com x_4=it.

as transformações de Lorentz representarem uma rotação num espaço quadridimensional com uma coordenada imaginária. Minkowski desenvolveu e apresentou um enfoque original para as equações de Maxwell-Lorentz, a eletrodinâmica dos corpos em movimento e em um apêndice, a mecânica covariante de Lorentz.

Minkowski deu grande ênfase ao uso de funções circulares que são associadas a rotações. Essa ênfase pode ser entendida quando pensamos em seu projeto de expressar as leis da física em termos quadridimensionais já que a álgebra de vetores quadridimensionais é uma extensão natural de um vetor no espaço euclidiano com a coordenada temporal multiplicada por *i*.[352]

As equações diferenciais escritas na forma de componentes foram logo substituídas pelos quadrivetores por Minkowski como a ferramenta necessária para que as propriedades de simetria do espaço-tempo aparecessem. Minkowski defendia que a formulação quadrivetorial era necessária para tornar evidente a invariância de Lorentz das equações que também descrevem o comportamento de um campo eletromagnético no éter.

Max Von Laue publicou em 1911 o livro *Das Relativitätsprinzip*[353] que foi muito importante para divulgar as novas concepções sobre espaço-tempo de Minkowski e o formalismo quadrivetorial. Laue apresenta de uma maneira mais didática a interpretação geométrica do conceito de espaço-tempo de Minkowski.[354]

Em seu livro, Laue também discute detalhadamente a relação entre as transformações de Lorentz e rotações imaginárias[355]. De acordo com ele, do ponto de vista analítico é elegante escolher como variável temporal a grandeza imaginária[356] l = iu = ict.

[352] WALTER 1999, p. 101.
[353] LAUE 1922.
[354] LAUE 1922, pp. 72-81.
[355] LAUE 1922, pp. 81-89.
[356] Considerando um sistema com a coordenada temporal imaginária (x, y, z, l) e um sistema com a coordenada temporal real (x, y, z, u), a diferença entre eles reside no fato de que a primeira resulta em uma geometria euclidiana mas com uma das coordenadas imaginárias. A segunda resulta em uma geometria pseudo-euclidiana. A rotação imaginária e euclidiana de um ângulo φ corresponde a uma rotação real pseudo-euclidiana de um ângulo ψ (LAUE 1922, pp. 82-83)

Assim podemos associar a todos os pontos do universo um ponto imaginário do sistema x, y, z, *l*[357] de modo que

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x^2 + y^2+z^2 + l^2 \qquad (6.10)$$

Uma transformação de Lorentz é caracterizada pela invariância desta expressão.

No caso de um movimento com velocidade v na direção x, as coordenadas se transformam de acordo com a equação abaixo, onde $\beta = v/c$:

$$x' = \frac{x+i\beta l}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad l' = \frac{l-i\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \ y = y' \text{ e } z = z'. \qquad (6.11)$$

Se definirmos um ângulo φ pelas relações

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ e } \operatorname{sen}\varphi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (6.12)$$

de modo que $\tan\varphi = i\beta = i\frac{v}{c} = i\tan\psi$, as novas coordenadas x' e *l*' da equação (6.6) podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + l\operatorname{sen}\varphi \\ l' &= -x\operatorname{sen}\varphi + l\cos\varphi \end{aligned} \qquad (6.13)$$

e as transformações inversas como

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - l'\operatorname{sen}\varphi \\ l &= x'\operatorname{sen}\varphi + l'\cos\varphi \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Pelas equações (6.13) e (6.14), vemos que o sistema de coordenadas x' e *l*' é obtido a partir do sistema x e *l* por uma rotação no sentido positivo de um ângulo φ. A transformação de Lorentz é um tipo de rotação dos eixos coordenados no plano x, *l* de um ângulo imaginário φ definido pelas relações (6.12).

A velocidade se comporta da mesma maneira, isto é, sua transformação também pode ser interpretada como uma rotação. Portanto, o teorema da adição das velocidades de mesma direção é conseqüência imediata do teorema de soma das tangentes de dois ângulos.

---

[357] Minkowski usa x_1, x_2, x_3, x_4 para representar as quatro coordenadas de um quadrivetor: MINKOWSKI 1910, p. 475.

As transformações de Lorentz podem se reduzir a rotações de coordenadas espaciais nos sistemas K e K'. Uma transformação geral pode ser considerada como uma rotação imaginária no plano determinado pelos eixos *l* e *l*'.

Segundo Laue[358], é bem mais elegante do ponto de vista analítico estudar as transformações lineares do sistema de coordenadas do universo que constituem uma transformação de Lorentz de uma maneira geral. Isto significa buscar expressões gerais que mantenham a expressão $x^2 + y^2 + z^2 + l^2$ invariante e não se restringir apenas às transformações de Lorentz. No caso tridimensional, este problema corresponde ao problema de buscar uma substituição que represente uma rotação do sistema de coordenadas espaciais x, y, z, visto que são caracterizadas pela invariância de $x^2 + y^2 + z^2$.

Para termos a invariância $x^2 + y^2 + z^2 + l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + l'^2$, os coeficientes da transformação linear[359]

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1^1 x + \alpha_1^2 y + \alpha_1^3 z + \alpha_1^4 l, \\ y' &= \alpha_2^1 x + \alpha_2^2 y + \alpha_2^3 z + \alpha_2^4 l, \\ z' &= \alpha_3^1 x + \alpha_3^2 y + \alpha_3^3 z + \alpha_3^4 l, \\ l' &= \alpha_4^1 x + \alpha_4^2 y + \alpha_4^3 z + \alpha_4^4 l \end{aligned} \qquad (6.15)$$

devem obedecer às seguintes condições de ortogonalidade:

$$\sum_n \left(\alpha_n^m\right)^2 = 1 \quad m = (1,2,3,4) \qquad (6.16)$$

$$\sum_n \alpha_n^m \, \alpha_n^o = 0 \quad m, o = (1,2,3,4)$$

Combinando as expressões de (6.15), temos

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1^1 x' + \alpha_2^1 y' + \alpha_3^1 z' + \alpha_4^1 l', \\ y &= \alpha_1^2 x' + \alpha_2^2 y' + \alpha_3^2 z' + \alpha_4^2 l', \\ z &= \alpha_1^3 x' + \alpha_2^3 y' + \alpha_3^3 z' + \alpha_4^3 l', \\ l &= \alpha_1^4 x' + \alpha_2^4 y' + \alpha_3^4 z' + \alpha_4^4 l' \end{aligned} \qquad (6.17)$$

que devem obedecer às condições de ortogonalidade dadas por

---

[358] LAUE 1922, p. 84.

[359] Minkowski usa uma notação diferente para representar os coeficientes da transformação linear. Ele escreve α_{mn} (MINKOWSKI 1910, p. 483).

$$\sum_n \left(\alpha_m^n\right)^2 = 1 \quad n = (1,2,3,4) \tag{6.18}$$

$$\sum_n \alpha_m^n \alpha_m^o = 0 \quad n, o = (1,2,3,4)$$

Os coeficientes da transformação linear podem ser escritos como elementos A_m^n de uma matriz A, cujo determinante é igual à unidade. Assim, as coordenadas nos sistemas K e K' se relacionam por $Ax = A_1^1 x' + A_2^1 y' A_3^1 z' A_4^1 l'$, etc.

Para que essa transformação linear represente uma transformação de Lorentz, as condições de ortogonalidade dadas por (6.16) e (6.18) devem ser obedecidas; o elemento com índice 4 deve ser puramente imaginário enquanto que todos os outros elementos devem ser reais; o determinante da matriz e o elemento α_4^4 devem ser positivos.

Quando a velocidade está na direção x, as coordenadas x e t se transformam de acordo com a equação (6.11) enquanto que as coordenadas y e z permanecem invariantes. Neste caso particular, os coeficientes da matriz A são:

$$\alpha_2^2 = \alpha_3^3 = 1,\ \alpha_1^1 = \alpha_4^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad -\alpha_4^1 = +\alpha_1^4 = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Todos os outros coeficientes são nulos. Desta forma, os quadrivetores são invariantes por transformações de Lorentz.

6.4.2 As equações da eletrodinâmica escritas por Minkowski

No artigo de 1908, Minkowski escreveu as equações da eletrodinâmica usando o formalismo de quadrivetores, no qual considerou que as grandezas eletromagnéticas são funções de x_1, x_2, x_3, x_4. Como exemplos, definiu o vetor densidade de corrente quadridimensional e escreveu as equações de Maxwell usando o formalismo quadridimensional na forma de componentes.[360]

[360] MINKOWSKI 1910, p. 476.

Os campos elétrico (e_x, e_y, e_z) e magnético (m_x, m_y, m_z) são escritos como seis componentes de uma matriz antissimétrica 4×4, da seguinte forma:[361]

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34},$$

com

$$m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z,$$

sendo que $f_{kh} = -\ f_{hk}$. Assim, a matriz que representa o campo eletromagnético é escrita como[362]

$$f = \begin{vmatrix} 0 & m_z & -m_y & -ie_x \\ -m_z & 0 & m_x & -ie_y \\ m_y & -m_x & 0 & -ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{vmatrix} \tag{6.19}$$

Notemos que nesta definição as componentes do campo elétrico estão na última linha e na última coluna e as do campo magnético nos outros elementos não nulos da matriz 4×4. Isso implica em propriedades de simetria diferentes para ambos os vetores, sendo que, escolhidos desta forma, o vetor campo elétrico é um vetor do tipo polar e o vetor campo magnético é um vetor do tipo axial. Como vimos na seção 6.1, basta trocar os sinais da linha e da coluna referentes à coordenada *x* para perceber isso. Minkowski não usou os aspectos de simetria para explicar por qual motivo as componentes do campo elétrico e não as do campo magnético estão na coluna 4 da matriz. Ao fazer esta escolha, Minkowski está seguindo a tradição de Maxwell, sem esclarecer que, fazendo a escolha contrária, as equações continuam invariantes sob transformações de Lorentz.

Não se trata de uma questão puramente matemática, mas sim da representação de uma entidade física, o campo eletromagnético, que tem propriedades que devem estar univocamente representadas pelo formalismo matemático usado. A posição das

[361] Minkowski usa c = 1, portanto a induçao magnética é igual ao campo magnético.
[362] Minkowski usava barras paralelas para representar matriz.

componentes de uma certa grandeza física na matriz está relacionada com as propriedades de simetria desta grandeza. A grandeza cujas componentes formam uma coluna, possui a simetria de um vetor polar, enquanto que as componentes no triângulo formam uma grandeza com simetria axial. Muito provavelmente Minkowski conhecia os trabalhos de Pierre Currie e Woldemar Voigt sobre simetria das grandezas eletromagnéticas, mas não os cita.

A importância de uma discussão deste tipo está no fato de que as equações do campo eletromagnético continuariam invariantes sob transformações de Lorentz se tivessem sido escritas com as componentes do campo magnético na coluna e as componentes do campo elétrico na linha, ou seja, considerando o vetor campo elétrico como vetor axial e o campo magnético como vetor polar.

Curie já havia mostrado que essas grandezas têm simetrias relativas diferentes, isto é, se escolhemos uma como sendo polar a outra deve ser axial. Do ponto de vista puramente matemático é indiferente qual a simetria associada a cada uma delas, mas quando se deseja conhecer a natureza das grandezas físicas, esta questão é bastante importante. Curie mostrou que seriam necessários experimentos de tipos diferentes para determinar a simetria absoluta das grandezas eletromagnéticas.[363]

Minkowski escreveu as quatro equações de Maxwell para o campo eletromagnético de corpos em repouso no vácuo[364] e também na presença de matéria[365] sem usar a notação tensorial atual, mas sim uma notação matricial. Como exemplo, vamos tomar as equações para o caso do vácuo:

$$\begin{aligned}&\operatorname{curl} m - \frac{\partial e}{\partial t} = \rho v \\ &\operatorname{div} e = \rho\end{aligned}$$

Minkowski as escreveu da forma abaixo como uma maneira de ressaltar a assimetria entre seus elementos

[363] Sobre Curie e a natureza das grandezas eletromagnéticas veja o capítulo 4.
[364] MINKOWSKI 1910, p. 476-77.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4}=\rho_1\\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1}\qquad\quad +\frac{\partial f_{23}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{24}}{\partial x_4}=\rho_2\\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{32}}{\partial x_2}\qquad\quad +\frac{\partial f_{34}}{\partial x_4}=\rho_3\\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{43}}{\partial x_4}\qquad\quad =\rho_4
\end{array}
\tag{6.20}
$$

As equações:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{curl}\, e+\frac{\partial m}{\partial t}=0\\
\mathrm{div}\, m=0
\end{array}
$$

foram escritas como

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{23}}{\partial x_4}=0\\
\frac{\partial f_{43}}{\partial x_1}\qquad\quad +\frac{\partial f_{14}}{\partial x_3}+\frac{\partial f_{31}}{\partial x_4}=0\\
\frac{\partial f_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{41}}{\partial x_2}\qquad\quad +\frac{\partial f_{12}}{\partial x_4}=0\\
\frac{\partial f_{32}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial f_{21}}{\partial x_4}\qquad\quad =0
\end{array}
\tag{6.21}
$$

Esses dois conjuntos de equações podem ser escritos em uma forma mais compacta através do uso do operador lorentziano "lor" introduzido por Minkowski.[366] Esse operador é um operador diferencial escrito como uma matriz linha 1×4:[367]

---

[365] MINKOWSKI 1910, p. 487-89.
[366] MINKOWSKI 1910, pp. 504-505.
[367] Minkowski usava vírgulas entre os elementos da matriz linha.

$$\text{lor} = \left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right| \tag{6.22}$$

Minkowski escreveu a densidade de corrente e a densidade de carga como um quadrivetor dado por uma matriz linha s:

$$s = \left| \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \rho \right|$$

onde ρ não é a densidade própria de carga, e sim a densidade relativística.

Utilizando-se a matriz f, o operador lorentziano e a quadricorrente s, as equações (6.20) podem ser escritas como

$$\text{lor } f = -s \tag{6.23}$$

Para escrever as equações (6.21), Minkowski introduziu uma nova matriz f*. Esta matriz f* é a "matriz simétrica" de f, cujos elementos se relacionam com os de f de modo que $f^*_{xl} = f_{yz}$ e $f^*_{yl} = -f_{xz}$. Na realidade f* é a matriz obtida quando trocamos a posição das componentes do campo elétrico pelas do campo magnético e vice-versa, o que significa escolher uma simetria polar para o campo magnético e uma simetria axial para o campo elétrico:

$$f^* = \begin{vmatrix} 0 & e_z & -e_y & -im_x \\ -e_z & 0 & e_x & -im_y \\ e_y & -e_x & 0 & -im_z \\ im_x & im_y & im_z & 0 \end{vmatrix}$$

O produto f*f é dado por $f_{32}f_{14} + f_{13}f_{24} + f_{21}f_{34}$ multiplicado por uma matriz unitária 4×4. Utilizando f*, as equações de (6.21) também podem ser escritas como

$$\text{lor } f^* = 0. \tag{6.24}$$

Quando Minkowski escreveu o campo eletromagnético na forma da matriz dada pela equação (5.19), já tinha em mente outra propriedade física dos campos: o fato de um campo elétrico poder gerar um campo magnético, e vice-versa, quando há mudança de um referencial em repouso para um referencial em movimento. O formalismo matemático usado para descrever os campos deve permitir que haja uma "mistura" entre as componentes dos campos.

Quando se escreve o campo eletromagnético utilizando o formalismo quadridimensional, também aparecem os dois invariantes por transformações de Lorentz, que na notação de Minkowski são dados por:[368]

$$m^2 - e^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2 \text{ e}$$

$$m.e = i(f_{23}f_{14} + f_{31}f_{24} + f_{12}f_{34}),$$

onde e é a intensidade do campo elétrico m é a intensidade do campo magnético. Define também um tipo de tensor antissimétrico de segunda ordem chamado "vetor do tipo II singular".[369] Este vetor tem a propriedade de ter os invariantes acima iguais a zero, isto é, $m^2 - e^2 = 0$ e $m.e = 0$. Apesar de não ser evidente, Minkowski não mostra por que essas duas relações são invariantes e também não discute nenhum significado físico dessas invariâncias e as implicações físicas do "vetor do tipo II singular".

Atualmente, dizemos que o invariante **B.E** é um pseudo-escalar pois **E** é um vetor polar e **B** é um vetor axial, enquanto que o quadrado $(\mathbf{B.E})^2$ é um escalar puro. As duas invariâncias $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0$ e **B.E** = 0 têm um significado físico que não é óbvio e que não foi discutido com ênfase na época. A invariância da segunda expressão significa que se o campo elétrico e magnético são mutuamente perpendiculares em um referencial, isto é, **B.E**=0, então eles também são perpendiculares em outro referencial. A invariância da

---

368 MINKOWSKI 1910, p. 485.

369 As propriedades dos vetores do tipo I e do tipo II serão discutidas na próxima seção.

primeira expressão ($\mathbf{E}^2–\mathbf{B}^2=0$) mostra que se os valores absolutos de **B** e **E** são iguais em um sistema de referência, eles continuam iguais em outro. Se B>E (ou E>B) em um referencial em repouso, eles continuam obedecendo à mesma relação em um referencial em movimento[370].

Além disso, a invariância de $\mathbf{E}^2–\mathbf{B}^2$ tem um importante significado físico, no contexto de uma teoria de éter. Como vimos no capítulo 2, essa expressão é a lagrangeana de um sistema sujeito a ações elétricas e magnéticas. Maxwell interpretou a energia potencial do éter com sendo o quadrado da força elétrica, significando uma energia armazenada na forma de tensões ao longo das linhas de força. A energia cinética seria o quadrado da indução magnética e estaria relacionada com o movimento da matéria em todo o espaço onde o campo magnético não é nulo. Como a lagrangeana de um sistema é invariante sob transformações de Lorentz, é natural que $\mathbf{E}^2–\mathbf{B}^2$ também seja um invariante.

6.4.3 Vetores do tipo I e vetores do tipo II

Minkowski define dois tipos diferentes de vetores: os do tipo I e os do tipo II. As equações de Maxwell são covariantes por transformações de Lorentz quando escritas usando estes dois tipos de vetores.[371]

Os do tipo I são vetores no espaço quadridimensional (ou seja, aquilo que chamamos de quadrivetores). Um vetor espaço-tempo do tipo I se transforma de acordo com uma transformação linear homogênea descrita na equação (6.17) e pode ser escrito em termos de suas componentes como uma matriz 1×4.

$$s = |s_1, s_2, s_3, s_4|$$

Este vetor do tipo I poderia ser também uma matriz coluna 4×1. Minkowski cita como exemplo do vetor do tipo I a densidade de corrente e de carga cujas componentes $\rho_1 = \rho v_x, \rho_2 = \rho v_y, \rho_3 = \rho v_z, \rho_4 = i\rho$ se transformam sob rotações em um plano definido

[370] LANDAU 1975, p. 64.

por ρ_3 e ρ_4 da mesma maneira que sob transformações de Lorentz[372]. Em linguagem moderna, diríamos que um vetor do tipo I é um vetor polar quadridimensional.

O vetor espaço-tempo do tipo II é formado pela união de dois vetores do tipo I [w,s]:

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}.$$

O vetor do tipo II formado por essa união é representado por uma matriz 4×4 antissimétrica e tem as seguintes seis componentes f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34} dadas por

$$\begin{aligned} &w_2s_3 - w_3s_2,\ w_3s_1 - w_1s_3,\ w_1s_2 - w_2s_1, \\ &w_1s_4 - w_4s_1,\ w_2s_4 - w_4s_2,\ w_3s_4 - w_4s_3 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Nessa matriz, $f_{kh} = -f_{hk}$ e os elementos da diagonal são f_{hh} nulos. Em linguagem moderna, diríamos que essas componentes são as componentes de um tensor antissimétrico de segunda ordem. Esses vetores do tipo II são de natureza equivalente a um produto vetorial.[373] Como exemplo do tipo II, Minkowski cita o vetor eletromagnético formado por m_x, m_y, m_z, $-ie_x$, $-ie_y$, $-ie_z$ que pode ser escrito na forma matricial como

$$f = \begin{vmatrix} 0 & m_z & -m_y & -ie_x \\ -m_z & 0 & m_x & -ie_y \\ m_y & -m_x & 0 & -ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{vmatrix} \tag{6.26}$$

[371] MINKOWSKI 1910, pp. 483-86 e pp. 498-99.

[372] Mostramos na seção 6.3 que as transformações de Lorentz são equivalentes a rotações no espaço quadridimensional.

[373] MINKOWSKI 1910, p. 499. Minkowski não comenta que essa união é semelhante a um produto vetorial entre os dois vetores.

Em seus comentários sobre o artigo de Minkowski, von Laue também discute o conceito de vetores do universo[374] de Minkowski. Inicialmente define um vetor no espaço tridimensional e ressalta que há dois tipos de vetores com simetrias diferentes.[375] Em um espaço de três dimensões um vetor A é definido por três componentes A_x, A_y, A_z que se transformam de acordo com uma rotação de um sistema de referência ortogonal. Há dois tipos de vetores que diferem em suas propriedades de simetria. Um vetor polar é representado por uma linha direcionada e todo plano passando por essa linha é um plano de simetria. Um vetor axial é representado por um elemento de superfície com um sentido de rotação[376]. O plano de rotação é o plano de simetria.

Além dos vetores, Laue considera os tensores no espaço quadridimensional por analogia com as fórmulas de transformação de Lorentz com as fórmulas correspondentes para uma rotação de um sistema de três eixos coordenados em três dimensões.

Segundo Laue[377], vetores do universo são vetores escritos na base x, y, x, t que se transformam de acordo com (6.11). Esses vetores podem ter três coordenadas espaciais reais e uma imaginária ou três coordenadas espaciais imaginárias e uma coordenada temporal real.

O produto escalar entre dois vetores do universo é invariante sob transformações de Lorentz. O módulo de um vetor do universo P é dado por $|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + P_l^2}$. Sendo assim, o vetor do universo representa uma grandeza direcionada no espaço quadridimensional, sendo análogo a um vetor polar em três dimensões.

Laue[378] descreve as propriedades dos tensores usando uma notação semelhante à notação moderna. Define um tensor simétrico como uma grandeza composta por 16

---

374 Minkowski não usa o termo “vetores do universo” em seu trabalho. Laue usa este termo pois está descrevendo um vetor no espaço quadridimensional que contém os pontos e linhas do universo definidos por Minkowski.

375 LAUE 1922, pp. 90-109.

376 Grassmann associou o produto vetorial a uma superfície com um determinado sentido de rotação como positivo, veja GRASSMANN 1995, p. 88 e seção 3.10.

377 LAUE 1922, p. 91.

378 LAUE 1922, p. 109-113.

componentes com a condição de simetria $T_{jk}=T_{kj}$. Essa propriedade pode ser encontrada no produto de dois quadrivetores: $T_{jk} = \Phi_j \Phi_k$.

Laue chama de produto tensorial o produto vetorial entre dois quadrivetores. Considera que o produto vetorial entre dois vetores é um vetor[379]. Laue não considera que são entes com propriedades de simetria diferentes, embora já tivesse considerado a diferença entre vetor polar e axial anteriormente. Além disso, não discute que um tensor tetradimensional de segunda ordem é formado por um vetor axial e por um vetor polar.

Von Laue mostrou também como um vetor de seis componentes, ou seja, o vetor do tipo II de Minkowski (tensor antissimétrico de segunda ordem, em linguagem moderna) se transforma sob transformação de Lorentz. Deduziu que a matriz de transformação é dada pela matriz abaixo. A seguir, aplicou essa matriz para o caso do campo eletromagnético obtendo as mesmas equações para os campos transformados utilizadas atualmente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} \tag{6.27}$$

6.5 A ênfase nos aspectos matemáticos de Minkowski

A motivação principal do trabalho de Minkowski sobre eletrodinâmica era investigar sistematicamente as conseqüências lógicas de se assumir a validade universal da covariância de Lorentz utilizando o formalismo quadridimensional. A impressão geral

---

[379] LAUE 1922, p. 312.

causada pelo estudo do artigo de 1908 de Minkowski é que ele usou e introduziu novos conceitos sem explicá-los, pressupondo que eram de conhecimento de todos da época, o que não era o caso. Por exemplo, o formalismo quadridimensional ainda era uma novidade na época. Além disso, enfatizou os aspectos matemáticos da teoria em detrimento dos significados físicos. Por não estar muito preocupado com o significado físico das grandezas envolvidas, ignorou as diferentes simetrias das grandezas eletromagnéticas, implícita na forma como as componentes dos campo elétrico e magnético são escritas na matriz que representa o campo eletromagnético.

A ênfase nos aspectos matemático, em detrimento das interpretações físicas, pode ser melhor entendida se considerarmos que Minkowski era matemático e que passou a se interessar por física matemática após sua ida para a Universidade de Göttingen para ocupar a vaga de física matemática graças às pressões de Hilbert. Nesta época Minkowski desenvolveu seu interesse por física, escrevendo trabalhos sobre termodinâmica e mecânica, mas sua visão continua sendo matemática Em 1905 Hilbert e Minkowski organizaram seminários em Göttingen sobre as equações da eletrodinâmica. Eles usavam poderosas técnicas matemáticas para tratar a teoria do elétron. Os professores tentavam conhecer a natureza pelo uso da matemática pura sem muito interesse pelos fenômenos observáveis. Para eles não importava muito que (na época) acelerar um elétron a velocidades próximas ou maiores que a da luz não tivesse significado físico. Encaravam os problemas físicos com interesse puramente matemático e abstrato.[380]

Hilbert via o enfoque axiomático como a maneira mais apropriada para promover o desenvolvimento da matemática e da física. A discussão de Hilbert sobre os axiomas da física englobou uma grande variedade de domínios, como mecânica, matemática, eletrodinâmica, termodinâmica, cálculo de probabilidades, teoria cinética dos gases. Para tratar uma teoria, assumiu que havia axiomas específicos que caracterizavam essa teoria, sendo que esses axiomas normalmente expressavam relações matemáticas entre as propriedades das grandezas envolvidas. Hilbert tentou mostrar como expressões analíticas

[380] PYENSON 1979, p. 87.

exatas de uma função particular que condensa o conteúdo da teoria em questão poderiam ser efetivamente derivadas a partir dos axiomas específicos da teoria, junto com princípios mais gerais[381].

A aparência quase axiomática da teoria apresentada por Minkowski estava de acordo com o desejo de Hilbert de matematização da física. Para Hilbert, o maior mérito de Minkowski não foi a descoberta dos postulados, mas sim sua aplicação nas equações do eletromagnetismo para o matéria em movimento.[382]

Uma descrição do trabalho de Minkowski sobre eletrodinâmica serve também como uma descrição paralela das concepções de Hilbert. No artigo de 1908, Minkowski enfatiza o caráter axiomático da análise presente no artigo e também a dedução das equações eletrodinâmicas. O artigo de Minkowski começa com uma análise dos desenvolvimentos nas teorias do elétron e do papel do princípio da relatividade sobre essas teorias.

A segunda parte do artigo de 1908 trata dos processos eletromagnéticos na presença de matéria. Os axiomas que formam a base do trabalho são: a velocidade da matéria é sempre menor que a velocidade da luz; os campos elétrico e magnético se transformam sob transformações de Lorentz como vetores no espaço-tempo, isto é, como tensores antissimétricos de segunda ordem, portanto a densidade de corrente e a carga necessariamente se transformam como um vetor no espaço-tempo do primeiro tipo, isto é, como um vetor quadridimensional. Para Minkowski, a invariância sob transformações de Lorentz é um novo tipo de lei física que não surge da observação mas sim é uma necessidade imposta às equações que descrevem fenômenos observáveis.[383]

O novo princípio é a glória dos matemáticos, pois os resultados mais importantes seguem uma longa tradição em matemática. Considera que o tempo deve ser interpretado como um comprimento imaginário significando que o mundo é quadridimensional. Para Minkowski "os matemáticos revelaram grandes domínios por sua imaginação sem ao

[381] CORRY 1999, p. 164-66.
[382] CORRY 1999, p. 167.
[383] CORRY 1997, p. 278.

menos esperar que devessem experimentar uma existência real do mundo". Esses resultados causam uma mudança dramática na visão do mundo físico elaborada pelos matemáticos.[384]

Para alguns matemáticos, a virada do século foi um tempo de reconquista do terreno ocupado pelos físicos teóricos na última parte do século XIX. Naquela época, candidatos a postos de matemático eram avaliados por suas habilidades em física teórica e os postos de física matemática se transformaram em cadeiras de físicos teóricos. No início do século XX, pelo contrário, os matemáticos passaram a desempenhar um novo papel na construção de teorias físicas, o que foi reforçado depois pela descoberta de Einstein das equações de campo da relatividade geral. Vários matemáticos passaram a buscar na física inspiração para suas pesquisas, como Tullio Levi-Civita, Hermann Weyl, Élie Cartan, Jan Schouten e outros.[385]

6.6 A aceitação do trabalho de Minkowski

Vários contemporâneos viram no formalismo de Minkowski um novo enfoque para o princípio da relatividade. As quatro equações da eletrodinâmica escritas com o formalismo de Minkowski foram entendidas por Max von Laue e outros como um resumo de toda a eletrodinâmica.

A reformulação do formalismo vetorial e tensorial do cálculo de Minkowski e a defesa de teóricos como Sommerfeld[386] e Abraham[387], contribuíram para que o formalismo de espaço-tempo ganhasse a confiança entre os físicos da época. Além da influência de teóricos importantes da época, também havia a aparente superioridade do formalismo de espaço-tempo sobre a análise vetorial ou o método de componentes.

[384] PYENSON 1977, p. 78.
[385] WALTER 1999b, p. 77.
[386] SOMMERFELD 1910
[387] ABRAHAM 1910.

Nem todos os matemáticos relativistas concordavam com a física quadridimensional de Minkowski. Poincaré e Cunningham[388], por exemplo, preferiam o enfoque de Lorentz da eletrodinâmica dos corpos em movimento. Outros físicos, como Abraham, Born e Sommerfeld estavam convencidos que o formalismo de espaço-tempo seria superior aos métodos antigos.[389]

Algum tempo após sua estréia, o formalismo de Minkowski ganhou a preferência entre os teóricos da relatividade. Após a sua morte em 1909, físicos com habilidades matemáticas transformaram seu cálculo de matrizes em uma análise vetorial e tensorial com aplicações imediatas na teoria eletromagnética, termodinâmica, dinâmica dos gases, teoria quântica, teoria elástica, dinâmica e cinemática do corpo rígido.[390]

6.7 Einstein e o formalismo quadridimensional

O nome de Einstein é imediatamente associado à teoria da relatividade. Apesar de sua importância para o desenvolvimento da teoria, Einstein não fez grandes contribuições para o desenvolvimento do formalismo matemático usado na relatividade especial.

Seu trabalho *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* no qual expõe suas idéias sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento e sobre a importância da invariância das leis físicas sob transformações de Lorentz, foi publicado em 1905, portanto 3 anos antes que os trabalhos de Minkowski.[391] Neste trabalho, Einstein não considera o tempo como uma coordenada imaginária e utiliza o formalismo de componentes para escrever as grandezas vetoriais.

Einstein não interpretou as transformações de Lorentz como rotações no espaço quadridimensional e também não pensou que elas pudessem estar associadas a algo mais geral, como por exemplo, a existência de invariantes neste espaço. Para ele, as

[388] CUNNINGHAM 1911, p. 126.
[389] WALTER 1999, p. 108.
[390] WALTER 1999, p. 120.
[391] LORENTZ 1952, pp. 37- 65.

transformações de Lorentz eram apenas as transformações de coordenadas necessárias para que as equações de Maxwell fossem invariantes, neste sentido, eram as transformações que davam o resultado desejado.

Além disso, não discute as diferenças entre as propriedades de simetria dos campos elétrico e magnético, diferença que passa desapercebida pelo seu uso do formalismo de componentes.

Em 1908 Einstein e Laub comentaram pela primeira vez de forma escrita a teoria de Minkowski. Ambos não se impressionaram com o formalismo de Minkowski, achavam-no muito difícil e pensavam que seria possível derivar os mesmos resultados usando o formalismo vetorial para tratar as coordenadas espaciais e o tempo separadamente.[392] Notemos que, neste artigo, reescreveram as equações da eletrodinâmica de Minkowski usando a análise vetorial comum, o que já foi um avanço com relação ao artigo de 1905, escrito utilizando as componentes dos vetores.

Einstein passou a se interessar em usar formalismo quadridimensional de Minkowski na eletrodinâmica após o início de seus estudos sobre a relatividade geral, nos quais percebeu a importância do cálculo diferencial absoluto desenvolvido em 1901 por Ricci e Levi-Civita. Em seu *Manuscrito sobre a Teoria da Relatividade Especial* escrito entre 1912 e 1914, Einstein usou o formalismo quadridimensional de Minkowski na eletrodinâmica, na seção em que discute as transformações dos campos, pois este formalismo "traz uma simplificação esplêndida" para a teoria da relatividade.[393]

6.8 Minkowski e Poincaré

A discussão sobre as contribuições de Poincaré da seção 6.3 mostra que ele antecipou muitos resultados desenvolvidos posteriormente por Minkowski. Em seu artigo

[392] WALTER 1999, p. 108-109, REICH 1994, pp. 174-75.
[393] EINSTEIN 1912, p. 33.

de 1908, Minkowski não citou Poincaré, no entanto vemos que há uma enorme semelhança entre os conteúdos dos dois trabalhos.

Scott Walter sugere que Minkowski tomou como ponto de partida a seção final do *Sur la dynamique de l'électron*[394]. Walter estudou um manuscrito inédito de Minkowski de 5 de novembro de 1907, lido diante da Sociedade Matemática de Göttingen, no qual expõe sua visão sobre o principio da relatividade. Este trabalho é raramente mencionado na literatura secundária, apesar de ter um interesse particular pois representa uma exposição substancial dos pensamentos de Minkowsky sobre o princípio da relatividade antes do desenvolvimento do conceito de tempo próprio (Eingenzeit) com o qual elaborou a estrutura do espaço-tempo em termos da intersecção de trajetórias quadridimensionais de pontos (ou "linhas do mundo") e uma mecânica de Lorentz covariante. Não é claro se este texto foi escrito para ser publicado; há apenas duas cópias manuscritas com várias anotações de Minkowsky. Minkowski cita Poincaré no final desta apresentação de uma forma bastante sutil quando observa que a busca de Poincaré de uma lei covariante da gravitação envolveria considerações do grupo invariante de Lorentz.[395] Note-se que Poincaré introduziu o tempo como uma quarta dimensão exatamente na parte do seu artigo de 1906 em que tratou sobre a gravitação.

Minkowski considerou sua própria contribuição como uma melhora na notação, que passou a revelar a simetria de certas formas quadráticas e das equações do campo eletromagnético de Maxwell-Lorentz. Ele apresentou seu resultado usando uma notação com a qual o caráter covariante das equações eletromagnéticas apareceu de uma forma que nunca tinha aparecido antes. "Trago aqui a notação na qual a simetria na forma das equações torna-se extremamente transparente. Isso não foi trazido anteriormente por nenhum dos autores mencionados, nem mesmo Poincaré"[396].

Segundo Walter, Minkowski insistiu no fato de Poincaré não ter escrito as equações em termos quadridimensionais para diminuir a importância do trabalho de Poincaré e

[394] POINCARÉ 1906, pp. 538-550.
[395] WALTER 1999, pp. 97-99.
[396] MINKOWSKI 1907, p. 3, citado por WALTER 1999, p. 98.

aumentar a relevância de seu próprio trabalho. Provavelmente a decisão de Minkowski de não citar Poincaré posteriormente foi premeditada, já que ele estava a par do trabalho de Poincaré sobre a dinâmica do elétron e até o citou no apêndice sobre gravitação de 1908.[397]

Poincaré foi o primeiro a mostrar que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo e que essa propriedade é necessária para descartarmos o movimento absoluto e com isso resguardar o princípio da relatividade dos movimentos uniformes. Ele conseguiu unir as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes e foi o primeiro a representar a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço. Também foi o primeiro a usar as coordenadas quadridimensionais na relação entre o princípio da relatividade e a eletrodinâmica. Foi sobre esses princípios que Minkowsky elaborou em 1908 sua teoria de espaço-tempo. Minkowski, por outro lado, foi o primeiro a combinar todos esses elementos em uma nova concepção do espaço quadridimensional de espaço-tempo e a representar o campo eletromagnético como uma grandeza de 6 componentes.

6.9 A relatividade especial na forma de quatérnions

Em 1911, as operações com quadrivetores e tensores passaram a ocupar as páginas da revista *Annalen der Physik*, surgindo, entre outros, dois artigos de Sommerfeld.[398] Tivemos a possibilidade de notar através de uma pesquisa no *Physics Abstract* entre 1908 e 1925, que em 1912 este formalismo havia se tornado o padrão para as pesquisas em relatividade. Apesar disso, foram escritos vários artigos e livros usando uma mistura dos formalismos de componentes, vetorial e de quatérnions. No *Physics Abstract* identificamos os seguintes trabalhos:

---

[397] MINKOWSKI 1910, p. 522.
[398] SOMMERFELD 1910a e SOMMERFELD 1910b.

CONWAY, A. W. Quaternions applied to electrical theory. *Royal Irish Academy Proceedings* **29:** 1-9, 1911;

CUNNINGHAM, E. The application of the mathematical theory of relativity to the electron theory of matter. *Proceedings of the London Mathematical Society* **10:** 116-127, 1911;

FLINT, H. T. Applications of quaternions to the theory of relativity. *Philosophical Magazine* **39:** 439-449, 1920;

FLINT, H. T. Quaternionic treatment of relativistic dynamics *Philosophical Magazine* **39:** 439-449, 1920;

FLINT, H. T. Relativity vector analysis. *Philosophical Magazine* **41:** 389-404, 1921;

JOHNSTON, W. J. Symbolic calculus for electromagnetic relativity. *Proceedings of Royal Society of London* **96:** 334-363, 1919;

LEWIS, G. N. On four dimensional vector analysis, and its application in electrical theory. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences* **46:** 165-181, 1910;

MACAULAY, A. Quaternions applied to physics in non Euclidean space. *Proceedings of the Royal Society of Tasmania* **12:** 1-19, 1914;

SILBERSTEIN, L. Quaternionic form of relativity. *Philosophical Magazine* **23:** 790-809, 1912;

SILBERSTEIN, L. Second memoir on quaternionic relativity. *Philosophical Magazine* **25:** 135-144, 1913.

Entre os livros publicados na época usando outros formalismos citamos

CUNNINGHAM, E. *The principle of relativity*. Cambridge University Press: Cambridge, 1914;

SILBERSTEIN, L. *The theory of relativity*. Macmillan, London, 1914.

6.10 Os artigos de Silberstein

Nesta seção vamos analisar em detalhes dois trabalhos de Ludwig Silberstein publicados em 1912 e 1913 nos quais os resultados da teoria da relatividade especial são derivados através do uso do formalismo de quatérnions.

Silberstein parte da interpretação de Hamilton de um quatérnion visto como um operador que produz rotações e com isso chega às transformações de Lorentz, que também podem ser interpretadas como rotações. Cayley havia mostrado em 1854 que rotações puras no espaço quadridimensional podem ser realizadas por um par de quatérnions de módulo unitário aplicados a um outro quatérnion, isto é, q'=QqQ. Uma transformação de Lorentz no espaço-tempo corresponde a uma "rotação" de um referencial (*x, y, z, t*) para outro (*x', y', z', t'*). Daí a idéia de Silberstein de representar uma transformação de Lorentz utilizando o formalismo de quatérnions.

Vamos reproduzir aqui as idéias de Silberstein. Inicialmente vamos supor que a velocidade de um sistema S' com relação a outro sistema S seja dada por $\mathbf{v}=v\mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é um vetor unitário na direção do movimento de S' com relação a S e v seja o módulo da velocidade. O e O' são um par de pontos coincidentes de S e S' quando t = t'= 0. Usando a notação de Silberstein, na qual $(\mathbf{ru})$ significa o produto escalar[399] entre os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{u}$, as fórmulas de transformação de um vetor de um sistema para outro são:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)(\mathbf{ru})\mathbf{u} + i\beta\gamma l\mathbf{u} \tag{6.28}$$
$$l' = \gamma[l - i\beta(\mathbf{ru})],$$

onde $l = i\text{c}t$, $\beta = v/\text{c}<1$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Para obter a representação na forma de quatérnions da transformação (6.28), vamos introduzir os quatérnions q e q' que representam as coordenadas espaciais e temporais. Note-se que a parte escalar do quatérnion é imaginária, portanto não são quatérnions do mesmo tipo que os de Hamilton:

[399] Na notação de quaternions usada por Hamilton, o produto escalar entre dois vetores **r** e **u** é indicado por S**ru**.

$$q = \mathbf{r} + l = \mathbf{r} + ict \qquad (6.29)$$
$$q' = \mathbf{r'} + l' = \mathbf{r'} + ict'$$

Portanto o problema é encontrar um quatérnion Q que transforme q em q', de tal modo que

$$\mathbf{r'} + l' = Q(\mathbf{r} + l)Q.$$

Escrevendo este quatérnion desconhecido como $Q = \mathbf{w} + s$ e desenvolvendo o produto qQ de acordo com as regras do produto entre quatérnions vistas no capítulo 3, como $\mathbf{rw} = V\mathbf{rw} - S\mathbf{rw}$, temos

$$qQ = V\mathbf{rw} + l\mathbf{w} + s\mathbf{r} - (\mathbf{rw}) + sl.$$

Da mesma forma, temos

$$q' = QqQ = V\mathbf{w}V\mathbf{rw} - \mathbf{w}(\mathbf{rw}) + 2sl\mathbf{w} + s^2\mathbf{r} - 2s(\mathbf{wr}) + (s^2 - w^2)l = (w^2 + s^2)\mathbf{r} - 2(\mathbf{rw})\mathbf{w} + 2sl\mathbf{w} + (s^2 - w^2)l - 2s(\mathbf{rw}).$$

Separando este produto em suas partes vetorial e escalar, temos

$$\mathbf{r'} = (w^2 + s^2)\mathbf{r} - 2(\mathbf{rw})\mathbf{w} + 2sl\mathbf{w} \qquad (6.30)$$
$$l' = (s^2 - w^2)l - 2s(\mathbf{rw}).$$

Comparando (6.30) com (6.28), vemos que as seguintes condições devem ser obedecidas por **w** e s.

$w^2 + s^2 = 1$; $s^2 - w^2 = \gamma$; $2sw = i\beta\gamma$; $\mathbf{w} = w\mathbf{u}$.

Portanto, $w = \pm\sqrt{(1-\gamma)/2}$, $s = \pm\sqrt{(1+\gamma)/2}$; além disso, para que a terceira condição acima seja satisfeita, w e s devem ter os mesmos sinais. Como Q aparece duas vezes em q' = QqQ, a escolha do sinal é indiferente. Portanto, a expressão da transformação relativística na forma de quatérnion é

$$q' = QqQ, \text{ com}$$
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\gamma} + \mathbf{u}\sqrt{1-\gamma}) \tag{6.31}$$

sendo que **u** é um vetor unitário na direção do movimento de S' com relação a S. Como $\gamma >$ 1, a parte vetorial de Q é imaginária e a parte escalar é real. O tensor (módulo, em linguagem atual) de Q é igual a 1. Assim, denotando seu ângulo por α, isto é, escrevendo

$$Q = \cos\alpha + \mathbf{u}\ \mathrm{sen}\alpha = e^{\alpha\mathbf{u}},$$

temos $\cos\alpha = \sqrt{(1+\gamma)/2}$ e $\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{(1-\gamma)/2}$. Portanto,

$$\mathrm{sen}\,2\alpha = \sqrt{1-\gamma^2} = i\beta\gamma = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ou

$$2\alpha = \mathrm{arctg}(i\beta) = \mathrm{arctg}\left(i\frac{v}{c}\right).$$

Esse ângulo é exatamente o ângulo imaginário de rotação no plano x, t do mundo quadridimensional de Minkowski descrito na seção 6.4.1.

Silberstein considera a fórmula que reune esses dois quatérnions, $\omega = Q[\ ]Q$, como um operador que converte o quatérnion $q = \mathbf{r} + ict$ em seu correspondente relativístico q'. Qualquer quatérnion covariante é chamado de "quatérnion físico", sendo o equivalente ao "vetor espaço-tempo do primeiro tipo" de Minkowski ou "vetor do universo" de von Laue ou ao quadrivetor *x, y, z, l* de Sommerfeld. Como exemplo de um quatérnion físico, ele cita a quadricorrente, também chamada de quatérnion-corrente.

$$\mathbf{C} = \tilde{n}\left(\mathrm{i} + \frac{1}{\mathrm{c}}\mathbf{p}\right) = \mathrm{i}\tilde{n}\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{d}l}, \tag{6.32}$$

onde ρ significa a densidade de volume de eletricidade e $\mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}l}$ a velocidade de seu movimento com relação a um referencial S. Como as cargas contidas em um volume em S ou em S' são iguais, d*l*/ρ é um invariante sob transformações de Lorentz e a densidade de corrente **C** é uma grandeza covariante.

A transformação q'=QqQ pode ser aplicada não apenas a grandezas representatadas por um quatérnion físico, mas também a operadores como, por exemplo, o operador diferencial equivalente à matriz de Minkowski, chamado de operador "lor" que é simplesmente o operador ∇ de Hamilton somado à diferencial escalar ∂/∂*l*. Silberstein utiliza o símbolo D para representar esse operador:

$$\mathrm{D} = \frac{\partial}{\partial l} + \nabla = \frac{\partial}{\partial l} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{6.33}$$

Comparando o operador D com um quatérnion q = *l* + ix + jy + kz, vemos que D se transforma da mesma maneira, isto é, D' = QDQ, portanto D também é um quatérnion físico.

6.10.1 As equações eletromagnéticas no vácuo na forma de quatérnions

Vamos agora considerar as equações eletromagnéticas para o vácuo. Seguindo a notação de Silberstein, as equações de Maxwell na forma diferencial são

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{p} = c.\text{curl}\, \mathbf{M}, \qquad \text{div}\, \mathbf{E} = \rho$$
$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -c.\text{curl}\, \mathbf{E}, \qquad \text{div}\, \mathbf{M} = 0 \tag{6.34}$$

onde **E** e **M** são os vetores do campo elétrico e magnético, ρ a densidade volumétrica de carga e **p** é o vetor velocidade da carga.

Para escrever as equações na forma de quatérnions, Silberstein começa escrevendo o "bivetor eletromagnético" ou "bivetor do campo": **F** = **M** – i**E**. Como o rotacional e o divergente obedecem à propriedade distributiva, as quatro equações acima podem ser escritas como duas:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial l} + \text{curl}\, \mathbf{F} = \frac{1}{c}\rho \mathbf{p}, \qquad \text{div}\, \mathbf{F} = -i\rho$$

ou usando a notação de Hamilton,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial l} + V\nabla \mathbf{F} = \frac{1}{c}\rho \mathbf{p}, \qquad S\nabla \mathbf{F} = i\rho \qquad .$$

Lembrando que V∇**F** + S∇**F** = ∇**F** e usando o operador D mostrado na equação (6.33), as duas equações do bivetor eletromagnético podem ser condensadas como uma única equação na forma de quatérnions:

$$\left(\frac{\partial}{\partial l} + \nabla\right)\left(\mathrm{M} - i\mathrm{E}\right) = \rho\left(i + \frac{1}{c}\mathbf{p}\right) \;\rightarrow\; \mathrm{D}\mathbf{F} = \mathbf{C} \tag{6.35}$$

onde **C** é o quatérnion-corrente definido em (6.32). As equações (6.34) podem ser recuperadas separando as partes real e imaginária de (6.35) e depois a parte escalar e vetorial.

A seguir Silberstein mostra como obter a transformação relativística dos campos elétrico e magnético utilizando o formalismo de quatérnions. A equação (6.35) exprime as leis dos fenômenos eletromagnéticos em um sistema S. Pelo princípio da relatividade, essa equação deve ser invariante sob uma transformação de Lorentz, isto é,

$D'\mathbf{F'} = \mathbf{C}'$ (6.36)

Silberstein deseja conhecer como os campos **F** e **F**' estão relacionados. Para isso, utiliza Q[ ]Q como o operador que promove a transformação de um sistema para outro (6.31) e utiliza o quatérnion conjugado Q_c que obedece à propriedade $Q_cQ=1$. Aplicando esses dois conceitos na equação (6.36), temos

$QDQ\mathbf{F'} = Q\mathbf{C}Q.$

Multiplicando ambos os lados por Q_c, temos

$Q_cQDQ\mathbf{F'} = Q_cQ\mathbf{C}Q.$

Considerando que $Q_cQ=1$, temos

$DQ\mathbf{F'} = \mathbf{C}Q = D\mathbf{F}Q$

e finalmente

$Q\mathbf{F'} = \mathbf{F}Q$

ou

$\mathbf{F'} = Q_c\mathbf{F}Q$

Utilizando a expressão dada por (6.31) para Q temos

$\mathbf{F'} = (1 - \gamma)(\mathbf{Fu})\mathbf{u} + \gamma\mathbf{F} + i\beta\gamma V\mathbf{Fu},$

substituindo $\mathbf{F} = \mathbf{M} - i\mathbf{E}$ e separando a parte real da imaginária desta expressão, temos

$\mathbf{E'} = (1 - \gamma)(\mathbf{Eu})\mathbf{u} + \gamma\mathbf{E} + \beta\gamma V\mathbf{uM}$ (6.37)

$\mathbf{M'} = (1 - \gamma)(\mathbf{Mu})\mathbf{u} + \gamma\mathbf{M} - \beta\gamma V\mathbf{uE}.$

Supondo que **u** seja a direção de movimento, essas equações têm as componentes

$E_1' = E_1 \qquad M_1' = M_1$

$E_2' = \gamma(E_2 - \beta M_3) \qquad M_2' = \gamma(M_2 + \beta E_3)$

$E_3' = \gamma(E_3 + \beta M_2) \qquad M_3' = \gamma(M_3 - \beta E_2).$

que são as conhecidas fórmulas de transformação obtidas por Lorentz.

Silberstein também mostra a existência de dois invariantes do campo eletromagnético. Como Q e Q_c são quatérnions de módulo unitário, os módulos de **F'** e de **F** também são iguais, logo

$$\mathbf{F}'^2 = \mathbf{F}^2 = M^2 - E^2 - 2i(\mathbf{EM}). \tag{6.38}$$

Vemos que (6.38) contém os dois invariantes de Minkowski ($M^2 - E^2$) e (**EM**).

A simplificação introduzida por Silberstein é mais compacta do que a forma matricial de Minkowski, discutida no capítulo anterior, que consiste nas duas equações lor f = – s para o primeiro par de (6.34) e lor f* = 0 para o segundo par de (6.34), como mostrado na seção 6.4.2. Da mesma forma que Minkowski, Silberstein também não discute as propriedades de simetria das grandezas eletromagnéticas. Além disso, em seu formalismo não é possível perceber facilmente que essas grandezas têm propriedades de simetria diferentes pois o mesmo tipo de símbolo (letras maiúsculas em negrito) é usado para representá-las, e elas aparecem reunidas em **F** = **M**–i**E,** o que pareceria uma indicação de que são grandezas da mesma natureza.

6.11 Conclusão

No final do século XIX uma das questões estudadas pelos físicos era a eletrodinâmica dos corpos em movimento. Em 1904 Lorentz concluiu que os fenômenos ópticos não dependem do movimento de translação em qualquer ordem em v/c. Mostrou também que as equações do campo eletromagnético escritas em um sistema S em repouso com relação ao éter mantêm sua forma invariante quando escritas em um sistema inercial S' movendo-se com **v** = v**i** com relação a S, se as coordenadas no novo sistema se transformarem como

$x' = \beta l x$, $y' = l y$, $z' = l z$, $t' = t l/\beta - l\beta(v/c^2)x$,

onde $\beta^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v^2}$ e l é uma quantidade numérica a ser determinada, cujo valor igual a 1 corresponde a v = 0 e que para valores pequenos de v, difere da unidade em segunda ordem. Com essas transformações de coordenadas, mostrou também quais seriam as transformações entre os campo, velocidades e densidades de cargas de S para S':

$D'_x = 1/l^2 D_x$, $D'_y = \beta/l^2(D_y - v/cH_z)$, $D'_z = \beta/l^2(D_z + v/cH_y)$,
$H'_x = 1/l^2 H_x$, $H'_y = \beta/l^2(H_y + v/cD_z)$, $H'_z = \beta/l^2(H_z - v/cD_y)$,
$u'_{x'} = \beta^2 u_x$, $u'_{y'} = \beta u_y$, $u'_{z'} = \beta u_z$,
$\rho' = \rho/l^3\beta$.

Lorentz não utilizou o formalismo vetorial em seu trabalho (utilizava o formalismo de componentes cartesianas). Apesar de considerar que a coordenada temporal também se altera em uma mudança de referencial, Lorentz não a considerou como uma coordenada do mesmo tipo que as coordenadas espaciais e não utilizou nenhuma idéia semelhante a um "espaço-tempo". Esse enfoque foi introduzido na mesma época por Poincaré.

Em seu artigo publicado em 1905, Poincaré analisou as propriedades de transformação de muitas grandezas físicas, deu o tratamento completo da covariância das equações de Maxwell, introduziu quadrivetores e a tensão de Poincaré e provou o caráter de grupo das "transformações de Lorentz", introduzindo este nome e o nome "grupo de Lorentz". Entre as inovações de Poincaré, está a introdução de uma quarta coordenadas imaginária it e a interpretação desta coordenada como sendo equivalente às três coordenadas espaciais.

Em linhas gerais, em seus trabalhos de 1905 e 1906, Poincaré mostrou que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo e que essa propriedade é necessária para descartarmos o movimento absoluto e com isso resguardarmos o princípio da relatividade dos movimentos uniformes. Ele conseguiu unir as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes e foi o primeiro a representar a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço. Foi sobre esses princípios que Minkowsky elaborou em 1908 sua teoria de espaço-tempo.

Em 1908 Minkowski publicou dois artigos fundamentais para o desenvolvimento do formalismo quadridimensional do eletromagnetismo. Nestes artigos Minkowski desenvolveu seu formalismo quadridimensional na forma matricial e o aplicou para mostrar que as equações da eletrodinâmica se mantêm invariantes sob transformações de Lorentz. Além disso, discutiu aspectos geométricos associados ao novo formalismo quadridimensional.

Minkowski estabeleceu as bases de seu novo formalismo partindo da forma quadrática invariante $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo. As leis físicas seriam expressas com relação a um espaço quadridimensional com coordenas x_1,x_2, x_3, x_4, onde x_4 é definida com uma coordenada temporal imaginaria dada por x_4=it. As três coordenadas espaciais e uma quarta coordenada temporal são modificadas por uma transformação de Lorentz. Essa quarta coordenada temporal é uma coordenada imaginária e seu eixo é perpendicular aos outros três eixos espaciais.

Minkowski desenvolveu e apresentou um enfoque original para as equações da eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz. As equações diferenciais escritas na forma de componentes foram logo substituídas pelos quadrivetores por Minkowski. Ele defendia que a formulação quadrivetorial era necessária para tornar evidente a invariância de Lorentz das equações do campo eletromagnético.

Escreveu as equações da eletrodinâmica usando o formalismo de quadrivetores, no qual considerou que as grandezas eletromagnéticas são funções de x_1, x_2, x_3, x_4. Como exemplo, escreveu as equações de Maxwell. A matriz que representa o campo eletromagnético é escrita como

$$f = \begin{vmatrix} 0 & m_z & -m_y & -ie_x \\ -m_z & 0 & m_x & -ie_y \\ m_y & -m_x & 0 & -ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{vmatrix}$$

A forma que Minkowski escolheu para representar matricialmente o campo eletromagnético tem importantes implicações físicas que não foram discutidas por ele e que atualmente também são pouco discutidas. Nesta definição as componentes do campo elétrico estão na última linha e na última coluna e as do campo magnético nos outros elementos não nulos de uma matriz 4×4. Isso implica em propriedades de simetria diferentes para ambos os vetores, sendo que, escolhidos desta forma, o vetor campo elétrico é um vetor do tipo polar e o vetor campo magnético é um vetor do tipo axial. Ao fazer esta escolha, Minkowski está seguindo a tradição de Maxwell, sem discutir que fazendo a escolha contrária, as equações continuam invariantes sob transformações de Lorentz.

Curie já havia mostrado que essas grandezas têm simetrias relativas diferentes, isto é, se escolhemos uma como sendo polar a outra deve ser axial. Do ponto de vista puramente matemático é indiferente qual a simetria associada a cada uma delas, mas quando se deseja conhecer a natureza das grandezas físicas, esta questão é bastante importante.

Minkowski escreveu as quatro equações de Maxwell para o campo eletromagnético de corpos em repouso no vácuo e também na presença de matéria sem usar a notação tensorial atual, mas sim uma notação matricial. Como exemplo, as equações para o caso do vácuo são

$$\text{lor } f = -s$$
$$\text{lor } f^* = 0.$$

O fato de um campo elétrico poder gerar um campo magnético, e vice-versa, quando há mudança de um referencial em repouso para um referencial em movimento também é contemplado com o formalismo desenvolvido por Minkowski. A maneira que Minkowski escreveu a matriz do campo eletromagnético permite que haja uma “mistura” entre as componentes dos campos quando há uma mudança de um referencial em repouso para outro em movimento.

De uma maneira geral, Minkowski enfatizou os aspectos matemáticos do novo formalismo e não se preocupou em discutir as conseqüências físicas da adoção de tal formalismo. Não se trata de uma questão puramente matemática, mas sim da representação de uma entidade física, o campo eletromagnético, que tem propriedades que devem estar univocamente representadas pelo formalismo matemático usado.

Apesar de Einstein ter sido muito importante para o desenvolvimento da teoria da relatividade, ele não contribuiu para o desenvolvimento do formalismo matemático utilizado na teoria. Quando escreveu seu artigo de 1905 sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, o formalismo quadridimensional de Minkowski ainda não tinha sido inventado, mas o formalismo vetorial já era usado por vários físicos da época. Neste trabalho, Einstein utilizou o formalismo de componentes que dificulta bastante percebermos as propriedades de simetria dos campos que também não foram discutidas por ele. Além disso, não considerou o tempo como uma coordenada imaginária e não interpretou as transformações de Lorentz como rotações no espaço quadridimensional.

O formalismo quadridimensional passou a ser amplamente usado e é usado até os dias atuais. Apesar de seu enorme sucesso, este não era o único formalismo explorado pelos físicos da época para tratar a teoria eletromagnética. Entre 1910 e 1920, foram escritos vários trabalhos sobre teoria da relatividade utilizando o formalismo de quatérnions. Como exemplo, as equações de Maxwell na forma invariante escritas por Silberstein utilizando o formalismo de quatérnions pode ser compactada em apenas uma equação: $D\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Em seus trabalhos Silberstein também não discute as propriedades de simetria dos campos e com o formalismo de quatérnions é mais difícil perceber tais propriedades do que pelo uso do formalismo tensorial.

7. CONCLUSÃO

Nesta tese estudamos o desenvolvimento paralelo dos conceitos físicos e do formalismo matemático utilizado para descrever os fenômenos eletromagnéticos entre o fim do século XIX e início do século XX.

A física do século XIX tinha uma grande preocupação em interpretar mecanicamente os fenômenos e por isso foram construídos modelos mecânicos para descrever os fenômenos eletromagnéticos. Esses modelos foram baseados em analogias com fluxo de calor a partir do trabalho de Fourier, em modelos hidrodinâmicos e em modelos de meio elásticos desenvolvidos por Stokes, Thomson, Green e outros. O uso de analogias por Thomson e Maxwell foi importante para o desenvolvimento do eletromagnetismo pois mostrou que há uma semelhança entre as equações dos fenômenos utilizados e as equações dos fenômenos eletromagnéticos. A partir dessa semelhança matemática, ambos passaram a interpretar os fenômenos eletromagnéticos como fisicamente análogos a esses outros fenômenos físicos.

Em seus primeiros trabalhos Maxwell explorou analogias com a condução de calor, escoamento de um fluido em um meio resistivo, deslocamentos em um sólido elástico e movimento de vórtices mecânicos. Ao sistematizar sua teoria na obra *Treatise on electricity and magnetism*, Maxwell preferiu utilizar o enfoque lagrangeano para não precisar se ater a nenhum modelo mecânico em particular. Considerou que se podemos escrever a lagrangeana de um problema significa que é possível construir um modelo mecânico. Cerca de 24 anos depois, Poincaré mostrou que sempre que podemos escrever uma lagrangeana, podemos ter infinitos modelos mecânicos que descrevem igualmente bem os fenômenos observados. Sendo assim, o fato de existir a lagrangeana implica na possibilidade de elaborarmos explicações mecânicas para os fenômenos eletromagnéticos.

O formalismo matemático usado por eles era o formalismo de componentes cartesianas (o formalismo vetorial ainda não existia) junto com um amplo uso da idéia de operadores diferenciais (sem esse nome) que apareciam na forma de derivadas parciais com relação ao tempo e às coordenadas espaciais, escritos na forma de componentes cartesianas.

O uso dos operadores diferenciais para tratar os fenômenos eletromagnéticos só faz sentido dentro de uma teoria de campo eletromagnético. Se estes fenômenos forem explicados através de uma teoria de ação à distância não podemos usar as idéias de operadores diferenciais pois eles supõem a existência de grandezas distribuídas de forma contínua pelo espaço todo e associadas a um meio contínuo que sofreria rotações e translações infinitesimais. No caso de teorias de ação à distância, basta o uso das idéias de grandezas direcionadas como força, velocidade, etc., localizadas apenas nos pontos onde há matéria e cargas elétricas, que podem ser representadas por componentes cartesianas e, posteriormente, por vetores.

É importante termos em mente que as equações utilizadas nos modelos mecânicos de Thomson e Maxwell para descrever os fenômenos que envolvem o magnetismo são equações que relacionam deslocamentos lineares com deslocamentos angulares. Por isso, para que um novo formalismo matemático seja realmente útil, além da existência de operadores diferenciais, é interessante que ele permita escrever tal tipo de relações de forma compacta e clara.

Atualmente, temos símbolos e nomes como ∇, div, rot, etc. para designar esses operadores. Na época nem os nomes nem os símbolos eram usados, no entanto, suas idéias foram amplamente usadas. Como foi mostrado no capítulo 3, esses nomes, bem como os símbolos, foram inventados juntamente com a invenção do formalismo vetorial por Gibbs e Heaviside, a partir do cálculo de quatérnions, como uma maneira de simplificar o formalismo matemático usado nas teorias de campo, seguindo as sugestões de Maxwell.

De uma maneira geral, podemos dizer que Maxwell associou as idéias vetoriais com eletricidade e magnetismo tornando imprescindível o desenvolvimento de algum tipo de análise vetorial. Estudando as cartas entre Maxwell e Tait vimos que o que Maxwell fez foi selecionar os pontos que julgou interessantes do cálculo dos quatérnions e deixou de lado os aspectos que não lhe foram diretamente úteis para o seu trabalho em eletromagnetismo.

Fez isso de uma maneira natural, pensando estar usando os quatérnions da forma como Tait usaria e não com o objetivo de abrir caminho para uma nova análise vetorial. Sem perceber, Maxwell determinou os aspectos necessários a uma nova análise vetorial a partir das idéias do sistema de quatérnions, mas sem as idéias que não lhe eram úteis. Tait também não percebeu que Maxwell estava abrindo caminho para que fossem introduzidas mudanças no sistema de quatérnions pois, como mostram as correspondências entre os dois, ele foi consultado várias vezes por Maxwell, viu e opinou sobre várias provas do *Treatise* que Maxwell lhe enviou, sem criticar essas mudanças.

Gibbs e Heaviside também tiveram uma atitude parecida. A transformação do sistema de quatérnions para o sistema vetorial não foi proposital e ninguém percebeu que os quatérnions estavam sendo abandonados até que Gibbs escreveu um tratado formal para apresentar a nova álgebra vetorial, que não tinha vários conceitos existentes nos quatérnions, além de ter uma nova notação. Tait só foi perceber que seu sistema estava mudado a partir disso. Inicialmente Maxwell, Gibbs e Heaviside não estavam tentando construir um novo sistema matemático. O que eles queriam era tornar o sistema de Hamilton mais simples e mais fácil de ser usado em física.

A simplicidade do sistema de Gibbs-Heaviside é matematicamente questionável. Comparando-o com o sistema de quatérnions, vemos que ambos não são comutativos, já que o produto vetorial não é comutativo; o sistema de quatérnions é associativo mas o sistema de Gibbs-Heaviside não é; além disso, no sistema de quatérnions só existe um produto, enquanto que no sistema vetorial são definidos dois produtos. O sistema de quatérnions permite a divisão, e a análise vetorial não permite. O sistema de Gibbs-Heaviside pode ser mais fácil de ser usado por ter uma notação mais clara e ser menos geral, mas não podemos dizer que ele é matematicamente mais simples.

O debate ocorrido na década de 1890 entre os defensores do sistema de quatérnions e os defensores da análise vetorial ilustra os elementos que levaram à escolha da álgebra vetorial como o sistema matemático mais adequado para tratar o eletromagnetismo na época.

Como Gibbs, Heaviside não criou em geral novos teoremas mas, ao contrário de Gibbs, associou a análise vetorial com um grande número de novas e importantes idéias em eletricidade, principalmente na linha de desenvolvimento seguida por Maxwell. Tanto Gibbs como Heaviside tinham um pé na matemática e outro na física. Essa interessante mistura os levou a introduzir simplificações no método dos quatérnions que diminuíram sua aparência de sistema puramente matemático e o tornaram mais agradável aos físicos da época. De um modo geral, a tarefa dos envolvidos com análise vetorial na década de 1840 foi diferente da tarefa na década de 1880. Os últimos se dedicaram mais a uma seleção e adaptações do que à criação propriamente dita.

Os defensores dos quatérnions não apresentaram argumentos novos durante o debate e também não apresentaram novas aplicações físicas para os quatérnions, numa época em que Heaviside estava publicando vários trabalhos sobre a teoria eletromagnética na revista *Electrician* usando seu novo sistema vetorial. Os quaternionistas estavam mais preocupados em preservar o sistema de Hamilton que em desenvolver novas aplicações para os quatérnions, que seriam úteis para convencer a comunidade da necessidade do velho sistema de Hamilton.

Tait era o maior defensor e a pessoa que mais contribuiu para o desenvolvimento do sistema de quatérnions, mas demonstrou uma falta de interesse em responder às críticas feitas ao sistema, provavelmente por julgar que os quatérnions eram um sistema tão bom que dispensava maiores comentários, principalmente dirigidos a interlocutores pouco conhecidos como Gibbs e Heaviside. Porém, Heaviside usou uma tática mais eficiente para defender seu sistema.

Um ponto importante desta tática a favor da aceitação dos vetores entre os físicos é que as definições foram feitas usando vetores “reais”, ou seja, vetores que representam grandezas físicas e aplicadas imediatamente a problemas físicos, como a força elétrica, densidade de corrente de condução, força magnética, indução magnética, corrente elétrica. Desta forma, o uso dos conceitos se torna bem mais evidente e interessante para os físicos do que se as definições fossem feitas da forma matemática tradicional e os exemplos apresentados nos capítulos finais. Essa estratégia usada por Heaviside é bem mais eficiente que a usada por Tait ao apresentar os quatérnions no *Treatise* pois o livro de Tait é um livro que segue a conduta dos matemáticos acrescido de alguns exemplos de interesse para os físicos. Heaviside foi direto para as aplicações em problemas importantes da época, sem se prender ao formalismo matemático. Mesmo no calor do debate, Alfred Lodge atribui o sucesso da álgebra vetorial e sua hegemonia entre os físicos à forma como foi apresentada por Heaviside por meio de aplicações em problemas de interesse dos físicos da época.[400]

Havia uma tendência, principalmente entre os quaternionistas, em tratar a questão do produto como algo a mais que uma questão de definição arbitrária e sim como uma questão de princípios, enquanto que Gibbs e Heaviside a tratavam como uma questão de facilidade prática. A controvérsia sobre a presença do sinal negativo no produto escalar é defendida pelos quaternionistas como uma questão de elegância algébrica, simplicidade e naturalidade, enquanto que os adeptos da análise vetorial argumentam em termos mais pragmáticos. Apesar de a questão sobre o sinal ser legítima ela é matematicamente impossível de ser solucionada pois é possível construir sistemas coerentes e úteis utilizando qualquer uma das duas opções. Sendo assim, ambas as partes tinham pouco a acrescentar a não ser reafirmar suas opiniões e enriquecer a sua defesa com novas aplicações. O fato de os defensores da análise vetorial conseguirem reproduzir os resultados importantes obtidos pelos quaternionistas não significa que seu sistema seja superior, mas certamente isso contribui para tornar o sistema interessante para o público interessado no uso da álgebra vetorial para resolver problemas físicos.

Atualmente é comum encontrarmos autores que interpretam um quatérnion puro com sendo equivalente a um vetor em R^3 pois ambos são escritos da mesma maneira. No entanto, como foi mostrado no capítulo 4, uma análise das propriedades de simetria mostra que é errado identificar um quatérnion puro como um vetor (polar) comum, como Gibbs e Heaviside fizeram quando desenvolveram sua álgebra vetorial e como alguns autores ainda fazem hoje em dia. Finalmente, a raiz do mal entendido entre quatérnions puros e vetores

[400] LODGE 1892.

comuns pode ser encontrada nos significados conflitantes atribuídos a *i, j, k* por Hamilton e Tait e no uso do mesmo símbolo para representar o que chamamos atualmente de vetores polar e axial. No entanto, a solução para essas dificuldades não é puramente histórica: ele requer uma profunda discussão das propriedades de simetria dos dois tipos de vetores e o uso de uma nova notação.

O problema da simetria das grandezas eletromagnéticas está presente em todos os capítulos desta tese. Essa questão só foi esclarecida com as discussões de Curie sobre simetria. Como vimos no capítulo 4, uma das principais conseqüências do princípio de Curie é estabelecer o papel da assimetria como condição necessária para a existência de algum fenômeno físico. Uma discussão da experiência de Ørsted, sob a luz do trabalho de Curie sobre simetria, mostra que os fenômenos gerais do eletromagnetismo, bem como as equações de Maxwell, nos conduzem apenas a uma relação entre as simetrias dos campos elétrico e magnético, de tal sorte que se adotarmos a simetria polar para o campo elétrico, somos obrigados a adotar a simetria axial para o magnético e vice-versa.

Devido a essa indeterminação, foi necessário buscar outros fenômenos para determinar a simetria dos campos (fenômenos eletroquímicos e a rotação do plano de polarização da luz no campo magnético). Com esses fenômenos, aliados à hipótese de que a carga elétrica é uma grandeza escalar, Curie conclui que o campo elétrico é uma grandeza polar e o campo magnético é uma grandeza axial. Se tivéssemos adotado a hipótese de que a carga elétrica é um pseudo-escalar, teríamos concluído que o campo elétrico é uma grandeza axial e o campo magnético é uma grandeza polar. De uma maneira geral, com os experimentos discutidos por Curie continua sendo impossível determinar qual a verdadeira natureza das grandezas eletromagnéticas.

Apesar de Curie ter publicado seu trabalho em 1894, atualmente as propriedades de simetria das grandezas eletromagnéticas são raramente discutidas devido ao costume de se usar setas para representar todos os tipos de grandezas vetoriais. A notação tradicional de setas para representar tanto vetores polares quanto axiais, que começou no final do século XIX com a invenção do sistema vetorial por Gibbs e Heaviside a partir do sistema de quatérnions, torna difícil perceber que o campo elétrico e o campo magnético são grandezas com simetrias diferentes. Curie sugeriu que símbolos diferentes deveriam ser usados para representar as grandezas com simetrias diferentes, no entanto, não chegou a propor nenhum símbolo novo. Isso foi feito por Woldemar Voigt e Paul Langevin em 1910 e 1912, respectivamente.

Outra questão debatida na época foi sobre qual seria o sistema dimensional mais adequado para tratar as grandezas eletromagnéticas (capítulo 5). Atualmente os físicos utilizam dois sistemas dimensionais para tratar o eletromagnetismo: o eletrostático e o eletromagnético. Os físicos também estão acostumados com a idéia de que a escolha entre os sistemas é arbitrária e se relaciona apenas com as unidades nas quais as grandezas são expressas.

No entanto, isso nem sempre foi assim. No século XIX, a maneira de encarar a análise dimensional era completamente diferente. Físicos importantes da época, como Maxwell por exemplo, achavam que a análise dimensional poderia ajudar a encontrar uma maneira de representar mecanicamente as grandezas eletromagnéticas. Essa idéia está relacionada com sua crença na natureza mecânica da realidade física, isto é, Maxwell acreditava que todas as grandezas, inclusive as eletromagnéticas, estavam relacionadas com propriedades mecânicas do éter. Ao perceber que as razões entre as dimensões da carga elétrica e do monopólo magnético no sistema eletrostático e no sistema eletromagnético têm sempre as dimensões de velocidade, interpretou que essa dimensão de velocidade deveria estar associada a uma velocidade real, associada a alguma propriedade do meio eletromagnético, isto é, a alguma propriedade do éter. Assim, a própria análise dimensional levava à idéia de uma velocidade fundamental, que depois se verificou ser igual à velocidade da luz.

Apesar de Maxwell e seus seguidores concordarem que a escolha entre o sistema eletrostático e eletromagnético seria arbitrária, eles discordavam sobre várias questões relacionadas com a definição das grandezas eletromagnéticas e com as propriedades do éter associadas a essas grandezas. No final do século XIX surgiram diferentes sistemas dimensionais associados a diferentes interpretações da natureza mecânica do eletromagnetismo. Nesta época foram publicados vários artigos na revista *Philosophical Magazine* discutindo a relação entre a dimensionalidade das grandezas eletromagnéticas e os diferentes modelos de éter.

Na mesma época, surgiram vários trabalhos propondo um sistema de dimensões único que pudesse ser testado experimentalmente e que descrevesse a natureza real das grandezas eletromagnéticas, como, por exemplo, os de Arthur Rücker que considerou a permissividade elétrica χ e a permeabilidade magnética μ, como constantes dimensionais fundamentais nas equações dimensionais das grandezas eletromagnéticas.

O fato de a descrição das dimensões das grandezas físicas em termos de M, L, T não considerar o caráter vetorial ou escalar dessas grandezas também foi discutido, mas esse aspecto não foi incorporado à análise dimensional usada hoje em dia. S. P. Thompson e W. Williams propuseram duas maneiras diferentes de especificar o caráter vetorial de algumas grandezas físicas. Thompson propôs que a dimensão de uma grandeza vetorial fosse multiplicada por $\sqrt{-1}$ para indicar seu caráter vetorial, indicando uma clara influência da teoria de quatérnions, que considera que uma grandeza vetorial é obtida pela multiplicação de um escalar por um versor dado pela unidade imaginária $\sqrt{-1}$. Williams propôs o uso de X, Y, Z no lugar de L para expressar a direção de um certo comprimento e com isso resolver o problema de grandezas diferentes com mesma dimensão.

Alguns anos mais tarde, no início do século XX, a discussão sobre sistemas de unidades volta à tona principalmente com os artigos de Muaux e de Fessenden. Esses trabalhos se caracterizaram principalmente por buscarem uma forma de encontrar qual a verdadeira natureza das grandezas eletromagnéticas através da análise dimensional, a partir do estudo de certos fenômenos.

As discussões da época sobre dimensão das grandezas eletromagnéticas consideravam que o campo eletromagnético não era algo abstrato como é considerado hoje em dia, mas sim alterações mecânicas de um éter real e que, portanto, poderia ser possível determinar qual o verdadeiro caráter mecânico das grandezas eletromagnéticas. Com o surgimento da teoria da relatividade e conseqüente abandono de modelos baseados em um éter mecânico, essas discussões tornaram-se sem sentido e foram abandonadas juntamente com as discussões sobre as propriedades do éter.

No final do século XIX uma das questões estudadas pelos físicos era a eletrodinâmica dos corpos em movimento (capítulo 6). Em 1904 Lorentz concluiu que os fenômenos ópticos não dependem do movimento de translação em qualquer ordem em v/c. Mostrou também que as equações do campo eletromagnético escritas em um sistema S em repouso com relação ao éter mantêm sua forma invariante quando escritas em um sistema inercial S' movendo-se com velocidade constante $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ se as coordenadas no novo sistema se transformarem de acordo com as "transformações de Lorentz". Mostrou também quais seriam as transformações entre os campo, velocidades e densidades de cargas de S para S'.

Lorentz não utilizou o formalismo vetorial em seu trabalho (utilizava o formalismo de componentes cartesianas). Apesar de considerar que a coordenada temporal também se altera em uma mudança de referencial, Lorentz não a considerou como uma coordenada do mesmo tipo que as coordenadas espaciais e não utilizou nenhuma idéia semelhante a um "espaço-tempo". Esse enfoque foi introduzido na mesma época por Poincaré.

Em seu artigo publicado em 1905, Poincaré analisou as propriedades de transformação de muitas grandezas físicas, deu o tratamento completo da covariância das equações de Maxwell, introduziu quadrivetores e a tensão de Poincaré e provou o caráter de grupo das "transformações de Lorentz", introduzindo este nome e o nome "grupo de Lorentz". Entre as inovações de Poincaré, está a introdução de uma quarta coordenada imaginária it e a interpretação desta coordenada como sendo equivalente às três coordenadas espaciais.

Em linhas gerais, em seus trabalhos de 1905 e 1906, Poincaré mostrou que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo e que essa propriedade é necessária para descartarmos o movimento absoluto e com isso resguardarmos o princípio da relatividade dos movimentos uniformes. Ele conseguiu unir as transformações de

Lorentz com a teoria dos invariantes e foi o primeiro a representar a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço. Foi sobre esses princípios que Minkowsky elaborou em 1908 sua teoria de espaço-tempo.

Em 1908 Minkowski publicou dois artigos fundamentais para o desenvolvimento do formalismo quadridimensional do eletromagnetismo. Nestes artigos Minkowski desenvolveu seu formalismo quadridimensional na forma matricial e o aplicou para mostrar que as equações da eletrodinâmica se mantêm invariantes sob transformações de Lorentz, discutindo aspectos geométricos associados ao novo formalismo quadridimensional.

Minkowski estabeleceu as bases de seu novo formalismo partindo da forma quadrática invariante $c^2t^2–x^2–y^2–z^2$, onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo. As leis físicas seriam expressas com relação a um espaço quadridimensional com coordenadas x_1,x_2, x_3, x_4, onde x_4 é definida com uma coordenada temporal imaginária dada por $x_4=it$, perpendicular as outras três. As três coordenadas espaciais e a quarta coordenada temporal são modificadas por uma transformação de Lorentz.

Minkowski desenvolveu e apresentou um enfoque original para as equações da eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz. As equações diferenciais escritas na forma de componentes foram logo substituídas pelos quadrivetores por Minkowski. Ele defendia que a formulação quadrivetorial era necessária para tornar evidente a invariância de Lorentz das equações do campo eletromagnético.

Escreveu as equações da eletrodinâmica usando o formalismo de quadrivetores, no qual considerou que as grandezas eletromagnéticas são funções de x_1, x_2, x_3, x_4. Como exemplo, escreveu as equações de Maxwell. A matriz que representa o campo eletromagnético é escrita como

$$f = \begin{vmatrix} 0 & m_z & -m_y & -ie_x \\ -m_z & 0 & m_x & -ie_y \\ m_y & -m_x & 0 & -ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{vmatrix}$$

A forma que Minkowski escolheu para representar através de matrizes o campo eletromagnético tem importantes implicações físicas que não foram discutidas por ele e que atualmente também são pouco discutidas. Nesta definição as componentes do campo elétrico estão na última linha e na última coluna e as do campo magnético nos outros elementos não nulos de uma matriz 4×4. Isso implica em propriedades de simetria diferentes para ambos os vetores, sendo que, escolhidos desta forma, o vetor campo elétrico é um vetor do tipo polar e o vetor campo magnético é um vetor do tipo axial. Ao fazer esta escolha, Minkowski está seguindo a tradição de Maxwell, sem discutir que fazendo a escolha contrária, as equações continuam invariantes sob transformações de Lorentz.

Não se trata de uma questão puramente matemática, mas sim da representação de uma entidade física, o campo eletromagnético, que tem propriedades que devem estar univocamente representadas pelo formalismo matemático usado. A posição das componentes de uma certa grandeza física na matriz está relacionada com as propriedades de simetria desta grandeza. Uma grandeza cujas componentes formam uma coluna ou linha, possui a simetria de um vetor polar, enquanto que as componentes no triângulo formam uma grandeza com simetria axial. Muito provavelmente Minkowski conhecia os trabalhos de Pierre Currie e Woldemar Voigt sobre simetria das grandezas eletromagnéticas, mas não os cita.

A importância de uma discussão deste tipo está no fato de que as equações do campo eletromagnético continuariam invariantes sob transformações de Lorentz se tivessem sido escritas com as componentes do campo magnético na coluna e as componentes do campo elétrico na linha, ou seja, considerando o vetor campo elétrico como vetor axial e o campo magnético como vetor polar.

Curie já havia mostrado que essas grandezas têm simetrias relativas diferentes, isto é, se escolhemos uma como sendo polar, a outra deve ser axial. Do ponto de vista puramente matemático é indiferente qual a simetria associada a cada uma delas, mas quando se deseja conhecer a natureza das grandezas físicas, esta questão é bastante importante.

O fato de um campo elétrico poder gerar um campo magnético, e vice-versa, quando há mudança de um referencial em repouso para um referencial em movimento também é contemplado com o formalismo desenvolvido por Minkowski. A maneira que Minkowski escreveu a matriz do campo eletromagnético permite que haja uma "mistura" entre as componentes dos campos quando há uma mudança de um referencial em repouso para outro em movimento.

De uma maneira geral, Minkowski enfatizou os aspectos matemáticos do novo formalismo e não se preocupou em discutir as conseqüências físicas da adoção de tal formalismo.

Apesar de Einstein ter sido muito importante para o desenvolvimento da teoria da relatividade, ele não contribuiu para o desenvolvimento do formalismo matemático utilizado na teoria. Quando escreveu seu artigo de 1905 sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, o formalismo quadridimensional de Minkowski ainda não tinha sido inventado, mas o formalismo vetorial já era usado por vários físicos da época. Neste trabalho, no entanto, Einstein utilizou o formalismo de componentes. Isso dificulta bastante percebermos as propriedades de simetria dos campos, que também não foram discutidas por ele.

O formalismo quadridimensional passou a ser amplamente usado e é usado até os dias atuais. Apesar de seu enorme sucesso, este não era o único formalismo explorado pelos físicos da época para tratar a teoria eletromagnética. Entre 1910 e 1920, foram escritos vários trabalhos sobre teoria da relatividade utilizando o formalismo de quatérnions. Como exemplo, as equações de Maxwell na forma invariante escritas por Silberstein utilizando o formalismo de quatérnions podem ser compactadas em apenas uma equação: D**F** = C. Em seus trabalhos Silberstein também não discute as propriedades de simetria dos campos e com o formalismo de quatérnions é mais difícil perceber tais propriedades do que pelo uso do formalismo tensorial.

O eletromagnetismo atualmente usado não solucionou a questão da natureza dos campos elétrico e magnético. Embora se adote (sem discussão) o campo elétrico como um vetor polar e o campo magnético como axial, seguindo as escolhas de Maxwell e Minkowski, todo o eletromagnetismo clássico é compatível com a escolha contrária. Matematicamente, isso significa que no tensor que representa o campo eletromagnético, seria possível trocar os lugares das componentes do campo elétrico e da indução magnética. Para Maxwell era importante determinar qual a natureza de cada grandeza pois na época se desejava determinar mecanicamente a natureza física das grandezas e não apenas descrevê-las matematicamente. Atualmente, após a teoria da relatividade, esse enfoque foi abandonado sendo dada uma ênfase maior na descrição matemática dos fenômenos físicos.

BIBLIOGRAFIA

ABRAHAM, Henri. Sur la théorie des dimensions. *Journal Physique Théorique et Appliquée* **1:** 516-526, 1892.

ABRAHAM, Max. Geometrische Grundbegriffe Hülfsmittel. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. IV. Leipzig: von B. G. Teubner, 1901.

ALONSO, Marcelo & FINN, Edward J. *Physics*. Wokingham: Addison-Wesley, 1992.

ALTMANN, Simon L. *Icons and symmetries*. Oxford: Clarendon Press, 1992.

ALTMANN, Simon L. *Rotations, quaternions, and double groups*. Oxford: Clarendon Press, 1986.

BECKER, Richard. *Electromagnetic fields and interactions*. Ed. Fritz Sauter. New York: Blaisdell, 1964.

BERNARDINI, C. Non rigorous arguments in physics. *Scientia* **111:** 645-651, 1976.

BORK, Alfred M. "Vector versus quaternions" – The letters in *Nature*. *American Journal of Physics* **34:** 202-11, 1966.

BRAVAIS, Auguste. Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* **14** : 141-180, 1849.

BUCHWALD, Jed Z. Modifying the continuum: methods of Maxwellian electrodynamics in William Thomson's electromagnetic theory. In HARMAN, P. M. *Wranglers and physicists: studies on Cambridge physics in the 19th century*. Manchester: Manchester University Press, 1985.

BUCKINGHAM, E. On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review* **4:** 345-376, 1941.

CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations*. New York: Dover, 1993.

CANTOR, G. N. & HODGE, M. J. S. (eds.). *Conceptions of ether. Studies in the history of ether theories 1740 – 1900*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

CHALMERS, A. F. Curie's principle. *British Journal for the Philosophy of Science* **21**: 133-148, 1970.

CLAUSIUS, R. On the different systems of measures for electric and magnetic quantities. *Philosophical Magazine* **13:** 381-398, 1882.

CLIFFORD, William K. *Elements of dynamics: a introduction to the study of the motion and rest in solid and fluid bodies*. London: MacMillan, 1877.

CLIFFORD, William K. *Mathematical papers of William Kingdon Clifford*. London: Macmillan, 1882.

COHEN, Morris R. & DRABKIN, I. E. *A source book in greek science*. Cambridge: Harvard University Press, 1958.

CORRY, Leo. Hermann Minkowski and the postulate of relativity. *Archive for the History of Exact Science* **51:** 273-314, 1997.

CORRY, Leo. Hilbert and physics (1900-1915) em GRAY, Jeremy J. (ed.) *The symbolic universe, geometry and physics 1890-1930.* Oxford: Oxford University Press, 1999.

CROWE J. M. *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. London: University of Notre Dame Press, 1967.

CUJAV, Camillo. Henri Poincaré's mathematical contributions to relativity and the Poincaré stresses. *American Journal of Physics* **36:** 1102-1113, 1968.

CURRIE, Pierre. Sur la symétrie. *Bulletin de la Société Mineralogique de France* **7:** 418-457, 1884.

CURRIE, Pierre. Symétrie dans les phénomenes physiques. *Journal de Physique Theoretique et Aplliquée* **3:** 393-415, 1894.

D'AGOSTINO, S. Maxwell's dimensional approach to the velocity of light. *Centaurus* **29:** 178-204, 1986.

D'AGOSTINO, S. Symmetry in Ampère's electrodynamics in DONCEL, M. G., HERMANN, A., MICHEL, L., PAIS, A. (eds). *Symmetries in physics (1600-1980).* Barcelona: Bellaterra, 1987.

DARRIGOL, Olivier. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. New York: Oxford University Press, 2000.

DONCEL, M. G., HERMANN, A., MICHEL, L., PAIS, A. (eds). *Symmetries in physics (1600-1980).* Barcelona: Bellaterra, 1987.

DUNCAN, W. J. A review of dimensional analysis. *Engineering* **169:** 533-534, 556-557, 1949.

EINSTEIN, A., LAUB, J. Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper. *Annalen der Physik* **26:** 1908. Reimpresso e traduzido em *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol 2. Princeton: Princeton University Press, 1989.

EVERETT, J. D. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units. *Philosophical Magazine* **13:** 376-377, 1882a.

EVERETT, J. D. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units. *Philosophical Magazine* **13:** 431-434, 1882b.

FARADAY, Michael. *Experimental researches in electricity.* Em HUTCHINS, Robert Maynard (ed.) *Great books of the western world.* Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc, 1952.

FESSENDEN, Reginald A. The quantity upon which a knowledge of the nature of electricity and magnetism depends. *Operator and Electrical World* **25:** 579-580, 1895.

FESSENDEN, Reginald Aubrey. A determination of the nature of the electric and magnetic quantities and of the density and elasticity of the ether. I. *Physical Review* **10:** 2-33, 1900a.

FESSENDEN, Reginald Aubrey. A determination of the nature of the electric and magnetic quantities and of the density and elasticity of the ether. II. *Physical Review* **10:** 83-115, 1900b.

FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B. & SANDS, Matthew. *The Feynman lectures on physics*. Reading: Addison-Wesley, 1966. 3 vols.

FITZGERALD, G. F. On the electromagnetic theory of reflection and refraction of light. *Philosophical Transactions of Royal Society of London* **170:** 691-711, 1880.

FONCENEX, F. D. Sur les principes fondamentaux de la mechanique. *Mélanges Philosophie Mathématique de la Societé Royale de Turin* **2:** 299-322, 1760-61.

GARDNER, M. E. The vector cross product in elementary electrodynamics. *American Journal of Physics* **18:** 110-112, 1950.

GIBBS, Josiah Willard. On the role of quaternions in the algebra of vectors. *Nature* **43:** 511-13, 1891a.

GIBBS, Josiah Willard. Quaternions and the 'Ausdehnungslehre'. *Nature* **44:** 79-82, 1891b.

GIBBS, Josiah Willard. Quaternions and the algebra of vectors. *Nature* **47:** 463-64, 1893a.

GIBBS, Josiah Willard. Quaternions and vectors analysis. *Nature* **48:** 364-67, 1893b.

GIBBS, Josiah Willard. *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, vol 2. New York: Dover, 1961.

GOENNER, H., RENN, J., RITTER, J. & SAUER, T. (eds.) *The expanding worlds of general relativity, Einstein studies*, vol. 7, Boston: Birkhäuser, 1999.

GOLDSTEIN, Herbert. *Classical mechanics*. Cambridge: Addison Wesley Publishing Co, 1980.

GOLDBERG, Stanley. Henri Poincaré and Einstein theory of relativity. *American Journal of Physics* **35:** 934-44, 1967.

GOODING, D. Final steps to the field theory: Faraday's study of magnetic phenomena, 1845-1850. *Historical Studies in the Physical Sciences* **11**: 231-75, 1981.

GRASSMANN, Hermann. *A new branch of mathematics: the "Ausdehnungslehre" of 1844 and other works*. Translated by Lloyd C. Kannenberg. Chicago: Open Court Publishing Company, 1995

GRAY, Jeremy J. (ed.). *The symbolic universe, geometry and physics 1890-1930.* Oxford: Oxford University Press, 1999.

GREEN, George. Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity de 1828 in *Mathematical Papers*.

HALLIDAY, David, RESNICK Robert & WALKER, Jearl. *Fundamentals of physics*. New York Chichester: Wiley, 1997.

HAMILTON, William Rowan. *Elements of quaternions*. New York: Chelsea Publishing Company, 1969.

HAMILTON, William Rowan. *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton vol. 3, Algebra*. Edited for the Royal Irish Academy by A.W. Conway and J.L. Synge. Cambridge: University Press, 1967.

HARMAN, P. M. (ed.). *Wranglers and physicists: Studies on Cambridge physics in the 19th century*. Manchester: Manchester University Press, 1985.

HEATH, Thomas. *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus*. New York: Dover, 1981.

HEAVISIDE, Oliver. *Electrical papers*. New York: Chelsea Publishing Company, 1970.

HEAVISIDE, Oliver. *Electromagnetic theory*. New York: Chelsea Publishing Company, 1971.

HEAVISIDE, Oliver. On the forces, stresses, and the fluxes of energy in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London* **183A:** 423-84, 1893.

HELMHOLTZ, Hermann von. On integrals of the Hydrodynamical equations, wich express vortex-motion. *Philosophical Magazine* **33:** 485-512, 1867.

HESSE, Mary. *Forces and fields. The concept of action at a distance in the history of physics*. New York: Philosophical Library, 1961.

HUNT, Bruce J. *The Maxwelliams*. Ithaca: Cornell University Press, 1991.

ISMAEL, J. Curie's principle. *Synthese* **110**: 167-190, 1997.

JACKSON, John David. *Classical electrodynamics*. 2nd. ed. New York: John Wiley, 1975.

JOUBIN, P. Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques. *Journal de Physique Théorique et Appliquée* **5:** 398-401, 1896.

KELLAND, P. e TAIT, P. G. *Introduction to quaternions with numerous examples*. London: Macmillan and Co., 1873.

KELVIN, William Thomson, Baron. *Mathematical and physical papers*. Cambridge: University Press, 1882-1911.

KENNEDY, H. James Mills Peirce and the cult of quaternions. *Historia Mathematica* **6:** 423-29, 1979.

KNOTT, Cargill G. Recent innovations in vector theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **19:** 212-37, 1893a.

KNOTT, Cargill G. The quaternions and its depreciators. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **11:** 62-80, 1893b.

KNUDSEN, Ole. Mathematics and physical reality in William Thomson's electromagnetic theory, pp. 149-179 em HARMAN, P. M. (ed.). *Wranglers and physicists: Studies on Cambridge physics in the 19th century*. Manchester: Manchester University Press, 1985.

KUIPERS, Jack B. *Quaternions and rotations sequences, a prime with applications to orbits, aerospace, and virtual reality.* Princeton: Princeton University Press, 1999.

LAMBEK, J. If Hamilton had prevailed: quaternions in physics. *The Mathematical Intelligencer* **17:** 7-15, 1995.

LANDAU, Lev & LIFCHITZ, E. *The classical theory of fields*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1975.

LANGEVIN, Paul. Notions géométriques fondamentales. *Encyclopédie des sciences mathematiques*, Vol V. Paris: Gauthier Villars, 1912.

LANGHAAR, H. L. A summary of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute* **242:** 459-463, 1946.

LAUE, Max von. *La théorie de la relativité*. Paris: Gauthier-Villars, 1922.

LODGE, Alfred. Review of *Principles of the algebra of vectors* by Alexander MacFarlane. *Nature* **47:** 3-5, 1892.

LODGE, Oliver J. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units. *Philosophical Magazine* **14:** 357-365, 1882.

LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A. MINKOWSKI, H & WEYL, H. *The principle of relativity.* New York: Dover 1952.

LORENTZ, H. Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique. *Acta Mathematica* **38:** 293, 1921. Reimpresso em *Oeuvres de Henri Poincaré*, vol 9, pp. 683-701. Paris: Gauthier-Villars, 1954.

LUCAS, F. Sur les équations abstraites du foncionement des machines. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **19:** 152-158, 1891.

MACAGNO, Enzo. Historico-critical review of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute* **292:** 391-402, 1971.

MACAULAY, Alexander. On the mathematical theory of electromagnetism. *Proceedings of the Royal Society of London* **183A:** 685-779, 1893.

MACAULAY, Alexander. Quaternions as a practical instrument of physical research. *Philosophical Magazine* **33:** 477-95, 1892.

MACFARLANE, Alexander. Review of *Utility of quaternions in physics* by A. McAulay. *Physical Review* **1:** 387-390, 1893.

MACFARLANE, Alexander. Vectors and quaternions. *Nature* **48:** 540-541, 1893.

MARTINS, R. A. Contribuição do conhecimento histórico ao ensino do eletromagnetismo. *Caderno Catarinense de Ensino de Física* **5:** 49-57, 1988.

MARTINS, R. A. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* **10**: 89-114, 1986.

MARTINS, R. A. The origin of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute* **311**: 331-7, 1981.

MAXWELL, James C. On physical lines of force, part I. *Philosophical Magazine* **21:** 161-75, 1861a.

MAXWELL, James C. On physical lines of force, part II. *Philosophical Magazine* **21:** 281-91, 1861b.

MAXWELL, James C. On physical lines of force, part III. *Philosophical Magazine* **22:** 12-24, 1862a.

MAXWELL, James C. On physical lines of force, part IV. *Philosophical Magazine* **22:** 85-95, 1862b.

MAXWELL, James C. Quaternions. *Nature* **9:** 137-8, 1873.

MAXWELL, James C. *Scientific papers*. Edited by William Davidson Niven. New York: Dover Publisher, 1965.

MAXWELL, James C. *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell* Vol. II. 1862-1873, edited by P. M. Harman. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

MAXWELL, James Clerk, JENKIN, F. Report on the 33rd meeting of the British Association on Standards of Electrical Resistance, Appendix C, pp. 130-163, 1863.

MAXWELL, James. C. *Treatise on electricity and magnetism*. New York: Dover, 1954.

MERCADIER, M. E. & VASCHY. Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques. *Journal de Physique* **2:** 245-253, 1883.

MERCADIER, M. E. Sur les relations générales qui existent entre les coefficients des lois fondamentales de l'électricité et du magnétisme, et les conséquences qui en résultent au point de vue des dimensions et unités des grandeurs électriques. *Journal de Physique Théorique et Appliquée* **2:** 289-299, 1893.

MERCADIER, M. E. Sur les systèmes de dimensions d'unités électriques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **116:** 974-977, 1893.

MILLER, Arthur I. *Albert Einstein's special theory of relativity: Emergence (1905) and early interpretation (1905-1911).* Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1981.

MINKOWSKI, H. Das Relativitätsprinzip. *Annalen der Physik* **47:** 927-938, 1915.

MINKOWSKI, H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Mathematische Annalen* **68**: 472, 1910.

MINKOWSKI, H. Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift* **10:** 104-111, 1909. Utilizamos a tradução inglesa publicada em LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A. MINKOWSKI, H & WEYL, H. *The principle of relativity*. Dover publications: New York: 1952.

MØLLER, C. *The theory of relativity*. 2nd. ed. Oxford: Clarendon Press, 1972.

MUAUX, L. G. Dimensions générales rationnelles et réelles des quantités mangétiques et électriques. *L'Éclairage Électrique* **44:** 241-249, 1905.

MUAUX, L. G. Système général, rationnel et réel des quantités magnétiques et électriques. *Bulletin de la Association des Ingenèurs Electriciens de Liège.* **6:** 330-378, 1906.

NAHIN, Paul J. *Oliver Heaviside: sage in solitude*. New York: IEEE Press, 1988.

O'BRIEN, Matthew. On symbolic forms derived form the conception of the translation of a directed magnitude. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **142:** 161-206, 1852.

O'NEILL, John. Formalism, Hamilton and complex numbers. *Studies in History and Philosophy of Science* **17:** 351-372, 1986.

PAGE, Chester H. Classes of units in the SI. *American Journal of Physics* **46:** 78-79, 1978.

PEDDIE, William. On the fundamental principles of quaternions and other vector analyses. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **11:** 84-92, 1983.

POINCARÉ, Henri. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **21:** 129-176, 1906. Reimpresso em *Oeuvres de Henri Poincaré*, vol 9, pp. 489-550. Paris: Gauthier-Villars, 1954.

POINCARÉ, Henri. *Eléctricité et optique.* Paris: Gauthier-Villars, 1901.

PYENSON, Lewis. Hermann Minkowsky and Einstein´s special theory of relativity. *Archive for the History of Exact Sciences.* **17:** 71-95, 1977.

PYENSON, Lewis. Physics in the shadows of mathematics: the Göttingen electron-theory seminar of 1905. *Archive for the History of Exact Sciences* **21:** 55-89, 1979.

RADICATI, L. A. Remarks on the early developments of notion of symmetry breaking em DONCEL, M. G., HERMANN, A., MICHEL, L., PAIS, A. (eds). *Symmetries in physics (1600-1980).* Barcelona: Bellaterra, 1987.

RAVEROT, E. Les hypothèses des systèmes absolus de dimensions. *L'Éclairage Électrique* **5:** 481-488, 1895.

REICH, Karen. *Die Entwicklung des Tensorkalküls – Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie*. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1994.

ROSEN, Joe. Fundamental Manifestations of Symmetry in Physics. *Foundations of Physics* **20:** 283-307, 1990.

RÜCKER, Arthur W. On Mercadier´s test of the relative validity of the electrostatic and electromagnetic system of dimensions. *Nature* **49:** 387-388, 1894.

RÜCKER, Arthur W. On the suppressed dimensions of physical quantities. *Philosophical Magazine* **8:** 37-50, 1889.

SIEGEL, Daniel M. Completeness as a goal in Maxwell's electromagnetic theory. *Isis* **66:** 361-368, 1975.

SIEGEL, Daniel M. Thomson, Maxwell, and the universal ether in Victorian physics em CANTOR & HODGE (eds.), *Conceptions of ether studies in the history of ether theories 1740-1900*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

SILVA, Cibelle Celestino & MARTINS, Roberto de A. Polar and axial vectors versus quaternions. *American Journal of Physics* **70:** 958-963, 2002.

SMITH, G. C. Matthew O'Brien's anticipation of vector mathematics. *Historia Mathematica* **9:** 172-190, 1982.

SOMMERFELD, A. Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. *Annalen der Physik* **32:** 749-776, 1910a.

SOMMERFELD, A. Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoralgebra. *Annalen der Physik* **33:** 649-689, 1910b.

SPENCER, B. On the varieties of nineteenth-century magneto-optical discovery. *Isis* **61**: 34-51, 1970.

STEPHENSON, Reginald J. Development of vector analysis from quaternions. *American Journal of Physics* **34:** 194-201, 1966

TAIT, Peter G. *An elementary treatise on quaternions*, 2. ed. Cambridge University Press: Cambridge, 1873.

TAIT, Peter G. On the intrinsic nature of the quaternion method. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **20:** 276-84, 1895.

TAIT, Peter G. The role of quaternions in the algebra of vectors. *Nature* **43:** 608, 1891.

TAIT, Peter G. Vector analysis. *Nature* **47:** 225-226, 1893.

The compact edition of the Oxford English dictionary. Oxford: Oxford University Press, 1985.

THOMPSON, Silvanus P. *The life of Lord Kelvin*. New York: Chelsea Publishing Company, 1976.

THOMSON, J. J. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units. *Philosophical Magazine* **13:** 427-429, 1882a.

THOMSON, J. J. On the dimensions of a magnetic pole in the electrostatic system of units. *Philosophical Magazine* **14:** 225-226, 1882b.

THOMSON, William. On the uniform motion of heat in homogeneous solid bodies and its connexion with mathematical theory of electricity em THOMSON, William. *Reprint of Papers on Electrostatic and magnetism.* London: MacMillan & Co, 1872, pp. 1-14.

THOMSON, William. On a mechanical representation of electric, magnetic, and galvanic forces em *Mathematical and Physical Papers of William Thomson*. Cambridge: Cambridge University Press, 1882-1911, vol. 1, pp. 76-79.

THOMSON, William. *Reprint of Papers on Electrostatic and magnetism.* London: MacMillan & Co, 1872

VAN DER WAERDEN, B.L. Hamilton's discovery of quaternions. *Mathematics Magazine* **49:** 227- 234, 1976.

VOIGT, Woldemar. *Kompendium der theoretischen Physik*, vol II. Leipzig: von Veit u. Co., 1896.

VOIGT, Woldemar. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig: B. G. Teubner, 1910.

WALTER Scott. Minkowski, mathematicians, and the mathematical theory of relativity. In H. GOENNER, H., RENN, J., RITTER, J. & SAUER, T. (eds.) *The expanding worlds of general relativity, Einstein studies*, vol. 7, Boston: Birkhäuser, 1999.

WALTER, Scott. The non Euclidean style of Minkowskian relativity em GRAY, Jeremy J. (ed.) *The symbolic universe, geometry and physics 1890-1930.* Oxford: Oxford University Press, 1999.

WHEELER, L. P. *Josiah Willard Gibbs. The history of a great mind*. Woodbridge: Ox Bow Press, 1979.

WHITEHEAD, Alfred North. *A treatise on universal algebra*. New York: Hafner Publishing Company, 1960.

WHITTAKER, Edmund T. *A history of the theories of aether and eletricity*. New York: Humanities Press, 1973. 2 vols.

WILLIAMS, W. On the relation of the dimensions of physical quantities to directions in space. *Proceedings of Physical Society of London* **11:** 357-398, 1982.

WISE, Norton M. The flow analogy to electricity and magnetism, part I: William Thomson's reformulation of action at a distance. *Archive for History of Exact Sciences*, **25**: 19-70, 1981 (a).

WISE, Norton. T. The Maxwell literature and British dynamical theory. *Historical Studies in the Physical Science* **13:** 175-205, 1981 (b).

WISE, Norton. The mutual embrace of electricity and magnetism. *Science* **203:** 1310-1318, 1979.