

Este arquivo contém o texto completo do seguinte trabalho:

MARTINS, Roberto de Andrade. A análise geométrica da duração dos dias no "Tratado sobre a esfera" de Sacrobosco. Pp. 165-181, *in*: TEIXEIRA, Marcos V; NOBRE, Sergio R. (eds.). *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.

Este arquivo foi copiado da biblioteca eletrônica do Grupo de História e Teoria da Ciência <<http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/>> da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), do seguinte endereço eletrônico (URL):

<<http://ghtc.ifi.unicamp.br/pdf/ram-99.pdf>>

Esta cópia eletrônica do trabalho acima mencionado está sendo fornecida para uso individual, para fins de pesquisa. É proibida a reprodução e fornecimento de cópias a outras pessoas. Os direitos autorais permanecem sob propriedade dos autores e das editoras das publicações originais.

This file contains the full text of the following paper:

MARTINS, Roberto de Andrade. A análise geométrica da duração dos dias no "Tratado sobre a esfera" de Sacrobosco. Pp. 165-181, *in*: TEIXEIRA, Marcos V; NOBRE, Sergio R. (eds.). *Anais do V Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.

This file was downloaded from the electronic library of the Group of History and Theory of Science <<http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/>> of the State University of Campinas (UNICAMP), Brazil, from following electronic address (URL):

<<http://ghtc.ifi.unicamp.br/pdf/ram-99.pdf>>

This electronic copy of the aforementioned work is hereby provided for exclusive individual research use. The reproduction and forwarding of copies to third parties is hereby forbidden. Copyright of this work belongs to the authors and publishers of the original publication.

A ANÁLISE GEOMÉTRICA DA DURAÇÃO DOS DIAS, NO TRATADO SOBRE A ESFERA DE SACROBOSCO

ROBERTO DE ANDRADE MARTINS

(Unicamp - Brasil)

Resumo

O fenômeno da variação da duração dos dias era bem conhecido pelos povos da Antigüidade. Em um sistema astronômico heliocêntrico, como o atual, o fenômeno é bastante complexo. Nenhum texto didático elementar atual apresenta um tratamento quantitativo do fenômeno, que permita compreender e estimar a duração do dia e da noite em diferentes pontos da Terra, ao longo do ano. No antigo sistema astronômico geocêntrico, pelo contrário, o fenômeno podia ser tratado de forma geométrica muito mais facilmente. O estudo quantitativo do fenômeno já estava presente em obras da Antigüidade, como o “Almagesto” de Ptolomeu, mas atingiu sua forma mais simples e “intuitiva” no “Tratado sobre a esfera” (*Tractatus de sphaera*) de Johannes de Sacrobosco, escrito no início do século XIII. Considerando-se a trajetória anual do Sol (em relação às estrelas, conforme vista da Terra) como um círculo oblíquo (eclíptica) em relação ao equador celeste e considerando o tamanho da Terra desprezível em relação à distância entre esta e o Sol, é possível fazer uma análise geométrica muito simples da duração dos dias e noites, ao longo do ano, para qualquer ponto da superfície terrestre. Tal análise pode ser ensinada a estudantes dos níveis fundamental e médio.

Abstract

The variation of the length of the day was a phenomenon well known in Antiquity. In our present day heliocentric astronomical theory, the phenomenon is highly complex. Accordingly, no contemporary elementary textbook presents a quantitative approach to this phenomenon, that would provide an understanding and means of calculating the length of day and night in different places on the Earth, through the year. In the old geocentric astronomical theory, however, the phenomenon can be studied in a much simpler way. Its quantitative treatment was presented in works such as Ptolemy's “Almagest”, but it reached its most simple and “intuitive” form in Johannes de Sacrobosco's “Treatise on the sphere” (*Tractatus de sphaera*), written in the 13th century. Taking into account the annual path of the Sun (relative to the stars, as viewed from the Earth) as an oblique circle (the ecliptic), inclined relative to the celestial equator; and assuming that the size of the Earth is negligible as compared its distance to the Sun, it is possible to develop a very simple geometrical analysis of the length of days and nights, for any place on the surface of the Earth. It is possible to teach such an analysis to students in elementary school and high school.

Introdução

No século XVI, Copérnico propôs um modelo astronômico heliocêntrico, que acabou se tornando aceito quase universalmente, no século seguinte. Costuma-se considerar que o sistema geocêntrico antigo, defendido por Ptolomeu, foi totalmente superado pela teoria copernicana e que não tem nenhum interesse atual, a não ser sob o ponto de vista histórico.

Este trabalho vai procurar mostrar que a teoria antiga (geocêntrica) sobre a duração do dia e da noite era muito mais simples do que a moderna, e sugerir que esse é o motivo pelo qual, hoje em dia, apenas os astrônomos estudam esse assunto, que era no entanto parte da cultura geral na Antigüidade e na Idade Média. Irá também advogar a possibilidade e a importância de voltar a ensinar esse assunto, nas escolas e nas universidades.

A duração dos dias

As durações da noite e do dia não são iguais entre si, a não ser em datas especiais. Na primavera, há uma única data em que a duração da noite é igual à do dia (equinócio de primavera); o mesmo acontece durante o outono. Ao longo do restante do ano, a duração dos dias varia. Há uma data, no inverno, na qual a noite tem a maior duração de todo o ano (solstício de inverno). Do inverno ao verão, os dias se tornam progressivamente mais longos e as noites mais curtas, atingindo o máximo no solstício de verão. O inverso ocorre do verão para o inverno. O solstício de inverno do hemisfério norte corresponde ao solstício de verão do hemisfério sul, e vice-versa.

De acordo com nossa concepção atual (heliocêntrica), a mudança das estações e a variação da duração do dia são devidos ao movimento da Terra em torno do Sol. Segundo a teoria atual, o eixo de rotação da Terra está inclinado em relação ao plano de sua órbita e, por isso, em certas épocas a região norte recebe iluminação mais forte, e em outras épocas a região sul recebe mais luz solar. O maior aquecimento de um dos hemisférios da Terra no verão deve-se à menor obliquidade dos raios solares, e à maior duração dos dias¹.

Durante a primavera e o outono, tanto o hemisfério norte quanto o sul recebem a luz solar com a mesma obliquidade, as durações dos dias e das noites são semelhantes, e a temperatura é moderada. Nos equinócios, os raios solares aquecem mais fortemente o equador terrestre.

Cada ponto da superfície da Terra dá uma volta em torno do eixo terrestre em 24 horas. Durante uma parte desse tempo, esse ponto fica em uma região clara (dia) e durante outra parte, fica em uma região escura (noite). As durações do dia e da noite dependem da posição da Terra na sua órbita (e, por isso, varia ao longo do ano); e da latitude geográfica do ponto considerado (e, por isso, é diferente nas diversas regiões da Terra, na mesma data).

¹ Muitas obras didáticas elementares (e muitos professores) ensinam, erroneamente, que a mudança das estações é devida à variação da distância entre a Terra e o Sol, por causa da forma elíptica da órbita terrestre. Essa explicação é claramente errônea – se fosse correta, seria verão ao mesmo tempo nos dois hemisférios.

Para calcular a duração do dia e da noite, é preciso levar em conta a inclinação do eixo da Terra, o movimento da Terra em torno do Sol, o movimento de rotação da Terra e a latitude geográfica. É um problema geométrico complexo, porque envolve uma situação tridimensional (rotação de cada ponto de uma esfera) dentro de outra situação tridimensional (movimento orbital da Terra, com eixo oblíquo).

Hoje em dia, não se ensina a calcular a duração do dia e da noite nem nos cursos superiores de matemática nem nos de física. Apenas os astrônomos aprendem o método de fazer esses cálculos. A maioria das pessoas nem tem idéia sobre a teoria em que esses cálculos se baseiam.

A duração dos dias e o ciclo anual

Na Idade Média e no Renascimento (antes da revolução Copernicana) todos os cursos universitários ensinavam a teoria básica que permitia compreender (e, em alguns casos, calcular) a duração do dia e da noite. A teoria geocêntrica da duração do dia e da noite é muito mais fácil de entender e de ser desenvolvida matematicamente do que a teoria heliocêntrica – e proporciona resultados *corretos*.

O modelo geométrico antigo mais básico utilizado para compreender a variação da duração dos dias e das noites podia ser visualizado utilizando-se uma *esfera armilar* (Fig. 1), que representa a relação entre a Terra e os astros (especialmente o Sol). Os cálculos da duração do dia e da noite podiam ser feitos utilizando-se um “computador” analógico, chamado de *astrolábio* (que também servia para várias outras coisas).

O fenômeno da variação da duração dos dias era bem conhecido pelos povos da Antigüidade. O dia mais curto do ano (solstício de inverno) e o dia mais longo do ano (solstício de verão) eram épocas especiais, nas quais eram realizadas festas religiosas.

Em cada ano, o mundo biológico passa por um ciclo de estações, acompanhando fenômenos astronômicos. O ciclo anual não tem um início nem um fim, mas em muitas civilizações considerava-se que ele começava no “ano novo”, que era celebrado como o final de uma fase do mundo e o início de outra. O início de um novo ciclo anual era escolhido, muitas vezes, na época do *solstício de inverno* – a noite mais longa e o dia mais curto do ano, pois nessa época os dias são frios, o Sol parece fraco, plantas e animais estão morrendo; há uma necessidade de renovar as forças da natureza e de reiniciar o ciclo anual de vida e morte. O objetivo dos rituais de “ano novo” era o de ajudar a superar a decadência (trevas) do ciclo anterior, e iniciar um novo período de vida, de luz, de força. Havia outras festas religiosas realizadas no solstício de verão, nos equinócios e em datas intermediárias entre os solstícios e equinócios. Essas datas, que estão associadas ao movimento aparente do Sol e à duração dos dias e das noites, eram parte integrante da cultura antiga.

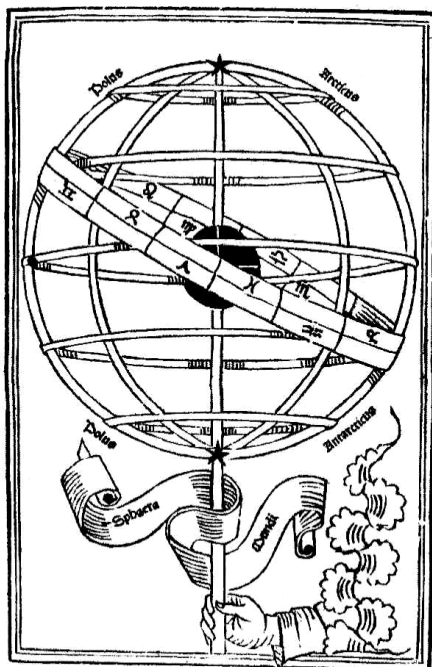


Fig. 1 – Esfera armilar (Sacrobosco 1482, frontispício).

Os movimentos do Sol

Para compreender esse fenômeno, os antigos desenvolveram uma análise dos movimentos do Sol, na qual se supõe que a Terra está parada no centro do universo.

Em cada dia, o Sol (juntamente com os outros astros) parece descrever um movimento circular em torno da Terra. Esse movimento diário do Sol era estudado através de instrumentos de sombra (“gnomon”), dos quais se originaram os relógios solares (ver por exemplo Vitruvius 1969, vol. 9, livro 9, caps.1 e 7). Basta uma simples estaca vertical cravada no solo, em uma superfície horizontal, para se poder estudar o movimento diário do Sol, marcando-se no chão as sucessivas posições da sombra da ponta do bastão. Nos momentos do nascimento e do por do Sol, evidentemente, essas sombras são muito alongadas, e apenas é possível determinar-se suas direções, mas não a extremidade da sombra. Analisando-se essas sombras, pode-se ver que elas são fáceis de compreender supondo-se que o Sol descreve círculos em torno da Terra – mas

círculos que estão inclinados em relação ao plano horizontal, ou seja, que geralmente não passam pela direção vertical, ao meio-dia.

Ensina-se geralmente que o Sol nasce a leste e se põe a oeste – e, portanto, a sombra do gnomon teria direção oeste no nascimento do Sol, e leste durante o por do Sol. No entanto, o Sol não nasce nem se põe todos os dias na mesma direção; ele *não* nasce sempre a leste nem se põe sempre a oeste. Se registrarmos no chão as linhas que marcam as sombras do gnomon durante o nascimento e o por do Sol em um mesmo dia, podemos obter a direção norte-sul, que é a bissetriz dessas duas linhas (Fig. 2). A direção leste-oeste é perpendicular à direção norte-sul, e não coincide com as direções de nascimento e por do Sol (exceto nos dias de equinócio).

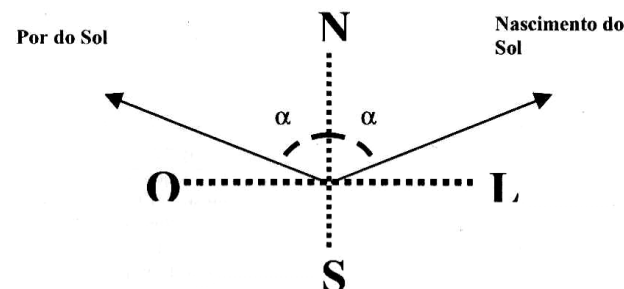


Fig. 2 – Relação entre os pontos cardeais e as direções de nascimento e ocaso do Sol.

Durante o ano, a direção em que o Sol nasce e se põe vai mudando, sua trajetória circular no céu tem diferentes inclinações, e a duração do dia e da noite também muda. Aparentemente o Sol descreve círculos em torno da Terra, mas esses círculos oscilam para o Norte e para o Sul durante o ano. Todas essas coisas estão associadas entre si.

Quando a posição do Sol é comparada à das estrelas, verifica-se que, durante o ano, o Sol atravessa o centro da faixa do zodíaco (eclíptica), que é inclinada em relação ao equador celeste. O círculo em que o Sol se move está inclinado aproximadamente $23^{\circ} 30'$ em relação ao equador celeste. Metade da eclíptica fica ao norte do equador celeste e a outra metade fica ao sul do equador celeste. Assim, por causa desse movimento, a posição do Sol estará mais ao norte ou mais ao sul, em cada época do ano.

Os fenômenos solares podem ser explicados supondo-se que o Sol se move em um círculo que passa pelo centro do Zodíaco, inclinado em relação ao eixo celeste (como mostrado na esfera armilar, Fig. 1), completando uma volta por ano, ao mesmo tempo em que gira em torno da Terra. Note-se que esse esquema, representado pela esfera armilar, não descreve o que se vê. Trata-se de um modelo geométrico para explicar o que é observado. É um modelo teórico bastante sofisticado, capaz de explicar muitos aspectos do movimento do Sol.

Enquanto se desloca pelo zodíaco, o Sol gira todos os dias em relação à Terra. Temos, portanto, uma série de movimentos praticamente circulares em cada dia, mas esses círculos vão se deslocando para o norte ou para o sul, gradualmente. O movimento anual do Sol em torno da Terra seria, portanto, uma trajetória espiralada.

Utilizando-se esse tipo de análise do movimento do Sol é possível calcular como varia a duração do dia e da noite ao longo do ano, relacionando essa duração com a posição do Sol no zodíaco e com a posição em que ele nasce e se põe naquela data.

O *Tractatus de Sphaera* de Sacrobosco

Os conhecimentos básicos (geocêntricos) sobre a duração do dia e da noite já eram conhecidos na Antiguidade, tendo sido descritos em obras como o *Almagesto* de Ptolomeu. Durante um período da Idade Média, esses conhecimentos foram esquecidos, na Europa, e depois recuperados por influência dos árabes. Eles foram popularizados no período final da Idade Média, através do *Tratado sobre a Esfera* de Johannes de Sacrobosco (Dreyer 1953, cap. 10).

Johannes de Sacrobosco (ou John of Holywood) nasceu na Inglaterra (ou Escócia) no final do século XII, em data desconhecida (Daly 1970). Foi professor de Filosofia em Paris, onde morreu em 1244 ou 1256. Sabe-se pouquíssimo sobre sua vida. São conhecidas várias obras escritas por ele: uma aritmética, um livro de cômputo de festas religiosas, um tratado sobre o astrolábio e o *Tractatus de Sphaera*.

O *Tratado sobre a Esfera*, escrito aproximadamente em 1230, é um texto não matemático, que apresenta uma visão geral sobre a estrutura do universo e explica os principais fenômenos astronômicos. Serviu de base para os estudos universitários de astronomia, até época de Copérnico (Gingerich 1988). Foram publicadas mais de 200 edições dessa obra (muitas vezes com comentários de outros autores), após invenção da imprensa. A primeira edição impressa é de 1472. A última edição em latim, publicada ainda como texto astronômico (e não como curiosidade histórica) é de 1673 – ou seja, posterior às mortes de Galileu e Descartes. Em 1537, o matemático português Pedro Nunes publicou uma importante tradução da obra de Sacrobosco², assim como houve traduções para vários outros idiomas (alemão, francês, italiano, etc.).

O pequeno livro³ (poucas dezenas de páginas) tem quatro capítulos. O terceiro é intitulado: “De como nascem e se põem os signos, sobre a diversidade dos dias e noites que acontecem aos que habitam em diversas localidades, e sobre a divisão dos climas”. É nessa parte da obra que Sacrobosco apresenta a teoria básica que permite compreender as variações de duração do dia e da noite. A compreensão da teoria é facilitada, em algumas versões do *Tratado sobre a Esfera*, por um grande número de diagramas⁴.

² Antes da tradução de Pedro Nunes houve duas outras, das quais só foi preservado um único exemplar. Há uma edição recente do trabalho de Nunes: Sacrobosco, 1991.

³ O texto completo tem cerca de 9.000 palavras e, quando transcrito, cabe em menos de 20 páginas, utilizando-se uma formatação ordinária (papel A4, espaço simples, letra tamanho 12).

⁴ Não existe nenhum manuscrito autógrafo de Sacrobosco, por isso não podemos saber quais eram as figuras que o autor havia introduzido originalmente. Alguns manuscritos medievais da obra são amplamente ilustrados, outros possuem poucas figuras, ou mesmo nenhuma. O texto da obra se refere explicitamente a três figuras, apenas (e nenhuma delas referente ao assunto que nos interessa). As edições e os comentários ao *Tratado da esfera* logo supriram essa deficiência, facilitando muito a compreensão dos poucos aspectos mais

A duração do dia e da noite, segundo Sacrobosco

Embora se soubesse que o Sol está muito mais próximo da Terra do que as estrelas, e que sua distância à Terra não era constante, projetava-se sobre a esfera celeste (onde pareciam estar as constelações) o movimento do Sol. Por isso, considerava-se que, ao longo do ano, o Sol se movia no centro do zodíaco, no círculo da eclíptica.

Ao mesmo tempo em que se move ao longo do zodíaco, o Sol gira em torno da Terra, uma vez por dia. Por isso, sua trajetória é constituída por centenas de círculos (ou espiras) na esfera celeste, ao longo do ano (Fig. 3).

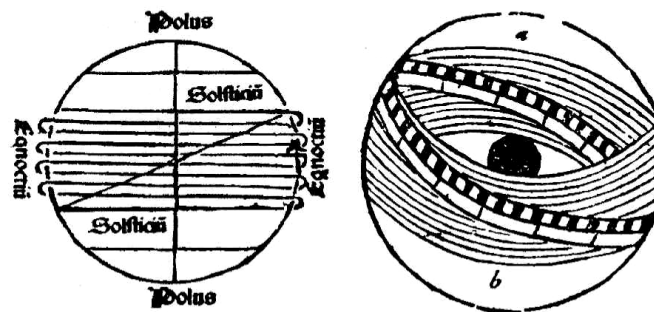


Fig. 3 – O movimento anual do Sol ao longo da eclíptica, e suas voltas diárias em torno da Terra (Sacrobosco 1485, fol. 12r; Sacrobosco 1561, fol. 35v).

Observando esse movimento da Terra, vê-se que o Sol oscila para o norte e para o sul, ao longo do ano. Os extremos desse movimento, correspondentes aos solstícios, coincidem com os pontos extremos da eclíptica. Os círculos extremos percorridos pelo Sol são os trópicos (celestes) de Câncer (ao norte) e de Capricórnio (ao sul). O círculo médio coincide com o equador (celeste), e quando o Sol o descreve, ocorre o equinócio.

Deve-se notar também que o Sol, movendo-se do primeiro ponto de Capricórnio através de Áries até o primeiro ponto de Câncer, sendo arrastado pelo firmamento, descreve 182 paralelos; esses paralelos, embora não sejam realmente círculos mas espirais, podem ser chamados de círculos sem que isso lhes faça violência, pois não há erro sensível nisso. Entre eles, estão os dois trópicos e a equinocial. Além disso, o Sol também descreve esses círculos sendo arrastado pelo firmamento, quando desce do

obscuras da obra de Sacrobosco (ver Gingerich 1999). Todas as ilustrações aqui utilizadas foram copiadas de edições impressas (séculos XV e XVI) do *Tratado da Esfera*.

primeiro ponto de Câncer através de Libra até o primeiro ponto de Capricórnio [...] (Sacrobosco, apud Thorndike 1949, p. 133).

Para analisarmos a duração dos dias e das noites, é necessário supor que, quando o Sol está acima do horizonte, é dia; quando o Sol está abaixo do horizonte, é noite.

[...] e esses círculos são chamados de círculos dos dias naturais⁵. Os arcos que estão acima do horizonte são os arcos dos dias artificiais, e os arcos abaixo do horizonte são os arcos das noites. (Sacrobosco, apud Thorndike 1949, p. 133).

Esse horizonte pode ser considerado como um plano tangente à superfície da Terra, no lugar onde está o observador (Fig. 4). No entanto, para poder analisar mais facilmente a duração dos dias e das noites, pode-se considerar que o tamanho da Terra é muito pequeno (desprezível) considerado com a esfera celeste. O horizonte de cada ponto da Terra pode ser representado então como se fosse um plano passando pelo centro do universo.

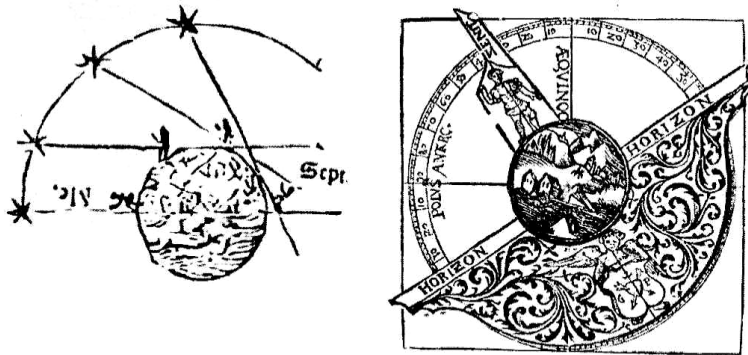


Fig. 4 - O horizonte, em cada lugar da Terra, é um plano tangente à sua superfície. No entanto, para fins práticos, pode-se considerar como horizonte um plano que passa pelo centro da Terra, perpendicular à vertical local (Sacrobosco 1519, fol. 8r; Apianus 1544, fol. 10v).

Se uma pessoa está sobre o equador terrestre, seu horizonte passa pelos pólos celestes e corta ao meio todos os círculos percorridos pelo Sol (Fig. 5). O Sol estará

⁵ Dia natural: o tempo entre dois nascimentos (ou dois ocasos) sucessivos do Sol. O "dia artificial" é a parte clara do dia.

acima do horizonte durante metade do tempo, e abaixo do horizonte na outra metade. Portanto, a duração do dia será igual à duração da noite, sempre (em qualquer época do ano), para essas pessoas. Portanto, para quem vive no equador, todos os dias e noites são iguais entre si (não há dias mais longos e outros mais curtos).

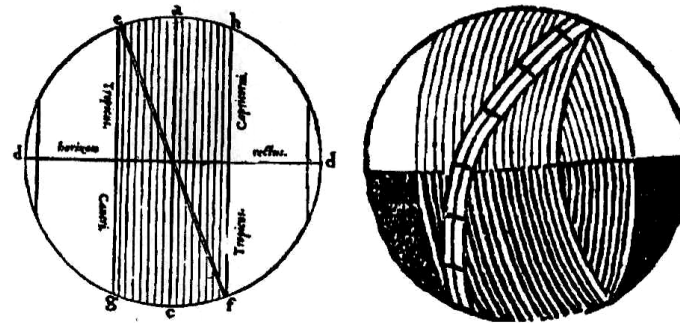


Fig. 5 - Para pessoa que vivem na região equatorial, todos os círculos que o Sol percorre ao longo do ano são cortados ao meio pelo plano do horizonte, por isso as durações do dia e da noite são iguais. (Finé 1555, fol. 31r; Sacrobosco 1561, fol. 37v)

Porém, se a pessoa não está sobre o equador, seu horizonte não corta ao meio todos os círculos percorridos pelo Sol. Portanto, a não ser no caso do círculo médio, o Sol ficará tempos desiguais acima e abaixo do horizonte, fazendo com que a duração do dia seja diferente da duração da noite (Fig. 6). Quanto mais distante do equador estiver a pessoa (ou seja, quanto maior a latitude, ou altura do pólo), maior será a diferença entre as durações do dia e a noite, nos solstícios, como se pode ver nos diagramas, pela diferença entre a parte do círculo que fica na região acima do horizonte, e a parte que fica abaixo do horizonte.

Qualquer que seja a latitude, no entanto, o círculo central percorrido pelo Sol é dividido em dois pelo horizonte. Portanto, quando o Sol percorre esse círculo, o dia e a noite são iguais, em todos os pontos da Terra (equinócios).

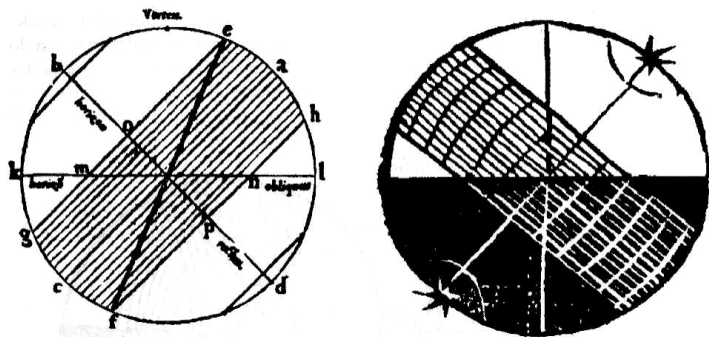


Fig. 6 – Para pessoa que não vivem na região equatorial, os círculos que o Sol percorre ao longo do ano não são cortados ao meio pelo plano do horizonte, por isso as durações do dia e da noite são diferentes – exceto no caso do equinócio. (Finé 1555, fol. 32v; Sacrobosco 1561, fol. 36v)

O cálculo da duração do dia e da noite

Para achar a duração do dia e da noite, em qualquer latitude e em qualquer dia do ano, é necessário determinar a razão entre as partes do círculo percorrido pelo Sol que ficam acima e abaixo do horizonte. O livro de Sacrobosco explica tudo isso de forma qualitativa, mas não apresenta o processo matemático para fazer os cálculos.

O método geométrico pode ser analisado quantitativamente de modo elementar.

O primeiro passo é determinar a posição do Sol no círculo da eclíptica, no dia específico desejado. Isso pode ser feito a partir de um modelo teórico simplificado, supondo-se que a velocidade do Sol na eclíptica é constante⁶. Consideremos, por exemplo, o dia 15 de abril de 2003. Essa data está 25 dias após o equinócio de outono, e utilizando-se uma regra de três pode-se estimar que o Sol já caminhou 24° ao longo da eclíptica, desde o equinócio⁷. Basta dividir o número de dias pela duração aproximada do ano (365 dias) e multiplicar por 360°:

⁶ Desde antes de Hiparco, já se sabia que a velocidade angular do Sol na eclíptica (observando-se da Terra) não era constante, e que os tempos entre os solstícios e equinócios não eram de um quarto de ano. Hiparco conseguiu explicar essa irregularidade, e calcular de forma muito precisa a posição do Sol na eclíptica em cada dia do ano, utilizando um modelo de círculo excêntrico. Os tempos gastos pelo Sol nos quatro quadrantes foram determinados por Hipparchos: do equinócio de primavera ao trópico de verão [solstício] – 94½ dias; do trópico de verão ao equinócio de outono – 92½ dias; do equinócio de outono ao trópico de inverno – 88 dias e um oitavo; do trópico de inverno ao equinócio de primavera – 90 dias e um oitavo.

⁷ Esse é um método aproximado. Há outros melhores, que proporcionam excelentes resultados, apesar de utilizarem o ponto de vista geocêntrico.

$$\phi = (25/365) \cdot 360^\circ = 24^\circ$$

A partir desse dado, é necessário calcular quanto o Sol se afastou para o norte (ou para o sul) em relação ao equador celeste. Do equinócio até o solstício de inverno, o Sol se desloca 23,5° para o norte, em relação ao equador. No dia 15/04, tendo percorrido 24° da eclíptica, ele havia se deslocado $\alpha = 9,3^\circ$ para o norte, em relação ao equador. Esse ângulo pode ser calculado aproximadamente como:

$$\alpha \cong 23,5^\circ \sin \phi$$

De forma exata, o ângulo α é calculado como⁸:

$$\sin \alpha = \sin 23,5^\circ \sin \phi$$

O cálculo desse parâmetro pode ser substituído por uma medida astronômica simples, no caso de regiões próximas ao equador: no dia em que se quer prever a duração do dia e da noite, deve-se determinar a direção do nascer ou do por do Sol. O ângulo entre essa direção e o leste (ou oeste) é o ângulo α .

O segundo parâmetro necessário é a latitude do lugar considerado, que é sua distância angular ao equador. Em princípio, a determinação da latitude é feita através de observações astronômicas. Um dos métodos utilizados na Antiguidade empregava medidas de sombras realizadas nos dias dos equinócios⁹; porém, pode-se simplesmente olhar em um mapa as coordenadas da cidade considerada. Por exemplo: a latitude da cidade de Rio Claro é $\lambda = -22,4^\circ$.

Conhecendo-se esses dois ângulos, é possível agora fazer os cálculos necessários¹⁰.

Consideremos um círculo representando a esfera celeste (Fig. 7). O ponto M indica a posição do Sol (projetado na esfera celeste) no dia considerado. Durante o dia e a noite, o Sol irá percorrer uma circunferência cuja projeção na figura é a reta MN. A Terra é representada pelo ponto central O, e a reta OH indica o plano do horizonte no local considerado. Esse plano corta o círculo MN percorrido pelo Sol em dois pontos opostos, B e B'. A parte do círculo MN que vai de M até BB' está abaixo do horizonte, e representa a noite; e a parte do círculo MN que vai de N até BB' está acima do

⁸ No *Almagesto*, Ptolomeu apresentou uma dedução de uma relação equivalente a esta, e forneceu uma tabela numérica dos ângulos entre a eclíptica e o equador celeste (Ptolemaeus 1952, livro I, cap. 14).

⁹ No horário em que o Sol está mais próximo à vertical local (ou seja, quando ele passa pelo plano do meridiano local, aproximadamente ao meio-dia), é o horário em que a sombra de um gnomon será a menor possível. Medindo-se essa sombra, no dia do equinócio, a razão entre o tamanho da sombra e a altura do gnomon será igual à tangente da latitude do lugar.

¹⁰ O método de cálculo é apresentado por Ptolomeu, no *Almagesto*, de um modo bastante complicado, para nossos padrões atuais. No livro 2 dessa obra, ele mostra como calcular a duração do dia mais longo (ou mais curto) do ano, em função da latitude (ou vice-versa). No livro 3, capítulo 9, ele analisa a duração de qualquer dia do ano, em função da latitude (Ptolemaeus 1952). Não há, na obra de Ptolomeu, diagramas geométricos tão sugestivos quanto os que ilustram a obra de Sacrobosco.

horizonte, e representa o dia. Basta, agora, calcular os comprimentos relativos dessas duas partes da circunferência.

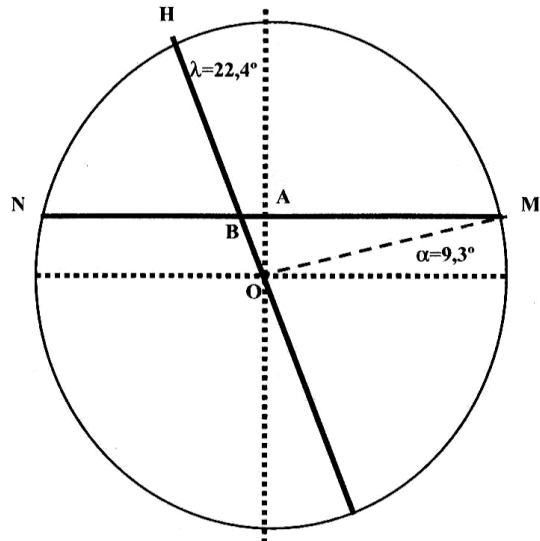


Fig. 7 – O círculo MN representa a esfera celeste. O ponto M indica a posição do Sol (projetado na esfera celeste) no dia considerado e o ângulo α é a sua distância angular ao plano do equador celeste. Durante o dia e a noite, o Sol irá percorrer uma circunferência cuja projeção na figura é a reta MN. A Terra é representada pelo ponto central O, e a reta OH indica o plano do horizonte no local considerado. Esse plano corta o círculo MN percorrido pelo Sol em dois pontos opostos, B e B'. A parte do círculo MN que vai de M até BB' está abaixo do horizonte, e representa a noite; e a parte do círculo MN que vai de N até BB' está acima do horizonte, e representa o dia.

Chamemos o raio OM da esfera celeste de R, e seja $r = AM$ o raio do círculo MN percorrido pelo Sol. Teremos:

$$AM = r = R \cdot \cos \alpha$$

Por outro lado, vemos que

$$OA = R \cdot \sin \alpha$$

Portanto,

$$AB = OA \cdot \tan \lambda = R \cdot \sin \alpha \cdot \tan \lambda = r \cdot \tan \alpha \cdot \tan \lambda$$

Essa relação não é válida se $\alpha + \lambda > 90$ graus.

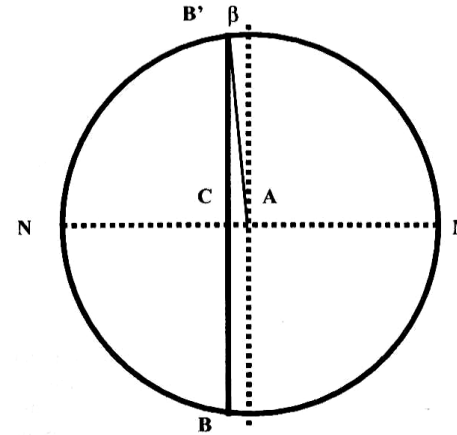


Fig. 8 – A circunferência MBNB' representa a trajetória do Sol no dia considerado. Essa trajetória é cortada pelo horizonte local segundo a reta BB'. O arco BNB' da circunferência representa o dia, e o arco BMB' representa a noite.

Agora, consideremos o círculo MN percorrido pelo Sol, e vamos determinar a razão entre o dia e a noite (Fig. 8).

A distância que, no diagrama anterior, correspondia a AB é, agora, AC. Como $AB = AM = r$, teremos que:

$$AC = r \cdot \sin \beta$$

Como já havíamos determinado, $AC = r \cdot \tan \alpha \cdot \tan \lambda$. Portanto,

$$\sin \beta = \tan \alpha \cdot \tan \lambda$$

Utilizando os valores de α e λ que haviam sido indicados acima, temos que β tem o valor de $4,0^\circ$.

Vemos, pelo diagrama, que a duração do dia corresponde ao arco BNB' = δ , que é igual a 180° menos o dobro do ângulo β , ou seja:

$$\delta = 180^\circ - 2\beta$$

Como o círculo completo (360°) corresponde a 24 horas, a duração T do dia será:

$$T = (24 \text{ h} / 360^\circ) \delta = (24 \text{ h} / 360^\circ)(180^\circ - 2\beta) = 12 \text{ horas} - 2\beta.(1 \text{ hora}/15^\circ)$$

A duração T' da noite será o valor complementar, ou seja,

$$T' = 12 \text{ horas} + 2\beta.(1 \text{ hora}/15^\circ)$$

Utilizando o valor acima indicado para β , temos o seguinte valor para a duração do dia, em Rio Claro, no dia 14 de abril:

$$T = 12 \text{ horas} - 2\beta.(1 \text{ hora}/15^\circ) = 12 \text{ horas} - 32 \text{ minutos} = 11 \text{ h } 28 \text{ min}$$

Limitações

O processo acima indicado para o cálculo da posição do Sol na eclíptica é aproximado (há métodos melhores); ele introduz um pequeno erro na duração do dia. Sob outros aspectos, o método é correto e produz resultados muito bons.

A análise geométrica utilizada é bastante simples, mas não é elementar. Demorou a ser descoberta, e era desconhecida pelo grande astrônomo grego Eudoxo de Cnidos, um contemporâneo de Platão e Aristóteles (século IV a.C.). Eudoxo utilizava um método muito pior, copiado de astrônomos babilônios, para avaliar a mudança da duração dos dias: uma aproximação linear, que supunha que a cada dia, ao longo do ano, a duração dos dias aumentava ou diminuía exatamente o mesmo valor (na latitude que ele estudou, uma variação de 4/3 de minuto por dia)¹¹.

O método geométrico acima indicado para o cálculo da duração do dia e da noite foi desenvolvido (aparentemente pela primeira vez) por Theodosios, de Bythinia (que viveu aproximadamente entre 160 – 90 a.C.). Sabe-se que Theodosios escreveu pelo menos três obras: *Esféra*, contendo teoremas geométricos básicos; *Sobre as habitações*, que descrevia os fenômenos diferentes observados, conforme a latitude; e *Sobre os dias e as noites*, onde analisa as durações do dia e da noite (Tannery, 1893, pp. 35-42). O método de cálculo da duração dos dias e das noites foi também apresentado por Ptolomeu (séc. II d.C.) em sua obra *Almagesto*; e a sua *Geografia* discute o tema, sem no entanto apresentar os métodos de cálculo.

Muitas outras obras astronômicas antigas tratam da questão da duração dos dias e das noites. Porém é curioso que, mesmo nas obras mais “didáticas”, como a de Geminus e a de Vitruvius, não se encontra uma explicação adequada do método de determinar essas durações (Geminus 1975, livro 6; Vitruvius 1969, livro 9, cap. 3).

Embora o método apresentado seja matematicamente correto, deve-se observar que os conceitos de “dia” e “noite” pressupostos nesse método de cálculo correspondem apenas à diferença geométrica entre uma posição do Sol acima do horizonte e uma

¹¹ Ver a *Arte de Eudoxo*, no. 5 apud Tannery 1893, p. 284.

posição abaixo do horizonte local. No entanto, o céu fica claro durante mais tempo: ele fica claro antes que o Sol apareça acima do horizonte, e continua claro mesmo depois que o Sol se põs. Esse efeito se dá porque o Sol, mesmo abaixo do horizonte, continua a iluminar o céu acima de nossas cabeças durante algum tempo. A duração do crepúsculo também pode ser calculada geometricamente, mas não será discutida aqui.

O processo de cálculo acima indicado pode ser automatizado através de dispositivos mecânicos. Os astrolábios (conhecidos provavelmente a partir do séc. II d.C.) permitiam fazer esse tipo de cálculo (entre outros).

O ensino da duração dos dias e das noites

Como foi indicado acima, durante uma parte da Idade Média esses métodos foram esquecidos na Europa. A obra de Sacrobosco teve o valor de apresentar o processo de cálculo da duração dos dias e das noites de modo geométrico simples, de fácil compreensão. As universidades medievais ensinavam esses conhecimentos a todos, pois a astronomia era parte do currículo universitário básico de “artes liberais” (Charle e Verger 1996, p. 13). Esse currículo compreendia o *trivium* (gramática, lógica, retórica) e o *quadrivium* (geometria, astronomia, aritmética, música). A obra de Sacrobosco se tornou rapidamente um dos textos mais utilizados nos cursos de astronomia, divulgando (entre outras coisas) a compreensão da duração dos dias e das noites.

Com a revolução copernicana, esse aspecto da astronomia não teve nenhum aperfeiçoamento, pois o sistema heliocêntrico dificultava a análise desse tipo de problemas. Até hoje, quando os astrônomos analisam a duração dos dias e das noites, utilizam um sistema de referência geocêntrico, para simplificar a análise, embora não se aceite que a Terra esteja em repouso no centro do universo. Assim, embora no caso do movimento dos planetas a teoria heliocêntrica tenha constituído uma simplificação notável, ela não ajudou a difundir a compreensão daqueles fenômenos tão familiares. Seria possível ensinar aos estudantes de hoje os métodos antigos de cálculo da duração do dia e da noite?

Analisando-se o método exposto acima, vê-se que ele depende, por um lado, de um modelo geométrico do movimento do Sol em torno da Terra e, por outro lado, de uma análise trigonométrica. Uma das equações utilizadas refere-se à trigonometria esférica, que não atualmente só é estudada por astrônomos, matemáticos e cartógrafos. Mas isso não é uma barreira intransponível. Compreendendo-se as idéias fundamentais do método, a relação trigonométrica relevante pode ser introduzida de forma fácil, seja deduzindo-a (no caso de estudantes universitários), seja apresentando-a e explicando-a sem deduzi-la (no caso de estudantes de nível médio), ou mesmo trabalhando com uma aproximação, como foi indicado acima.

Mesmo no nível fundamental é possível ensinar não apenas os conceitos básicos, mas também realizar os cálculos das durações dos dias e das noites. Como já foi assinalado, antigamente havia dispositivos mecânicos (os astrolábios) que permitiam fazer esses cálculos automaticamente. Hoje em dia, sem se dispor de um astrolábio, é possível fazer os “cálculos” através de desenhos em escala, sem ser necessário conhecer as equações trigonométricas. Até mesmo os aspectos de detalhe (como a análise do movimento irregular do Sol em relação ao zodíaco) podem ser trabalhados quantitativamente por meio de desenhos. Por isso, o cálculo da duração dos dias pode

ser trabalhado até mesmo no nível do ensino fundamental (nas últimas séries, evidentemente), sem aguardar o aprendizado da trigonometria no nível médio.

Parecem não existir barreiras matemáticas intransponíveis; mas existe a dificuldade de utilizar uma abordagem geocêntrica, que é considerada errada. Isso pode produzir uma barreira conceitual ao aprendizado. Esse aspecto deve ser trabalhado pelo professor, que poderá aproveitar para transmitir alguns conceitos epistemológicos importantes, tal como a visão de que podemos ter uma teoria extremamente bem sucedida que não descreve, necessariamente, a realidade (instrumentalismo); e que, quando se consideram duas teorias conflitantes, uma delas pode ser superior à outra em um aspecto, mas inferior em outro.

Além de possível, o ensino desse tipo de conteúdo parece desejável, pois ele pode trazer uma importante contribuição educacional, em vários sentidos. Em primeiro lugar, a análise geométrica da duração dos dias permite esclarecer dúvidas e corrigir erros que costumam ser cometidos (pelos professores e em obras didáticas sobre geografia e ciências) a respeito do assunto. Em segundo lugar, trata-se de uma oportunidade para um trabalho interdisciplinar, envolvendo professores de matemática, ciências e geografia, aplicando a geometria a uma situação concreta, que pode ajudar a mostrar a importância da geometria na compreensão do mundo em que vivemos. Em terceiro lugar, mostrar que a antiga teoria geocêntrica permitia fazer importantes cálculos e prever corretamente fenômenos como este pode corrigir um preconceito muito difundido contra as teorias astronômicas antigas, e pode levar os estudantes (e seus professores) a perceber que os defensores das idéias consideradas “ultrapassadas” eram pessoas tão inteligentes quanto os que os derrotaram, rompendo assim com a visão anacrônica que desvaloriza tudo aquilo que não aceitamos mais.

Referências bibliográficas

- APIANUS, Petrus. *La cosmographie de Pierre Apian, libre tres utile, traictant de toutes les régions & pays du monde par artifice astronomique*. Nouvellement traduit de latin en françois et par Gemma Frisius. Anvers: chez Gregoire Bonte, 1544.
- CHARLE, Christophe; VERGER, Jacques. *História das universidades*. São Paulo: Editora da UNESP, 1996.
- DALY, John R. Sacrobosco, Johannes de. Vol. 12, pp. 60-63 in: GILLIESPIE, Charles Coulston (ed.). *Dictionary of scientific biography*. 16 vols. New York: Charles Scribner's Sons, 1970.
- DREYER, J. L. E. *A history of astronomy from Thales to Kepler*. 2ª. ed. New York: Dover, 1953.
- FINÉ, Oronce. *Orontii Finaei Delphinatis... De mundi sphaera, sive cosmographia, libri V*. Paris: M. Vascosanum, 1555.
- GEMINOS. *Introduction aux phénomènes*. Trad. Germaine Aujac. Paris: Belles Lettres, 1975.
- GINGERICH, Owen. Sacrobosco as a textbook. *Journal for the History of Astronomy* 19: 269-273, 1988.
- GINGERICH, Owen. Sacrobosco illustrated. Pp. 211-224, in: NAUTA, Lodi & VANDERJAGT, Arjo (eds.). *Between demonstration and imagination: Essays presented to John D. North*. Leiden: Brill, 1999.

- PTOLEMAEUS. *The almagest*. Trad. R. Catesby Tagliaferro. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1952. [Great Books of the Western Science, 16]
- SACROBOSCO, Johannes de. *Incipit sfera materialis*. [Venetiis]: Erhardi Ratdolt, 1485.
- SACROBOSCO, Johannes de. *Ioannis de Sacro Busto sphericum opusculum una cum additionibus nonnullis littera asparsim ubi interserte sint signatis*. Venetiis: Jacobus Pentius, 1519.
- SACROBOSCO, Johannes de. *Sphaera Ioannis de Sacro Bosco, emendata*. Lvtetia [Paris]: Gulielmum Cauellat, 1561.
- SACROBOSCO, Johannes de. *Tratado da esfera*. Trad. Pedro Nunes, atualizado por Carlos Ziller Camenietsky. São Paulo, Editora UNESP, 1991.
- TANNERY, Paul. *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*. Paris: Gauthier-Villars, 1893.
- THORNDIKE, Lynn. *The Sphere of Sacrobosco and its commentators*. Chicago: University of Chicago Press, 1949.
- VITRUVIUS. *De architectura*. Trad. Jean Soubiran. Paris: Belles Lettres, 1969. 10 vols.

Roberto de Andrade Martins

Grupo de História e Teoria da Ciência, Unicamp.
Caixa Postal 6059, 13081-970 Campinas, SP.
E-mail: Rmartins@ifi.unicamp.br