

Este arquivo contém o texto completo do seguinte trabalho:

MARTINS, Roberto de Andrade. A influência das geometrias não-euclidianas no pensamento físico do século XIX. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência* (13): 67-79, 1995.

Este arquivo foi copiado da biblioteca eletrônica do Grupo de História e Teoria da Ciência <<http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/>> da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), do seguinte endereço eletrônico (URL):

<<http://ghtc.ifi.unicamp.br/pdf/ram-52.pdf>>

Esta cópia eletrônica do trabalho acima mencionado está sendo fornecida para uso individual, para fins de pesquisa. É proibida a reprodução e fornecimento de cópias a outras pessoas. Os direitos autorais permanecem sob propriedade dos autores e das editoras das publicações originais.

This file contains the full text of the following paper:

MARTINS, Roberto de Andrade. A influência das geometrias não-euclidianas no pensamento físico do século XIX. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência* (13): 67-79, 1995.

This file was downloaded from the electronic library of the Group of History and Theory of Science <<http://www.ifi.unicamp.br/~ghtc/>> of the State University of Campinas (UNICAMP), Brazil, from following electronic address (URL):

<<http://ghtc.ifi.unicamp.br/pdf/ram-52.pdf>>

This electronic copy of the aforementioned work is hereby provided for exclusive individual research use. The reproduction and forwarding of copies to third parties is hereby forbidden. Copyright of this work belongs to the authors and publishers of the original publication.

A INFLUÊNCIA DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO PENSAMENTO FÍSICO DO SÉCULO XIX¹

ROBERTO DE ANDRADE MARTINS

RESUMO: O objetivo do presente artigo consiste em discutir de que modo as geometrias não-euclidianas foram empregadas na física antes do início do século XX, época em que elas, através da Teoria da Relatividade Geral, foram definitivamente incorporadas à ciência da natureza. Para isso, analisamos quais foram os primeiros cientistas e filósofos que, antes do século XIX, mas já dentro do período da Ciência Moderna especularam acerca da possibilidade do espaço possuir mais de três dimensões ou do tempo poder ser compreendido como uma quarta dimensão. Finalmente, são apresentadas as origens físicas das primeiras utilizações não-matemáticas das geometrias não-euclidianas, ainda no século passado.

ABSTRACT: We discuss some fundamental aspects of the first scientific and philosophical ideas about the number of dimensions one could attribute to space and time. We show also that non-euclidean geometries were introduced in the physical sciences before the formulation of General Relativity Theory. Finally, we present some considerations that regulated this introduction.

Introdução

Como é bem sabido, a geometria não-euclidiana é o formalismo matemático básico utilizado na teoria da relatividade geral. Poucos sabem, no entanto, que antes do desenvolvimento dessa teoria, já existiam várias tentativas de aplicar às ciências físicas alguns resultados da geometria não-euclidiana. O presente trabalho irá apresentar alguns dos aspectos sob os quais as geometrias não-euclidianas influenciaram a Física, antes do século XX².

A expressão “geometria não-euclidiana” será utilizada aqui em um sentido amplo, de modo a cobrir os vários aspectos que estão presentes na teoria da relatividade³, a saber:

- a noção de espaço-tempo;
- espaços geométricos com mais de três dimensões;
- espaços curvos (geometria não-euclidiana propriamente dita).

Na teoria da relatividade geral, utiliza-se a geometria diferencial como formalismo para trabalhar com as geometrias não-euclidianas (abordagem de Riemann). No entanto, quando as geometrias não-euclidianas foram desenvolvidas, não se utilizava tal abordagem e sim um tratamento “clássico”, análogo ao da

1 Trabalho apresentado no seminário: “Física no século XIX: perspectivas históricas e epistemológicas”, realizado no Fórum de Ciência e Cultura da UFRJ, 16/08/94.

2 Vários dos aspectos abordados neste trabalho podem ser encontrados também em obras como o livro de Max Jammer, *Concepts of space*, ou o de Roberto Bonola, *Non-euclidian geometry*. Vários aspectos, no entanto, são pouco conhecidos.

3 Seria possível analisar também vários outros aspectos interessantes da época, como as propostas de espaços descontínuos. No entanto, foram selecionados apenas aspectos que, posteriormente, foram integrados à teoria da relatividade.

quaternions são objetos com quatro componentes, constituindo uma generalização daquilo que atualmente chamamos de “vetores”. Hamilton desenvolveu uma álgebra especial para esses quaternions, mas percebeu que eles não admitiam algumas das propriedades dos vetores (como a definição de um produto de quaternions que produzisse outro quaternion). Em um outro sentido, também, os quaternions não são uma simples generalização dos vetores: a quarta componente dos quaternions tem as propriedades de um número imaginário, quando comparada com as outras componentes.

Todo o formalismo dos quaternions é exatamente aquilo que se precisa para a representação dos quadrvetores da teoria da relatividade especial. E, de fato, logo que Minkowsky desenvolveu a abordagem espaço-temporal dessa teoria, passou-se a utilizar os quaternions de Hamilton como um formalismo natural da teoria.

Ainda mais: o próprio Hamilton percebeu que os quaternions representavam um tipo de geometria de três dimensões espaciais e uma temporal (ver SYNGE 1921). Há vários pontos de sua correspondência e escritos inéditos onde isso pode ser notado:

O quaternion matemático (...) em linguagem técnica pode ser descrito como ‘tempo mais espaço’, ou ‘espaço mais tempo’, e nesse sentido ele possui - ou pelo menos envolve referência a - quatro dimensões.

Deixe-me sugerir um pensamento diretor, que talvez seja paradoxal, de que o tempo e o espaço são imaginários, um com relação ao outro (...) Qualquer expressão para as relações peculiares do espaço em formas do tempo (...) deve envolver uma aparente contradição (...) Será um ‘imaginário matemático’. Isto me parece ser a pista, o segredo do assunto.⁵

Essas vagas idéias de Hamilton, no entanto, não faziam nenhum sentido em meados do século XIX. Mesmo no final do século XIX, seus quaternions podiam ser entendidos como se referindo a um espaço tetra-dimensional, mas nada além disso (ver HATHAWAY 1897-1898). Lidas agora, vemos nelas a expressão do espaço-tempo de Minkowsky. Mas no tempo de Hamilton só podiam parecer um tipo de delírio.

Em 1885, aparece um curto artigo na revista *Nature*, assinado simplesmente “S.”. O título do artigo é “Four-dimensional space” e o texto se refere claramente ao tempo como uma quarta dimensão. É interessante notar que aí aparece pela primeira vez o termo “espaço-tempo” (ou melhor: o seu inverso, “tempo-espaço”):

Como esta quarta dimensão não pode ser introduzida no espaço, (...) exige-se um novo tipo de espaço para sua existência, que podemos denominar tempo-espaço.

O autor comenta rapidamente sobre idéias correspondentes às de linha de universo e mostra de modo simples que um hiper-cubo, no tempo-espaço, tem 16 vértices, 32 arestas e 24 faces.

O final do século XIX é um período fértil em especulações de todos os tipos (ver BORK 1964). É nessa época que surge o famoso romance de H. G. Wells, “The time machine”, que discute a possibilidade de viagens no tempo⁶. Nessa obra aparece uma clara referência ao tempo como uma quarta dimensão associada ao espaço, como por exemplo:

Qualquer corpo real possui extensão em quatro direções: deve possuir comprimento, largura, espessura e duração (...). Há realmente quatro dimensões, três que chamamos os planos do espaço, e uma quarta, tempo.

Nesse livro, a suposta possibilidade da viagem no tempo vem exatamente dessa idéia de que o tempo é uma quarta dimensão semelhante às do espaço: assim como é possível um deslocamento no espaço para um ou para outro sentido, também deveria ser possível um deslocamento no tempo, nos dois sentidos⁷.

5 As citações foram tiradas do artigo de Synge, que utilizou cartas e manuscritos de Hamilton citadas na sua biografia escrita por Graves.

6 Há uma outra obra anterior, menos conhecida, de Wells (1888) onde já são apresentadas idéias semelhantes: “Chronic argonauts”.

7 Na teoria da relatividade, a possibilidade de “viagens no tempo” ou de inversões causais surge de modo bem diferente: com velocidades superiores à velocidade da luz no vácuo (“táquions”), com universos em rotação ou buracos negros girando. Para uma discussão dos aspectos filosóficos das inversões causais na relatividade, ver: MARTINS 1986.

geometria euclidiana clássica (abordagem de Bolyai e de Lobatchewsky). Esses dois aspectos serão tratados, no presente estudo.

2 O Conceito de Espaço-Tempo

Na teoria da relatividade especial, as transformações de coordenadas espaciais e temporal obedecem a propriedades semelhantes às de uma geometria em quatro dimensões, com a diferença de que as coordenadas temporais devem ser multiplicadas por ic para poderem ser comparadas às espaciais. A percepção de que a relatividade especial pode ser tratada como uma geometria do espaço-tempo foi desenvolvida em 1908 por Hermann Minkowsky (1864-1909) que apresentou uma formulação baseada em quadrvetores. A generalização tensorial da relatividade restrita foi realizada pouco tempo depois por Max Abraham e por Arnold Sommerfeld, em 1910.

Muito antes disso, no entanto, é possível encontrar interessantes precedentes do uso de um conceito do tempo como uma quarta dimensão (ver ARCHIBALD 1914).

A referência mais antiga conhecida sobre tal conceito aparece na "Encyclopédie" de Diderot e d'Alembert, em 1754. Lá encontra-se um verbete sobre "Dimension", escrito pelo próprio d'Alembert, onde ele comenta inicialmente sobre as dimensões das grandezas geométricas, associando-as, como era comum, aos expoentes algébricos. Assim, termos representados por a^2 , a^3 podem ser considerados como sendo de duas e três dimensões; mas um termo como a^4 - que, por essa regra, seria um termo de quatro dimensões - não teria um significado geométrico, pois só é possível pensar em, no máximo, três dimensões. No entanto, d'Alembert logo depois comenta:

Afirmei acima que não era possível conceber mais de três dimensões. Um homem de espírito que conheço crê no entanto que se poderia considerar a duração como uma quarta dimensão e que o produto do tempo pela solidez seria de certo modo um produto de quatro dimensões.

Não se sabe se de fato existiu esse "homem de espírito" a quem d'Alembert se refere, ou se ele próprio seria o autor da idéia. De qualquer forma, nem d'Alembert nem outros autores da época parecem ter desenvolvido mais essa concepção do tempo como uma quarta dimensão.

Outro autor que apresenta, de passagem, considerações semelhantes é Lagrange. Em sua obra *Théorie des fonctions analytiques*, de 1797, encontra-se o seguinte trecho:

Como a posição de um ponto no espaço depende de três coordenadas retangulares x , y , z , essas coordenadas, nos problemas de Mecânica, serão consideradas funções de t . Assim, pode-se considerar a Mecânica como uma Geometria de quatro dimensões e a análise mecânica como uma extensão da análise geométrica.⁴

No caso dessa citação de Lagrange, é claro que se trata de uma analogia puramente formal, sem qualquer interpretação física. Pois pode-se empregar o mesmo raciocínio, por exemplo, para dizer que as três componentes do momento de uma partícula, na Mecânica, são igualmente funções do tempo e que, nesse sentido, essas três componentes e o tempo formam um tipo de geometria de quatro dimensões. Ou dizer que a densidade de um ponto de um meio contínuo é uma função das três coordenadas espaciais e que estas e a densidade formam um tipo de geometria de quatro dimensões.

Nessa época, nem existia ainda um conceito claro sobre as diferentes dimensões físicas. Com uma única exceção (o trabalho de Foncenex, citado mais adiante), os autores da época se referem apenas a dimensões geométricas, que diferem entre si em grau (uma dimensão, duas dimensões...) e não qualitativamente. O conceito de diferentes tipos de dimensão só começa a ser desenvolvido em 1822 por Fourier, que associa as unidades básicas das grandezas físicas (massa, tempo, espaço...) a diferentes tipos de dimensões físicas. No entanto, não existe no trabalho de Fourier nenhuma conjectura sobre o caráter especial do tempo ou sua analogia com uma quarta dimensão espacial.

O caso mais interessante ocorrido no século XIX foi o desenvolvimento da teoria matemática dos quatérnions, por William Rowan Hamilton (1805-1865). Sob o ponto de vista puramente formal, os

4 Utilizamos a citação de ARCHIBALD 1914.

Apesar de todos esses precedentes do conceito de espaço-tempo serem curiosos e anteciparem alguns dos aspectos da teoria da relatividade, há uma enorme distância entre elas e o espaço-tempo de Minkowsky.

3 Espaços com mais de Três Dimensões

A geometria clássica, como todos sabem, só estuda entes geométricos com até três dimensões. Os filósofos antigos que chegaram a discutir o número de dimensões do espaço (como Aristóteles) afirmam claramente que não é possível ir além da terceira dimensão. Essa posição foi aceita por todos, até o início do período moderno. Curiosamente, no século XVII, surge uma especulação sobre a existência de uma quarta dimensão do espaço no contexto de um estudo teológico (ver CAJORI 1926 a).

Em 1659, Henry More publicou a obra "The immortality of soul", onde uma quarta dimensão espacial aparece de modo extremamente curioso. Ele discute o problema do tamanho espacial da alma, que já havia produzido grandes controvérsias. Se a alma tem o tamanho do corpo da pessoa, o que ocorre quando a pessoa cresce, ou quando tem um membro amputado? Sua alma cresce ou diminui, também? É claro que tal suposição seria muito estranha. More assume que a alma tem sempre o mesmo tamanho próprio, porém consegue se adaptar ao tamanho do corpo da pessoa. Ele supõe que, além das três dimensões conhecidas, a alma tem um "quarto modo", uma espessura extra-espacial, ou "essential spissitude" [sic] que diminui ou aumenta quando as outras três dimensões aumentam ou diminuem, de tal forma que o "tamanho" total é constante, embora a parte do tamanho da alma que podemos observar (em três dimensões) varie.

Podemos compreender a idéia de More através de uma analogia simples. Suponhamos que queremos fazer com que um pedaço de borracha se adapte e cubra sempre uma certa figura (de duas dimensões), que aumenta ou diminui de tamanho. Isso pode ser feito, desde que a espessura da borracha varie (diminuindo quando ela é esticada e aumentando quando ela é comprimida). Do mesmo modo, a alma pode ocupar qualquer volume em três dimensões, desde que mude a sua espessura numa quarta dimensão.

Em sua obra de 1659, More utiliza as expressões "quarto modo" ou "espessura essencial", mas em uma versão revisada desse trabalho, em 1682, denominada *Enchiridion metaphysicum*, ele utiliza explicitamente o nome "quarta dimensão": "quarta haec dimensio, quam apello spissitudinem essentialem".

Como veremos, no século XIX houve também sugestões de que alguns fenômenos espirituais estariam associados a uma quarta dimensão espacial.

No século XVIII, Immanuel Kant discute, em uma obra do período pré-crítico (1747), a questão da dimensionalidade do espaço. Ele aceita a tridimensionalidade do espaço e a associa às propriedades da lei da gravitação universal: a força gravitacional varia com o inverso do quadrado da distância e isso está associado às três dimensões do espaço. Embora em nosso universo isso seja assim, Deus poderia, de acordo com Kant, haver criado outras forças e outros tipos de espaço (ver CAJORI 1926 a, 1926 b).

Kant não desenvolve seu raciocínio, mas podemos tentar completá-lo. Em um espaço tridimensional, qualquer coisa que se espalhe sem absorção, igualmente para todos os lados, a partir de um ponto central, irá diminuindo de intensidade com o inverso do quadrado da distância ao centro. Isso ocorre, por exemplo, com a luz ou o som. Se, pelo contrário, a luz ou o som só puderem se espalhar em duas dimensões (estando limitados ao espaço entre duas superfícies paralelas, por exemplo), a intensidade irá diminuir com o inverso da primeira potência da distância. De modo geral, em um espaço de n dimensões, a intensidade irá diminuir com o inverso da potência $n-1$. Por isso, se imaginarmos que a gravitação é produzida por algo que se espalha pelo espaço para todos os lados, sem absorção⁸, haveria uma correlação entre a dimensionalidade do espaço e o expoente que aparece na lei da gravitação⁹.

8 É claro que se pode negar que a gravitação seja algo dotado dessas propriedades. Nesse caso, deixaria de existir qualquer relação entre a dimensionalidade do espaço e a lei da gravitação. O teorema de Gauss e outros equivalentes seriam vistos, então, como um resultado que só se aplica, por acaso, ao espaço de três dimensões, não podendo ser aplicado a espaços diferentes.

9 O mesmo tipo de raciocínio é utilizado em trabalhos mais recentes, como por exemplo o artigo clássico de Ehrenfest sobre a dimensionalidade do espaço.

Apesar de precedentes isolados como os de More e Kant, é apenas na segunda metade do século XIX que se começa a discutir de forma sistemática a possibilidade de mais de três dimensões do espaço, assim como as consequências dessa hipótese nas ciências físicas.

Em 1875, Camille Jordan discutiu os princípios básicos do processo de rotação de um corpo em um espaço de quatro dimensões. Ele mostrou que, nesse caso, a rotação mais simples não é em torno de um eixo fixo (como no caso do espaço tridimensional), mas em torno de dois eixos fixos (ou seja, em torno de um plano). Estudando o caso particular da rotação de uma superfície de um sólido tridimensional em um espaço de quatro dimensões, Simon Newcomb mostrou que a parte interna da superfície pode ser transformada na sua parte externa (NEWCOMB 1878). Isso significa que, em quatro dimensões, não existe uma diferença essencial entre a parte interna e a externa dessa superfície.

Esses estudos eram, de modo geral, apenas discussões hipotéticas, abstratas, sem nenhuma intensão de descrever a realidade. Mas outros autores da época procuraram aplicar de modo mais realista tais análises.

Utilizando-se dessas e outras propriedades geométricas e topológicas do espaço de quatro dimensões, o astrônomo Johann Friedrich Zöllner (1834-1882) defendeu, a partir de 1878, que existem diversos fenômenos exibidos pelos médiuns espíritos que evidenciariam a existência real da quarta dimensão do espaço.

Nessa época, existiam diversos médiuns muito famosos (equivalentes ao recente fenômeno Uri Geller) que se diziam capazes de realizar fenômenos espantosos, com a ajuda dos espíritos de pessoas mortas¹⁰. Um suposto médium chamado Slade, estudado por Zöllner parecia ser capaz de fazer com que um objeto que estava trancado dentro de uma caixa, aparecesse fora da mesma, de um modo inexplicável ("apport"). Era também capaz de desatar nós cegos que haviam sido feitos no meio de uma corda, sem tocar suas extremidades (que ficavam presas em pontos distantes, em paredes opostas da sala). Fenômenos como esses, impossíveis sob o ponto de vista da física ordinária, podiam ser explicados supondo-se a existência de uma quarta dimensão espacial (ver ZÖLLNER 1878). Sob o ponto de vista matemático, o argumento era correto: não existem "nós cegos" em quatro dimensões e não existe a diferença entre a parte de dentro e a de fora de uma caixa tridimensional inserida em um espaço de quatro dimensões (ver NEWCOMB 1878).

Zöllner foi muito criticado, mas não sob o ponto de vista matemático e sim pela sua credulidade nos fenômenos espiritualistas¹¹. Raramente se encontra algum autor da época (como SCHUBERT 1893) que analisa de forma mais neutra (embora crítica) os argumentos de Zöllner. Por exemplo: Zöllner dizia que alguns médiuns tinham a capacidade de ver coisas distantes, através de paredes e obstáculos (clarividência) de forma análoga ao modo como podemos ver coisas distantes, atrás de obstáculos, erguendo-nos sobre um ponto mais elevado. Segundo Zöllner, isso seria explicado por um deslocamento do médium na quarta dimensão, de modo a ver "sobre" os obstáculos de nosso mundo tridimensional. Schubert aponta que essa explicação só seria aceitável se assumirmos que a luz se propaga tanto nas três dimensões que conhecemos como também na quarta dimensão assumida por Zöllner. Mas, nesse caso, como explicar que a energia luminosa se conserva, como se ela se propagasse apenas em três dimensões?

Nessa mesma época, houve utilizações menos esotéricas da hipótese de quatro dimensões espaciais. Lewis utilizou a geometria de quatro dimensões para facilitar o cálculo do momento de inércia de sólidos (LEWIS 1879). Em 1880, Cranz e Mach, independentemente, discutem a aplicação da idéia de um espaço pluridimensional à Química (ver SCHUBERT 1893 e NAGY 1890). Suponhamos a existência de átomos de dimensões bem definidas, que se combinam quimicamente por contato físico. Nesse caso, se tivermos três átomos, eles podem todos se tocar (dois a dois) se forem organizados em um sistema plano (bidimensional). Quatro átomos podem também todos se tocar (dois a dois) se forem dispostos no espaço tridimensional. Mas com mais de quatro átomos, seria necessária a existência de mais de três dimensões

10 Diversos cientistas respeitáveis (como William Crookes, na Inglaterra) se envolveram no estudo dos fenômenos espíritos, no final do século XIX, procurando estudá-los de modo científico. Quase todos aceitaram os fenômenos como autênticos e foram ridicularizados pela "ciência oficial", que nem sequer admitia o próprio estudo desses fenômenos.

11 Ver, por exemplo, a crítica de Tait (1878).

no espaço, para que todos eles pudessem se tocar. Assim, a suposição de moléculas químicas com mais de quatro átomos, em que todos os átomos estivessem em contato mútuo, exigiria um maior número de dimensões do espaço¹².

O autor que mais divulgou a idéia de espaços pluridimensionais, no final do século XIX, foi Charles H. Hinton. Ele publicou a partir da década de 1880 uma série de *Scientific romances* (claramente especulativos), onde explorava tal idéia (ver BORK 1964).

Em um desses trabalhos, publicado em 1884, Hinton tenta explicar a expansibilidade dos gases utilizando uma quarta dimensão¹³. Ele supõe que os gases são, na realidade, corpos dotados de volume constante, como os líquidos, mas que esse volume constante se estende em quatro dimensões. Quando um gás é comprimido, sua quarta dimensão aumenta e quando ele se dilata, a quarta dimensão diminui. Há, segundo Hinton, um tipo de força "lateral", que empurra o gás e tenta diminuir sua espessura na quarta dimensão, o que explica sua expansibilidade e a dificuldade em comprimi-lo. Seria algo equivalente a um líquido que, colocado sobre uma superfície plana, sujeito à gravidade (e desprezando-se a tensão superficial), tenta se espalhar e ocupar a maior área possível.

Idéias equivalentes a essas de Hinton foram utilizadas por René de Saussure (SAUSSURE 1891, 1903), que identifica essa "pressão lateral" que age na quarta dimensão como sendo o calor. Saussure aplica a idéia da quarta dimensão para tentar interpretar os fenômenos químicos. Ele interpreta uma mistura ou solução de substâncias como uma mera reunião de suas partículas em três dimensões. Exatamente por isso, essas substâncias podem ser separadas facilmente. No entanto, a reação química corresponderia a um "empilhamento" das partículas na quarta dimensão. Quando se tentasse separar essas partículas, atuando-se no espaço tridimensional, isso simplesmente quebraria as partículas, mas mantendo-as empilhadas e impedindo a sua separação mútua. Pelo contrário, através do calor ou da eletricidade, seria possível separar realmente as substâncias, pois essas influências atuariam na quarta dimensão.

Em 1886, Hinton analisa uma questão de simetria: a diferença entre corpos tridimensionais que diferem por um ser a reflexão especular do outro (como a mão esquerda e a mão direita). Möbius já havia mostrado, em 1827, que um desses corpos pode ser transformado no outro através de uma rotação, em quatro dimensões. Hinton utiliza esse resultado e procura aplicá-lo para compreender o próprio surgimento dos seres vivos. Ele imagina que a simetria bilateral, tão comum nos corpos vivos, é o resultado da reprodução e rotação em quatro dimensões das partes que foram produzidas antes¹⁴. Em estudos posteriores, Hinton procurou também explicar os fenômenos eletromagnéticos utilizando uma quarta dimensão espacial (HINTON 1900-1904).

Em 1891, Karl Pearson introduz uma quarta dimensão do espaço para tentar explicar os fenômenos gravitacionais (ver PEARSON 1891). Ele associa as partículas ou átomos a sumidouros de éter (*ether squirts*): supõe que no ponto onde dizemos existir uma partícula, há na verdade um ponto de comunicação com a quarta dimensão do espaço, através da qual há uma retirada contínua de éter de nosso universo¹⁵. Pode-se imaginar alguma coisa como uma piscina dentro da qual houvesse vários tubos de borracha, com suas extremidades abertas dentro da água, alguns dos quais fossem fontes do líquido e outros retirassem o líquido da piscina. A diferença é que os tubos, nesse caso, estão no mesmo espaço que a água, enquanto que na hipótese de Pearson os tubos estão fora do nosso espaço tridimensional. De acordo com a analogia hidrodinâmica de Pearson, dois sumidouros devem se atrair. Isso poderia explicar forças gravitacionais.

No mesmo ano de 1891, W. W. Rouse Ball faz outro interessante uso físico de uma quarta dimensão espacial. Na época, discutia-se muito a natureza do éter que supostamente seria o veículo das interações eletromagnéticas (e da luz). Para se poder explicar o fenômeno de polarização da luz, era necessário supor que o éter tivesse propriedades semelhantes às de um sólido rígido, pois no interior de um gás ou líquido

12 Ernst Mach não aceitava a existência de átomos como uma realidade e por isso sua discussão é apenas hipotética.

13 A proposta é, curiosamente, muito parecida com a concepção de More sobre a alma.

14 Charles Peirce, aproximadamente em 1890, defende a efetiva existência da quarta dimensão do espaço a partir de um argumento semelhante: se não existisse essa quarta dimensão, haveria uma real diferença entre a mão direita e a mão esquerda que seria incompreensível. Ver, sobre esse ponto, o artigo de DIPERT 1978.

15 De acordo com SCHUBERT 1893, Riemann também apresentou uma idéia semelhante, em uma obra que não pude consultar: *Neue mathematische Principien der Naturphilosophie*.

não podem existir ondas transversais. Ao mesmo tempo, era necessário supor que o éter tivesse uma resistência nula ou quase nula, já que ele não perturba os movimentos planetários. Essas duas propriedades pareciam mutuamente incompatíveis. Rouse Ball, no entanto, apresentou uma proposta que explicava as duas propriedades (ver ROUSE BALL 1891). Supôs que o éter fosse realmente sólido (para poder transmitir ondas transversais), mas que ele tivesse a estrutura de uma espécie de “casca” fina em um espaço de quatro dimensões. Ou seja: em três dimensões, o éter tem uma extensão infinita (ou pelo menos muito grande), enquanto que na quarta dimensão ele teria uma pequena espessura. A matéria não estaria embebida dentro do éter, e sim apoiada sobre sua superfície. Assim sendo, quando a matéria se desloca pelo éter, ela não sofre resistência. No entanto, a matéria pode transmitir e receber vibrações do éter, como a luz; e a luz se propaga pelo éter como se ele tivesse apenas três dimensões, já que a quarta dimensão tem espessura muito pequena.

No final do século, Domenico de Francesco desenvolve um estudo sobre a estática em quatro dimensões (FRANCESCO 1896). Ele mostra que as leis do equilíbrio precisam ser generalizadas, pelo surgimento de novas condições de equilíbrio, assim como ao se passar de uma dimensão para duas, surge a necessidade de introduzir a noção de torque. De um modo geral, um sistema de forças agindo em quatro dimensões sobre um sólido pode ser reduzido a uma força resultante que passa por um certo ponto, e dois torques.

Sob o ponto de vista formal, a mecânica de Hertz e a estatística de Gibbs introduzem espaços pluridimensionais. Mas trata-se de um uso apenas formal, diferente dos outros aqui discutidos. Por isso, não exploraremos esse ponto.

Apesar de várias linhas de especulação sobre um espaço pluridimensional, no final do século XIX, a posição mais comum era conservadora: Simon Newcomb, por exemplo, em 1898, nega a existência de uma quarta dimensão do espaço, dizendo que nunca se observou nenhum efeito que precisasse ser atribuído a essa quarta dimensão. Nosso universo tridimensional parece ser auto-suficiente, sem precisamos inventar “mundos paralelos”:

Se existir algum agente que poderíamos imaginar conectar-nos com uma esfera exterior, ele é certamente o éter luminífero. Mas se esse éter entra em uma quarta dimensão, a intensidade da luz e do calor radiante diminuiriam como o cubo da distância e não com o quadrado. Para falar mais precisamente, a radiação que emana de um corpo incandescente seria completamente perdida - sairia completamente de nosso universo. O fato de que não é perdida - e, realmente, a teoria geral da conservação da energia - mostra que não há troca de energia entre nosso universo e qualquer outro possível que esteja em outra dimensão do espaço.

A posição de Newcomb é semelhante à de diversos autores do século XX, que procuram utilizar as leis científicas conhecidas para mostrar que nosso universo possui apenas três dimensões¹⁶.

4 Geometrias Não-Euclidianas propriamente ditas (Abordagem Clássica)

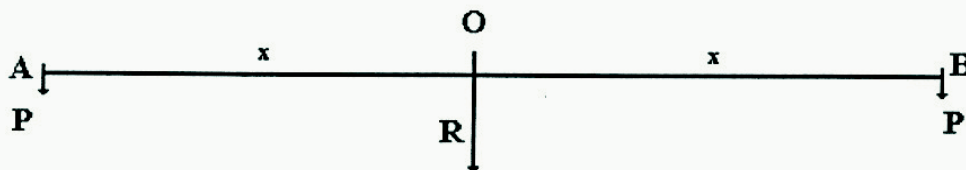
Os trabalhos de Janos Bolyai (1832) e de Nicholas Lobatchewsky (1840) estabeleceram a possibilidade de se estruturar geometrias diferentes da de Euclides e que fossem, apesar disso, tão coerentes quanto aquela. O surgimento das geometrias não-euclidianas partiu de estudos puramente formais, mas Lobatchewsky se interessou, depois, pela possibilidade de aplicação das mesmas à realidade física. Supondo-se que a luz caminha em linha reta, seria possível determinar o tipo de geometria do nosso espaço interestelar, através de medidas astronômicas. Se o espaço for euclidiano, a paralaxe das estrelas deve tender a zero, quando forem observadas estrelas cada vez mais distantes. Se o espaço tiver curvatura positiva, a paralaxe deve ir diminuindo, para estrelas mais distantes, até uma certa distância, quando se anularia, tornando-se negativa a partir daí. Se o espaço tiver curvatura positiva, a paralaxe nunca deve se tornar nula nem tender a zero: ela diminuiria até certa distância, para depois aumentar à medida que forem estudadas estrelas mais distantes.

16 Pode-se encontrar um bom número de referências a estudos posteriores sobre a dimensionalidade do espaço no artigo de Caruso e Moreira Xavier (1986).

Na época em que Lobatchewsky fez essas considerações, as medidas astronômicas não indicavam nenhuma anomalia. Ele concluiu que, dentro dos erros experimentais, o espaço podia ser considerado euclidiano, até a distâncias das estrelas para as quais havia sido medida a paralaxe.

Há um importante trabalho que precede o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas mas que só adquiriu importância depois desse desenvolvimento, ao receber nova interpretação. Trata-se do trabalho de Daviet de Foncenex, que resultou no desenvolvimento da primeira estática não-euclidiana.

Em 1760-61, Daviet de Foncenex publicou um artigo em que tentava estabelecer “a priori” as leis fundamentais da Mecânica (FONCENEX 1760-1761). Seguindo o exemplo de d’Alembert, ele procurou provar através de considerações gerais a lei da inércia, a lei da composição das forças e a lei do equilíbrio (ver MARTINS 1981). Na sua tentativa de demonstrar a lei de composição de forças paralelas, aparece um raciocínio extremamente interessante.



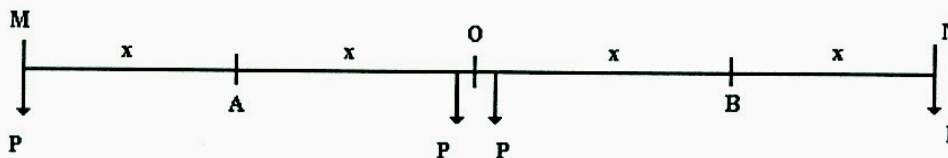
Consideremos duas forças paralelas, de mesmo módulo P , aplicadas às extremidades de uma barra rígida de comprimento $2x$. A resultante R dessas duas forças, aplicada ao ponto médio O da barra (por simetria) deve ter um valor que só pode depender dos valores de P e de x . Ou seja:

$$R = f(P, x)$$

Como a resultante e as forças componentes possuem a mesma dimensão, Foncenex conclui que deve existir necessariamente uma relação linear entre elas, ou seja, a função deve ser do tipo:

$$R = P\varphi(x)$$

O problema é, agora, determinar essa função $\varphi(x)$. Para isso, Foncenex faz a análise de uma nova situação. Suponhamos que são aplicadas quatro forças iguais a P em uma barra de comprimento $4x$: duas delas no meio, e duas nas extremidades M e N .



Podemos achar a resultante dessas forças de duas maneiras. Podemos compor inicialmente as forças do meio (que vão dar uma resultante $2P$) e as das extremidades (que vão dar uma resultante $P \cdot \varphi(2x)$, de acordo com o raciocínio anterior) e depois somá-las, o que dará a resultante:

$$R' = 2P + P \varphi(2x)$$

ou então podemos compor inicialmente cada uma das forças do meio com uma das forças de cada extremidade, depois somando suas resultantes. Nesse segundo caso, a resultante de uma das forças do centro O com a da extremidade M estará no ponto médio A e terá um valor $R'' = P \cdot \varphi(x)$. A resultante

da outra força do centro com a da extremidade **N** estará no ponto médio **B** e terá o mesmo valor. Compondo a força em **A** com a força em **B**, teremos como resultado:

$$R' = R''. \varphi(x) = P[\varphi(x)]^2$$

Como os dois processos de composição de forças devem conduzir ao mesmo resultado¹⁷, devemos ter:

$$2P + P.\varphi(2x) = P[\varphi(x)]^2 \therefore 2 + \varphi(2x) = [\varphi(x)]^2$$

Essa equação funcional deve permitir determinar a função símbolo $\varphi(x)$ que, por sua vez, determina a lei de composição de forças paralelas.

Nesse ponto, Foncenex afirma que a única solução dessa equação funcional é o valor constante $\varphi(x) = 2$. Fazendo essa suposição, ele conclui que a resultante de duas forças paralelas iguais tem simplesmente o dobro do valor das mesmas.

O trabalho de Foncenex despertou bastante atenção e logo foi criticado. D'Alembert, Fourier e Lagrange notaram que a conclusão de Foncenex não era o resultado geral que se seguia do seu raciocínio. De fato, a equação funcional de Foncenex pode ser satisfeita por qualquer solução do tipo:

$$\varphi(x) = b^{ax} + b^{-ax}$$

como é fácil verificar substituindo essa expressão na equação funcional (ver d'ALEMBERT 1769). Conforme os coeficientes a do expoente sejam reais ou imaginários, essa expressão corresponde (a menos de uma constante multiplicativa) às funções cosseno hiperbólico ou cosseno de uma constante multiplicada por x .

Na época, esses resultados mostravam apenas que a dedução de Foncenex era incorreta. Ou seja: ele não havia conseguido mostrar o que queria - que as leis básicas da Mecânica podiam ser obtidas *a priori*. No entanto, 100 anos depois, Angelo Genocchi foi capaz de reinterpretar os estudos de Foncenex. Em 1869, Genocchi mostrou que as várias soluções da equação funcional do trabalho de Foncenex proporcionavam as diferentes mecânicas associadas aos três tipos de geometrias homogêneas: as de curvatura nula (geometria euclidiana), de curvatura positiva e de curvatura negativa (GENOCCHI 1869, 1878).

Na época de Foncenex, a única geometria conhecida era a euclidiana, por isso ele tentou forçar o resultado de sua dedução. No entanto, seguindo o seu raciocínio, seria necessário admitir três tipos de mecânicas diferentes. Quando a distância x entre as forças é muito pequena, as três mecânicas dão valores equivalentes. Mas quando x não é desprezível, elas diferem. Em uma delas, a resultante de duas forças paralelas idênticas é igual à soma das mesmas. Em outra, a resultante diminui quando a distância entre as forças aumenta. E na terceira, a resultante aumenta quando a distância entre as forças aumenta. Genocchi mostrou que isso era exatamente o que se deveria esperar quando se desenvolve a Mecânica no contexto das geometrias não-euclidianas. De certa maneira, o trabalho de Foncenex (corrigido por D'Alembert, Lagrange e Fourier) proporcionou, antes do surgimento das geometrias não-euclidianas, o primeiro exemplo de aplicação física dessas geometrias.

Independentemente do trabalho de Genocchi, J. M. de Tilly também desenvolveu os princípios das mecânicas não-euclidianas (TILLY 1870). O trabalho de Tilly é sistemático, analisando a cinemática, a estática e a dinâmica. Ao final do século XIX, Jules Andrade publicou um tratado de Mecânica em que apresentou de forma clara e rigorosa as "mecânicas abstratas" (não-euclidianas), desenvolvendo também a hidrostática não-euclidiana (ANDRADE, *Leçons de mécanique physique*)¹⁸. Todos esses trabalhos, no entanto, eram puramente hipotéticos: assumindo-se a possibilidade de um espaço curvo, eram deduzidas as consequências. Mas não havia nem a tentativa de explicar novos fenômenos efetivamente observados, nem de testar se esses desenvolvimentos podiam se aplicar à realidade física. O próprio Tilly, por exemplo, abandonou esses estudos por considerá-los inúteis.

17 Embora Foncenex não discutisse esse ponto, é claro que ele está supondo a adição de forças deve obedecer às propriedades associativa e comutativa da adição ordinária, de tal modo que se pode mudar a ordem em que a soma é feita, sem alterar o resultado.

18 Na Rússia, houve também o desenvolvimento de trabalhos sobre mecânica não-euclidiana, no final do século. Ver GRIGORIAN 1960.

Em todos esses trabalhos, a base matemática utilizada é a geometria “clássica” - isto é, não se utiliza geometria diferencial. Todos eles assumem um espaço homogêneo, de curvatura constante. Outros trabalhos, desenvolvidos no século XIX, utilizaram o método que foi depois adotado na relatividade geral.

5 Geometrias Não-Euclidianas propriamente ditas (Abordagem Diferencial)

A geometria diferencial surgiu em 1827, no contexto da geometria euclidiana, com os trabalhos de Johann Friedrich Karl Gauss (1777-1855) sobre superfícies curvas. Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) aplicou o método de Gauss ao estudo do espaço tridimensional geral, focalizando sua atenção na métrica e nas propriedades de curvatura do espaço. Riemann discute rapidamente a relação entre a geometria geral e a Física, conjecturando que o espaço poderia ser não-euclidiano a nível microscópico. No entanto, não analisa as diferenças que surgiriam nos vários ramos da Física por influência do tipo de espaço.

Após o desenvolvimento posterior da geometria diferencial por Hermann Helmholtz (1821-1894), Eugenio Beltrami (1836-1900) e outros (no final da década de 1860), vários autores se interessaram em aplicar esse tipo de abordagem a estudos físicos.

W. K. Clifford, em 1870, publicou um curto trabalho em que conjectura sobre a possibilidade de utilizar a geometria diferencial no estudo do espaço microscópico (CLIFFORD 1870). Ele conjectura, nesse trabalho, que pequenas porções de espaço são análogas a pequenas colinas em uma superfície que, em média, é plana - ou seja, que as partículas materiais representam regiões em que a métrica apresenta maior curvatura. O movimento da matéria seria simplesmente a propagação ondulatória dessa curvatura pelo espaço. A idéia é interessante e vários autores modernos consideram esse curto resumo de Clifford como um prenúncio de idéias atuais (ver MISNER & WHEELER 1957). Mas Clifford jamais publicou (nem se encontrou entre seus manuscritos) o desenvolvimento dessas idéias.

É no estudo da Mecânica e da gravitação que se conseguiu aplicar adequadamente esse novo método. Seria impossível descrever adequadamente esses estudos nos limites do presente trabalho. Vamos apenas indicar, aqui, alguns dos principais passos desenvolvidos até o final do século XIX, sem no entanto aprofundar o assunto¹⁹.

Em 1872, R. Lipschitz estudou o movimento de partículas em um espaço de n dimensões, com curvatura. Mostrou que era possível aplicar o formalismo de Lagrange ao estudo desses movimentos (LIPSCHITZ 1873). Analisando o problema de uma partícula submetida a uma força que varie com o inverso da potência n da distância, Lipschitz obtém uma equação equivalente à de Laplace, porém dependente da curvatura do espaço. No ano seguinte, Eugen Dühning desenvolveu um trabalho semelhante. No mesmo período (entre 1870 e 1873), E. Schering estudou a gravitação em espaços de n dimensões, com curvatura.

Clifford, em 1876, estudou a rotação de sólidos em espaços curvos²⁰.

Em 1885, Killing analisou o movimento de pontos sobre uma hiper-esfera, o que é equivalente ao estudo do movimento dos pontos em um espaço de curvatura positiva constante.

Utilizando todos os desenvolvimentos anteriores, Stäckel desenvolveu em 1893 uma formulação geral da Mecânica em espaços curvos. Mostrou que a introdução de forças associadas a potenciais podia ser considerada como equivalente à introdução de curvaturas e que o movimento obedecia a equações iguais às que determinam as geodésicas. Dessa forma, no final do século XIX, já existiam os principais elementos que permitiriam a utilização da geometria diferencial e da introdução de espaços curvos na Física.

6 Considerações Finais

Pode-se dizer que, ao longo do século XIX, foram surgindo aplicações na Física de todos os aspectos da geometria não-euclidiana que são encontrados, depois, na teoria da relatividade. Em alguns casos (espaços pluridimensionais, espaço-tempo) essas idéias levaram a conjecturas principalmente qualitativas. Em outros casos (geometrias não-euclidianas propriamente ditas), o desenvolvimento levou a aplicações

¹⁹ Podem ser encontradas as referências relevantes no artigo: SCHLEGEL 1900.

²⁰ Ver uma descrição do trabalho de Clifford e desenvolvimentos posteriores em FRANCESCO 1902.

- tions of curved surfaces. Trad. Adam Hiltebeitel & James Morehead. Hewlett, NY: Raven Press, 1965.
- GENOCCHI**, Angelo. Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 4: 323-7, 1869.
- . Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes. *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino* [ser. 2] 29: 365-404, 1878.
- GRIGORIAN**, A. T. Les travaux sur la mécanique non-euclidienne en Russie. *Scientia* 54: 347-50, 1960.
- HATHAWAY**, A. S. Quaternions as numbers of four dimensional space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4: 54-7, 1897-1898.
- HINTON**, C. H. The recognition of the fourth dimension. *Bulletin of the Philosophical Society of Washington*, 14: 179-203, 1900-1904.
- JAMMER**, Max. *Concepts of space: the history of theories of space in physics*. 2. ed. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1969.
- LEWIS**, T. C. Applications of geometry of four dimensions to determine moments of inertia of bodies without integration. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 16: 152-58, 1879.
- LIPSCHITZ**, R. Extension of the planet-problem to a space of n dimensions and of constant integral curvature. Trad. A. Cayley. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 12: 349-70, 1872.
- MARTINS**, Roberto de Andrade. The origin of dimensional analysis. *Journal of the Franklin Institute*, 311: 331-7, 1981.
- . O princípio de antecedência das causas na teoria da relatividade. *Anais da ANPOF*, 1 (1): 51-72, 1986.
- MISNER**, C. W., **WHEELER**, J. A. Classical physics as geometry. *Annals of Physics*, 2: 525-603, 1957.
- NAGY**, Albino. Sulla recente questione intorno alle dimensioni dello spazio. *Rivista Italiana di Filosofia*, 5 (1): 121-51, 1890.
- NEWCOMB**, Simon. Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions. *American Journal of Mathematics*, 1: 1-4, 1878.
- . The philosophy of hyperspace. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4 (2): 187-95, 1898.
- PEARSON**, Karl. Ether-squirts - being an attempt to specialize the form of ether-motion which forms an atom in the theory proposed in former papers. *American Journal of Mathematics* 13: 309-62, 1891.
- RIEMANN**, Georg Friedrich Bernhard. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der königl Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13: , 1868. Traduzido por Clifford: On the hypotheses which lie at the basis of geometry. *Nature* 8: 14-17, 36-7, 1873. Reproduzido em: WEBER, H. (ed.). *Collected works of Bernhard Riemann*. 2. ed. New York: Dover, 1953. Ver também a tradução em: SMITH, D. E. *A source book in mathematics*. 2 vols. New York: Dover, 1959. Vol. 2, p. 411.
- ROUSE BALL**, W. W. A hypothesis relating to the nature of the ether and gravity. *Messenger of Mathematics* 21: 20-4, 1891.
- FOUR dimensional space. *Nature* 32: 481, 1885.²²
- SAUSSURE**, René de. Sur une manière de considérer les phénomènes physiques et chimiques. *Revue Scientifique de la France et de l'Étranger* 47: 585-8, 1891 (a).
- . Théorie des phénomènes physiques et chimiques. *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, 25: 105-28, 1891.

²² Artigo de autor desconhecido, que assinou o trabalho apenas como "S".

- . Hypothèse sur la constitution géométrique de l'éther. *Archives des Sciences Physiques et Naturelles* 16: 369-87, 1903.
- SCHLEGEL**, Victor. Sur le développement et l'état actuel de la géométrie à n dimensions. *L'Enseignement Mathématique* 2: 77-114, 1900.
- SCHUBERT**, H. The fourth dimension - mathematical and spiritualistic. *The Monist* 3: 402-49, 1893.
- SYNGE**, E. H. The space-time hypothesis before Minkowsky. *Nature*, 106: 693, 1921.
- TAIT**, P. G. Zöllner's scientific papers. *Nature*, 17: 420-2, 1878.
- TILLY**, J.-M. de. Études de mécanique abstraite. Mémoires Couronnés et Autres Mémoires, publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. *Mémoires des Savants Étrangers*, 21 (3): 1-98, 1870.²³
- ZÖLLNER**, J. K. F. On space of four dimensions. *Quarterly Journal of Science*, 8: 227-37, 1878.

ROBERTO DE ANDRADE MARTINS é Físico e Doutor em Filosofia e Ciência pela UNICAMP
Endereço: Grupo de História e Teoria da Ciência, DRCC/IFGW/UNICAMP, Caixa Postal 6059, 13081-970 Campinas, SP. Brasil Telefone: 0192-398112. Endereço eletrônico: RMARTINS@IFI.UNICAMP.BR

23 É relativamente difícil localizar este trabalho na revista em que se encontra. Isso ocorre pois há dois periódicos com o mesmo nome. Um deles é em pequeno formato (in 8°) e o outro em formato maior (in 4°). O artigo se encontra na coleção pequena. Nela, a paginação recomeça em cada uma das memórias. O artigo de De Tilly é o terceiro do volume.