A RELAÇÃO MASSA - ENERGIA E ENERGIA POTENCIAL

ROBERTO DE A. MARTINS
DEPTO DE RAIOS CÓSMICOS-UNICAMP
CAMPINAS - SP

1- Introdução

Os defensores da importância da História da Ciência (entre os quais me incluo) costumam afirmar que o conhecimento da História da Física é importante para o próprio trabalho científico do pesquisador, podendo auxiliá-lo a descobrir problemas ainda em aberto, métodos de trabalho importantes porém em desuso, etc. Essas afirmações, embora plausíveis, podem não impressionar muito, pois, embora se admita a possibilidade dessa importância, seria preciso exibir exemplos dessa influência do estudo histórico no trabalho de pesquisa. Isso, aliás, foi objeto de discussão no Seminário anterior, aqui realizado em 1987.

Dentro dessa perspectiva, o presente trabalho tem o objetivo geral de, através de um exemplo concreto e atual, mostrar que o conhecimento da História da Ciência pode e de fato auxiliou uma pesquisa científica recente; e que, inversamente, o desconhecimento da História da Ciência pode prejudicar a compreensão conceitual da ciência e impedir a solução de problemas que não são tão difíceis quanto parecem.

O exemplo utilizado está associado a uma aplicação da famosa relação de Einstein entre massa e energia,

$$E = mc^2$$

(provavelmente a mais conhecida equação da Física Moderna).

O problema científico tratado é a aplicabilidade (ou não) dessa relação de Einstein ao cálculo de uma massa associada à energia potencial. Consideremos a seguinte situação: um elétron (ou qualquer partícula carregada) se move em um campo externo; sua energia potencial depende de sua posição; sua massa dependerá explicitamente dessa energia potencial? Em particular: a massa de um elétron em um átomo é igual à sua massa quando livre, com mesma velocidade?

Este trabalho mostrará que essa questão, embora antiga e discutida por grandes físicos (como de Broglie e Brillouin), não havia sido resolvida até recentemente. Mostrará também que ela pode ser resolvida, de modo claro e relativamente simples, com o uso de técnicas e de conceitos desenvolvidos cem anos atrás (antes de Einstein) e que caíram em desuso. A resposta, obtida recentemente, é de que não se pode associar uma massa à energia potencial eletromagnética de uma carga em movimento em um campo externo.

Para poder mostrar tudo isso, é necessário desenvolver primeiramente um longo histórico da relação massa-energia, que mostrará que a equação $E = mc^2$ não é geral, não sendo válida quando há tensões envolvidas em sistemas extensos (não pontuais). Depois, será discutido o problema específico da relação massa-energia potencial e sua solução.

2- A relação massa-energia: história

No desenvolvimento da Teoria da Relatividade, ocorreram dois tipos de desenvolvimentos distintos, mas convergentes. Um foi o estudo das propriedades mecânicas da radiação eletromagnética (luz), que levou à relação massa-energia. Outro foi o estudo das propriedades mecânicas de uma carga elétrica em movimento, que levou à relação massa-velocidade. Vamos examinar, primeiramente, o histórico da primeira dessas linhas de investigação. Ela está relacionada às concepções de Faraday e Maxwell sobre o campo eletromagnético.

A idéia de que o campo eletromagnético, mesmo na ausência de matéria, tem realidade física e propriedades quantitativas foi defendida por Faraday e depois aproveitada por Maxwell em sua teoria eletromagnética.

A imagem mais utilizada por Faraday, na tentativa de compreender os efeitos elétricos e magnéticos, é a de "linhas de força". Embora no ensino elementar atual do eletromagnetismo ainda se utilize a idéia de linhas de força, este uso moderno não reproduz a concepção primitiva de Faraday. Enquanto que os efeitos gravitacionais pareciam se comportar como ações à distância, em linha reta, e sem influência de materiais interpostos, os campos elétricos e magnéticos pareciam se propagar em linhas curvas, depender do meio material, e ser portanto influências que se propagavam gradualmente através do espaço.

Os efeitos de indução eletrostática, por exemplo, eram atribuídos por Faraday a "linhas de força indutiva", e não a uma ação direta à distância (FARADAY, Experimental researches, § 1164). Esse efeito indutivo parecia propagar-se de ponto a ponto, através do meio. Por meio de barreiras metálicas o efeito eletrostático podia ser impedido de atuar, e Faraday imaginava que as linhas de força chegavam até o metal e eram impedidas de continuar adiante. Por outro lado, os efeitos indutivos podiam passar pelas bordas de uma placa metálica ligada à Terra, e então as linhas de força indutiva pareciam se encurvar após passar pela borda metálica, podendo produzir efeitos atrás da placa (§ 1221). Como explicar que essas linhas de força se encurvavam? Faraday supõe que essas linhas de força se repelem umas às outras (§ 1224, 1225,1231), tendendo a se distanciar o máximo possível, o que explicaria esse encurvamento. Portanto, as linhas de força indutiva possuiriam duas características principais; produziriam um efeito de indução e atração eletrostática na direção da própria linha de força; e produziriam uma repulsão mútua entre as linhas de força, que tenderia a afastá-las lateralmente (§ 1297).

Faraday utiliza uma imagem semelhante para as "linhas de força magnética". Os efeitos de atração entre ímãs e/ou correntes elétricas paralelas são explicados por Faraday através da tendência das linhas de força de se encurtarem ou contraírem longitudinalmente (FARADAY, 1852, § 3266-7, 3280, 3294). A repulsão de dois ímãs colocados lado a lado, com pólos no mesmo sentido, ou repulsão de duas correntes elétricas paralelas opostas é explicada por uma tendência das linhas de força magnética a se separarem lateralmente (§ 3266-7, 3268, 3295). Os efeitos observados com corpos ferromagnéticos, diamagnéticos e paramagnéticos são também explicados através dessas propriedades das linhas de força, assumindo-se também que elas tendem a se concentrar mais ou menos em diferentes substâncias (§ 3298).

Faraday afirma a realidade física das linhas de força magnética, assim como das linhas de força elétrica (§ 3263, 3269), e indaga sobre sua natureza. Ele sugere que elas poderiam ser constituídas por *"uma vibração do éter hipotético, ou um estado de tensão desse éter, equivalente a uma condição estática ou dinâmica; ou algum outro estado difícil de conceber ..."* (§ 3263); mas ele parece mais inclinado a aceitar a idéia de que as linhas de força seriam constituídas por tensões do meio - o *"estado eletro-tônico"* (§ 3269).

Através dessas idéias. Faraday enfatiza a importância do campo, em detrimento da idéia de ação à distância. As cargas, correntes elétricas, ímãs, etc. produziriam linhas de força; mas são essas que realmente atuam e produzem todos os efeitos.

Maxwell adotou essencialmente as idéias de Faraday, procurando dar-lhes uma formulação matemática conveniente a partir da qual fosse possível fazer previsões quantitativas definidas. Desde o início de seu tratado (MAXWELL, Treatise on electricity and magnetism), Maxwell adota a idéia de linhas de força de Faraday, a quem cita inúmeras vezes, e indica que adotará uma teoria em que a ação elétrica é um fenômeno de tensão do meio, ou tensão ao longo das linhas de força (MAXWELL, Treatise, § 47-8) . Por isto, Maxwell procura caracterizar os fenômenos eletromagnéticos através de grandezas distribuídas pelo espaço, e não concentradas em pontos. A energia eletrostática **W** de um sistema de cargas, no vácuo, por exemplo, era calculada sob a forma:

$$W = \frac{1}{2}\Sigma(eV)$$

onde são somadas as energias potenciais (eV) de todas as cargas.

Maxwell parte desta fórmula (§ 84) e obtém a expressão (§ 99a)

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV$$

onde se calcula a integral volumétrica da densidade de energia associada ao campo elétrico ($E^2/8\pi$) e que permite o cálculo da energia eletrostática pela integração de uma grandeza distribuída de forma contínua por todo o espaço. Segundo esta expressão, todas as regiões do espaço onde exista um campo elétrico contribuem no cômputo da energia total do sistema. Esta energia espalhada pelo espaço é, segundo Maxwell, essencialmente energia potencial elástica (§ 630, 638) devida à distribuição de tensões do éter(§ 110). Que tensões são essas? São essencialmente as tensões das linhas de força de Faraday (§ 109).

Maxwell fornece uma teoria quantitativa detalhada dessas tensões a fim de calcular as forças eletrostáticas a partir de efeitos locais, e não ações à distância (§ 105). O desenvolvimento matemático da teoria faz associar a cada ponto do meio nove componentes de tensão eletrostática, reduzidas a seis pela imposição de ausência de efeitos rotacionais, e que para o vácuo corresponde a apenas três tensões: uma tração longitudinal (na direção do campo elétrico) e uma pressão transversal (perpendicular à direção do campo elétrico) (§ 106). O módulo p dessas tensões é o mesmo, tanto na direção longitudinal quanto transversal; e é igual à densidade de energia eletrostática:

$$p = \frac{1}{8\pi}E^2 .$$

No caso de um meio dielétrico, Maxwell obtém a expressão da densidade de energia eletrostática (§ 631).

$$\frac{dW}{dV} = -\frac{1}{2}\vec{E}.\vec{D}.$$

No caso de correntes elétricas, Maxwell fala em uma energia "eletrocinética" (§ 634) correspondente ao movimento das cargas elétricas, mas também desenvolve a expressão dessa energia em função do campo magnético gerado em todo o espaço. A densidade desta energia, que seria essencialmente cinética(§ 630, 636, 638), seria

$$\frac{dW}{dV} = -\frac{1}{8\pi}\vec{B}.\vec{H} ,$$

e Maxwell afirma explicitamente que *"...esta energia existe sob a forma de algum tipo de movimento da matéria em cada porção do espaço"* (§ 636). Mais tarde, Maxwell indicará o efeito magneto-óptico de Faraday (§ 821) como uma evidência de que existe algum movimento de rotação do éter em torno das linhas de força do campo magnético(§ 831).

Também as interações magnéticas estariam, segundo Maxwell, associadas a tensões do éter (§ 641). A descrição dessas tensões é bastante complicada, no caso geral (§ 642), mas no caso mais simples, do vácuo (§ 643), reduz-se a uma tração longitudinal e a uma pressão transversal, ambas de mesmo módulo p, igual à densidade de energia magnética:

$$p = \frac{1}{8\pi} H^2 .$$

Maxwell enfatiza que está apenas desenvolvendo as idéias de Faraday sobre as linhas de força. É igualmente seguindo uma sugestão de Faraday que Maxwell desenvolve a teoria eletromagnética da luz (§ 782). E para calcular a pressão de radiação, Maxwell utiliza diretamente a sua teoria de tensões do éter(§ 792). Suponhamos uma onda eletromagnética plana que se propaga no vácuo na direção do eixo **z**, com o campo elétrico na direção **x** e o magnético na direção **y**. Se a densidade total de energia da onda é 2p, metade dessa densidade corresponde, como Maxwell havia mostrado, ao campo elétrico, e metade ao campo magnético. Portanto, as tensões elétricas médias seriam:

$$F'_x = -p$$

$$F'_y = F'_z = p$$

e as tensões magnéticas:

$$F''_y = -p$$

$$F''_x = F''_z = p .$$

Adicionando essas tensões, Maxwell obtém o efeito resultante

$$F_x = F_y = 0$$

$$F_z = 2p ,$$

ou seja, uma pressão longitudinal cujo módulo é igual ao da densidade total de energia da onda. Para uma radiação isotrópica a pressão fica reduzida a 1/3 da densidade de energia.

Na teoria original de Maxwell ocorrem, portanto, as idéias de energia e tensão associadas aos campos eletromagnéticos; mas não há ainda a idéia de um momentum associado à radiação eletromagnética.

Antes do desenvolvimento da teoria de Maxwell, a procura de uma pressão produzida pela luz já possuía uma longa história. Nos séculos XVIII e XIX vários experimentadores haviam procurado detectar e medir um efeito desse tipo, sem resultados definidos (ver WHITTAKER, A history of the theories of aether and electricity, vol. I, p. 273).

Foi apenas em 1873 que Maxwell publicou seu tratado de eletricidade e magnetismo, com uma previsão teórica da pressão produzida pela luz solar. Independentemente, em 1876, Bartoli deduziu a fórmula da pressão da radiação a partir de um argumento puramente termodinâmico (BARTOLI, 1876): se a radiação não produzisse pressão, seria possível violar a 2ª lei da termodinâmica. O argumento de Bartoli foi aperfeiçoado e generalizado por Boltzmann e Galitzine (BOLTZMANN, 1884; GALITZINE, 1892). A coincidência entre as equações obtidas através do argumento termodinâmico geral de Bartoli e do modelo de tensões de Maxwell deu grande confiança ao resultado obtido. Por isto, não foi surpresa a posterior confirmação experimental do efeito de pressão de radiação por Lebedew e Nichols e Hull, em 1901 (LEBEDEW, 1901; NICHOLS & HULL, 1901, 1903).

Como, na teoria de Maxwell, a energia eletromagnética está distribuída pelo espaço, é claro que transferências de energia eletromagnética também são um fenômeno espacial extenso, e não ligado imediatamente a uma carga elétrica. Quando um fio metálico conduz uma corrente elétrica que alimenta um motor, por exemplo, o fluxo de energia deve ser visto, no modelo de Maxwell, como algo que ocorre principalmente no espaço fora do condutor, e não dentro dele.

O estudo do fluxo da energia eletromagnética foi resolvido independentemente e quase ao mesmo tempo por Poynting e Heaviside (POYNTING, 1884; HEAVISIDE, 1885, 1892). O resultado obtido foi o famoso "teorema de Poynting", segundo o qual o fluxo de energia em qualquer ponto do espaço é representado pelo produto vetorial dos campos elétrico e magnético, multiplicado por uma constante

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E} \times \vec{H}.$$

O estudo da localização e fluxo da energia não só no eletromagnetismo mas também na teoria da elasticidade, hidrodinâmica, termodinâmica e gravitação foi desenvolvido mais tarde por Wier (1892), Mie (1898, 1899) e Volterra (1899).

O teorema de Poynting é deduzido a partir da teoria de distribuição da energia no campo eletromagnético; e, é claro, se esta última fosse alterada, o teorema de Poynting teria que ser alterado. Vinte anos mais tarde, Ritz criticou a teoria de Maxwell, mostrando que o problema de distribuição de energia eletromagnética pelo espaço é um problema indeterminado, com muitas soluções possíveis, e que portanto o teorema de Poyting se baseia em uma escolha arbitrária (RITZ, 1908).

O fluxo de energia nunca terá a direção dos campos elétrico e magnético, mas será sempre perpendicular a estes. E mesmo quando os campos elétrico e magnético são estáticos, há um fluxo de energia fluindo pelo espaço, desde que estejam presentes simultaneamente os dois campos, e desde que eles não sejam paralelos. Se, por exemplo, um capacitor for colocado entre os pólos de um ímã, sendo os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ perpendiculares, o espaço interno do capacitor será continuamente percorrido por uma corrente de energia. Esses resultados do teorema de Poynting, nem um pouco intuitivos, levaram a dois tipos de especulações: primeiramente, sobre a idéia que o éter estaria em movimento, sempre que houvesse campos elétricos e magnéticos cruzados; em segundo lugar que, nesses locais, dever-se-ia associar ao éter uma certa densidade de quantidade de movimento bem definida.

A idéia de que o éter deveria conter momentum foi exposta pela primeira vez por J.J. Thomson (Recent researches, cap. 1), que atribui ao campo eletromagnético uma densidade de momentum que, no vácuo, é proporcional ao vetor de Poynting, e que, em geral, é igual a:

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{D} \times \vec{B}.$$

Helmholtz (1894), pelo mesmo tipo de raciocínio, sugere que o éter se move nos campos eletromagnéticos, e que a velocidade desse movimento deveria ser muito grande, já que o éter parecia ter uma densidade muito pequena (se a sua densidade fosse grande, seria observado um retardamento dos corpos astronômicos).

Poucos anos depois, Henderson e Henry (1897) procuraram observar a influência desse possível movimento do éter através da mesma técnica que havia sido utilizada por Lodge (1893; 1897) na tentativa de observação do arrastamento da luz por um sólido em rotação. Não foi observado resultado algum, sendo a sensibilidade da experiência capaz de detectar uma variação de velocidade da luz de até 11,5 m/s (4×10^{-8}). Essas experiências foram depois repetidas por Barnett (1910), que também não detectou efeito algum, embora pudesse notar efeitos de uma velocidade do éter de até 18 cm/s (6×10^{-10}).

Essas experiências negativas poderiam ter levado a teoria eletromagnética a uma crise, mas isto não aconteceu. Foram ignoradas, exceto por Ritz (1908), que indica os trabalhos de Lodge (1893, 1897) e de Henderson e Henry (1897) como evidências da inexistência do éter e da invalidade de toda a teoria de Maxwell.

A introdução da quantidade de movimento associada ao éter, por Thomson, permitia a conservação da quantidade de movimento de um sistema matéria + campo eletromagnético; se o éter não se movesse ele não poderia ter momentum, e a lei da conservação do momentum seria violada. Isso de fato ocorreu na teoria de Lorentz, em sua forma preliminar (LORENTZ, 1895).

Desejando conservar o princípio da conservação do momentum em interações eletromagnéticas, Poincaré (1900), em um importante trabalho, onde retomou a sugestão de Thomson, estabeleceu que a densidade do momentum seria sempre igual ao vetor de Poynting dividido por c^2: $\vec{g} = \vec{S}/c^2$. A partir daí, Poincaré sugere que a toda energia eletromagnética esteja associada uma massa, sendo a densidade dessa massa eletromagnética igual à densidade de energia dividida por c^2: $\rho = \varepsilon/c^2$.

Poincaré também introduz a concepção de um momentum angular associado a campos eletromagnéticos onde o vetor de Poynting formasse circuitos fechados. Poincaré atribui, além disso, uma quantidade de movimento $p = E/c$ a toda radiação eletromagnética dirigida, explicando assim, de outra forma, a pressão produzida pela radiação.

Neste trabalho de Poincaré encontra-se a relação entre massa e energia aplicada apenas à luz. Seria possível, a partir desse resultado e utilizando o princípio da relatividade (que Poincaré já havia proposto), provar que $m = E/c^2$ vale também para partículas (IVES, 1952; ver também LEWIS, 1908).

É importante enfatizar que, aqui, o conceito de massa utilizado é o de "massa maupertuisiana" (LANGEVIN, 1913), dada pela razão entre o momentum e a velocidade: $m = |\vec{p}|/|\vec{v}|$.

Outro passo importante é dado por Hasenöhrl, que realiza, em 1904, um estudo sobre a dinâmica de uma cavidade cheia de radiação (HASENÖHRL, 1904). Ele parte de um trabalho de Abraham (1902) que estudara a pressão exercida pela radiação sobre superfícies em movimento. Abraham havia calculado o aumento de pressão da luz quando a superfície se move contra o movimento do feixe de radiação (ou seja, quando a superfície se aproxima da fonte), assim como para casos oblíquos.

Utilizando esses resultados, Hasenöhrl estabelece que, quando uma cavidade cheia de radiação é acelerada, a pressão de radiação diminui na sua parte frontal e aumenta na parte de trás. Ou seja: a radiação exercerá uma força resultante para trás, sobre o corpo que a contém, quando esse corpo é acelerado. Portanto, é mais difícil acelerar um corpo oco com radiação do que sem radiação. Tudo se passa como se sua massa, com radiação, fosse maior.

Hasenöhrl mostra também que a energia total da radiação na cavidade dependerá da velocidade do corpo; e que, para aumentar essa velocidade, é preciso fornecer certo trabalho extra que se acumula na própria radiação. Ele calcula a massa associada à radiação de uma cavidade, supondo-a isotrópica. O resultado (a menos de um erro de integração, depois corrigido por Abraham) é:

$$m = \frac{4}{3}\frac{E}{c^2}.$$

Nesse trabalho, Hasenöhrl afirma explicitamente que a massa de um corpo depende de sua energia e da temperatura do sistema.

Pouco depois, Abraham escreve uma carta a Hasenöhrl (1905), apontando um erro de integração e mostrando que os mesmos resultados podiam ser obtidos, de forma mais simples, calculando-se o momentum total da radiação e dividindo pela velocidade do sistema.

Note-se que aqui aparece o fator 4/3 na relação massa-energia. Mais adiante veremos que isso não é um erro.

É neste ponto da história que surge Einstein. Em 1905, ele publica seus primeiros trabalhos sobre a teoria da relatividade. No primeiro (EINSTEIN, 1905a), não há menção à relação massa-energia. Em outro artigo (EINSTEIN, 1905b), é deduzido um caso particular da relação $E = mc^2$, a partir do qual é proposta a sua generalização; costuma-se indicar que o argumento de Einstein é incorreto, pois ele já pressupõe implicitamente o que queria provar (IVES, 1952). No ano seguinte, Einstein apresenta nova dedução da relação $\Delta m = \Delta E/c^2$, mostrando que um corpo que emite ou recebe radiação muda de massa (EINSTEIN, 1906).

O próximo passo fundamental é dado por Max Planck - que poucas vezes é reconhecido como um dos mais importantes responsáveis pelo desenvolvimento da teoria da relatividade (ver GOLDBERG, 1976). Em 1907, ele publica um importantíssimo artigo (PLANCK, 1907) que foi o primeiro estudo da dinâmica relativística que não fazia uso de resultados provenientes da eletrodinâmica (até aqui, a dinâmica relativística era dependente do eletromagnetismo). Planck parte do princípio de ação mínima e, a partir de argumentos muito gerais, obtém a mecânica e a termodinâmica relativísticas. Um resultado deste artigo é essencial para nós: ele prova que a relação $E = mc^2$ não é geral: só vale para sistemas sem dimensões (pontos materiais) ou para sistemas extensos sem tensões. Para um sistema extenso submetido a uma pressão isotrópica, vale a relação de Planck: $m = H/c^2$, onde H é a entalpia do sistema ($H = E + PV$). Esta lei de Planck foi questionada na década de 1960', porém é aceita pela grande maioria dos autores. É deduzida a partir de considerações de momentum; por isso, trata-se novamente da "massa maupertuisiana" do sistema.

Observe-se que, aplicando-se a lei de Planck ao caso de um gás de fótons (radiação eletromagnética isotrópica), tem-se que a pressão é igual a:

$$P = \frac{1}{3}\frac{E}{V}$$

e portanto obtém-se:

$$H = E + PV = \frac{4}{3} E$$

$$m = \frac{H}{c^2} = \frac{4}{3}\frac{E}{c^2}$$

que é o mesmo resultado já obtido antes por Hasenöhrl.

Há no entanto um aspecto novo, que pode ser tirado da teoria de Planck e que Hasenöhrl não havia considerado. Ao se calcular a massa do <u>recipiente</u> que contém o gás de fótons, é preciso levar em conta que ele está submetido a uma pressão negativa (distensão) pela radiação em seu interior. Isso, pela própria relação de Planck, produz uma variação da massa do recipiente, igual a:

$$\Delta m' = \frac{PV}{c^2} = -\frac{1}{3}\frac{E}{c^2},$$

o que, somado à massa da própria radiação, leva ao resultado:

$$m' = m + \Delta m' = E/c^2 .$$

Após o trabalho de Planck, o último passo fundamental foi dado por Max von Laue, que estabeleceu os fundamentos da dinâmica relativística de sistemas não isotrópicos (os quais Planck não estudou). Von Laue estabelece o tensor de densidade de momentum-energia-tensão e utiliza como base de toda sua dinâmica a relação entre densidade de momentum e fluxo de energia proposta por J.J. Thomson: $\vec{g} = \vec{\sigma}/c^2$, generalizando-a para todas as formas de energia (VON LAUE, 1911, 1912). A relação de Einstein ($E = mc^2$) torna-se, também aqui, apenas um caso especial, que não vale sempre. Em particular, no caso de um sistema com tensões oblíquas em relação ao seu movimento, o conceito de massa já não pode ser aplicado, pois o momentum não é paralelo à velocidade (ou seja: não há um escalar que, multiplicado pela velocidade, dê o momentum do sistema).

A exposição mais geral, clara e conceitualmente correta sobre a relação massa-energia foi publicada, pouco depois, por Lorentz (1912; <u>Lectures</u>, vol. 3, cap. 12). Infelizmente, a maior parte dos livros-texto ignora esses trabalhos e seus resultados: tratam a relação de Einstein ($E = mc^2$) como se fosse totalmente geral.

3- Histórico da relação massa-velocidade

Voltemos agora um pouco atrás no tempo, a fim de estudar o desenvolvimento das idéias a respeito da dependência entre massa de partículas e sua velocidade. Novamente, o princípio se encontra em estudos pertencentes ao eletromagnetismo.

Em 1881 J.J. Thomson e, logo depois, Fitzgerald, procuraram deduzir os campos elétrico e magnético associados a uma carga elétrica em movimento retilíneo uniforme no vácuo (THOMSON, 1881; FITZGERALD, 1881).

O resultado obtido por J.J. Thomson e por Fitzgerald era válido apenas para velocidades muito menores do que a da luz. Eles supunham que o campo elétrico $E = e/r^2$ não era alterado pelo movimento da carga e calculavam o campo magnético gerado utilizando $\vec{H} = \vec{E} \times \vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da carga:

$$H = \frac{e}{cr^2} v \operatorname{sen}\theta .$$

Se o campo elétrico não era alterado, sua energia também não mudava; mas o campo magnético gerado pelo movimento da carga estava associada a uma densidade de energia que crescia, obviamente, com o quadrado da velocidade da carga. Integrando-se sobre todo o campo essa densidade de energia magnética, obtém-se

$$W = \frac{e^2 v^2}{3ac^2} .$$

Esta energia magnética devida ao movimento de uma carga elétrica era análoga à energia cinética, em dois sentidos: (i) como vimos, Maxwell, Thomson e outros acreditavam que o campo magnético estava essencialmente associado a movimentos do éter e a energia magnética seria portanto energia cinética do éter; (ii) a energia magnética de uma partícula aumentava, como a energia cinética comum, com o quadrado de sua velocidade. Escrevendo-se

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}\right) v^2 ,$$

podia-se interpretar a expressão entre parênteses $m' = 2e^2/3ac^2$ como uma massa eletromagnética, que deveria ser adicionada à massa ordinária **m** de uma partícula carregada, para se calcular sua energia cinética total E_c:

$$E_c = \frac{1}{2} \left(m + \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}\right) v^2 .$$

Note-se que essa massa adicional corresponde a 4/3 da energia eletrostática dividida por c^2.

Essa massa adicional podia ser denominada, mais propriamente, "massa cinética" ou "capacidade de energia cinética" eletromagnética, adotando-se a nomenclatura de Poincaré e de Langevin (LANGEVIN, 1913).

Inicialmente, não se investigou se ao campo eletromagnético da carga também estaria associado um *momentum* eletromagnético, nem se, no caso de ele existir, o coeficiente de mo mentum seria o mesmo da energia cinética eletromagnética.

Em 1889, Heaviside obteve as equações exatas, através de um elegante uso do cálculo de operadores (HEAVISIDE, 1889). No entanto, como esta técnica matemática não era considerada totalmente confiável na época, J.J. Thomson deduziu novamente e confirmou os resultados de Heaviside por um método mais trabalhoso, porém incontestável (THOMSON, 1889, 1891). Verificou-se que o campo elétrico de uma carga pontual em movimento era ainda radial, mas de módulo

$$E = \frac{e(1 - v^2/c^2)}{r^2\left(1 - \frac{v^2 \operatorname{sen}^2\theta}{c^2}\right)^{3/2}}$$

enquanto o campo magnético era constituído por círculos em torno da direção do movimento da carga, e com módulo:

$$H = \frac{ev \operatorname{sen}\theta}{cr^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2 \operatorname{sen}^2\theta}{c^2}\right)^{-3/2}.$$

Heaviside (Eletromagnetic theory, I, § 164, p. 269) mostrou que o campo externo de uma esfera uniformemente carregada de raio a é igual ao campo de uma linha eletrizada, de densidade de carga constante, e comprimento: 2aV/c. O campo de uma carga pontual, por outro lado, era igual ao de um elipsóide de revolução cujo eixo, na direção do movimento, tivesse um comprimento menor do que o dos eixos transversais, na razão de $\sqrt{1-v^2/c^2}$: 1, como foi mostrado por Searle (1896). Ele deu a este elipsóide o nome de "elipsóide de Heaviside".

Em seu artigo, Searle apresenta o cálculo exato da energia associada aos campos de um "elipsóide de Heaviside", verificando que a energia adicional não era proporcional a v^2, para altas velocidades:

$$W = \frac{e^2 c^2}{2R}\left(\frac{c}{v} \log \frac{c + v}{c - v} - 1\right)$$

a massa eletromagnética adicional devia, portanto, depender da velocidade da partícula.

O cálculo exato da energia do campo eletromagnético de uma carga em movimento retilíneo uniforme mostrava que essa energia tendia a um valor infinito, quando a velocidade da carga se aproximava da velocidade da luz. Por isto, Thomson e Searle afirmaram que seria impossível acelerar-se uma carga elétrica a uma velocidade superior a c (SEARLE, 1897). O único autor que discordou desta conclusão foi Heaviside. Em 1898, ele mostrou que haveria dois modos de escapar a essa conclusão (Eletromagnetic theory, vol. 2, app. G, p. 533). Um deles seria considerar um par de cargas de sinais opostos, em movimento conjunto; nesse caso, a energia podia permanecer finita, mesmo com

$v = c$. Outra solução seria levar em conta que a energia de uma carga elétrica com velocidade igual à da luz só é infinita se o movimento é uniforme; mas se ela foi bruscamente acelerada, em um intervalo de tempo Δt, apenas o campo eletromagnético dentro de um raio $R = c\ \Delta t$ em torno da carga sofrerá alterações, e a energia eletromagnética será finita, pois a densidade de energia é finita. Quatro anos mais tarde, Heaviside mostrou que se uma carga elétrica fosse bruscamente acelerada a uma velocidade superior a c, ela emitiria radiação, e por este processo a sua velocidade seria reduzida a um valor $v < c$ (Eletromagnetic theory, vol. 3, § 498, 500 e 511 - p. 120, 125 e 165).

O resultado de que uma parte da massa observável na matéria poderia ser de natureza eletromagnética levou Larmor (1895) a propor que toda a matéria seria constituída apenas por cargas elétricas, sendo toda a inércia de origem eletromagnética.

Em 1897, J.J. Thomson realiza as primeiras experiências de deflexão de elétrons (raios catódicos) em campos elétricos e magnéticos. A partir deles, obtém valores para a razão entre a carga e a massa dos elétrons (e/m). No ano seguinte, Lénard realiza medidas semelhantes, porém utilizando radiação de alta energia quando comparadas aos raios catódicos (LÉNARD,1898). Observa uma aparente redução de e/m com a velocidade, porém as medidas não eram conclusivas.

Pouco depois, Wien escreve um influente trabalho (WIEN, 1901) em que propunha que o eletromagnetismo deveria se tornar a base de toda a mecânica. Utilizando os cálculos de Heaviside e Searle, deduziu em segunda aproximação a variação da massa de uma carga com a velocidade:

$$m = \frac{1}{v}\frac{dW}{dv} \simeq \frac{2}{3}\frac{e^2}{Rc^2}\left(1 + \frac{12}{10}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Wien afirmou que as medidas de Lénard haviam mostrado essa variação (o que era um exagero).

Note-se que, em todos os experimentos realizados, a massa era medida pela deflexão dos elétrons e não por sua aceleração.

A massa eletromagnética associada a uma carga, calculada a partir da energia do campo, permite calcular o trabalho - e, portanto, a força - para aumentar ou diminuir a velocidade da carga; mas não permite avaliar a força que deve ser aplicada para mudar a direção do movimento da carga, sem alterar o módulo de sua velocidade, pois neste caso a energia permanece constante. Neste caso o cálculo da força só pode ser efetuado a partir de considerações de quantidade de movimento; e por isto, a introdução do momentum associado ao campo era essencial para se calcular o desvio de elétrons em um campo magnético, por exem plo. Na verdade, portanto, os cálculos de Heaviside e Searle não tinham relação direta com as medidas de Thomson e Lénard.

O primeiro cálculo do momentum de uma carga em movimento foi realizado por Lorentz (1901), utilizando uma aproximação válida a baixas velocidades (ver GOLDBERG, 1969). O resultado obtido foi:

$$p = \frac{2\mu_o e^2}{3a} v ,$$

e se interpretarmos o coeficiente de $\underline{v}$ como a massa inercial("massa maupertuisiana", segundo Poincaré - ver LANGEVIN, 1913), vemos que o resultado coincide com a massa cinética anteriormente calculada.

Nessa mesma época, foram realizadas as primeiras experiências de Kaufmann (1901; ver CUSHING, 1981), que exibiam uma variação da massa aparente de elétrons muito rápidos com a velocidade.

Os resultados obtidos por Kaufmann são dados na tabela abaixo:

v (10^6 m/s)	β=v/c	Obs. m/e	Calc. m/e
283	0,945	1,59	1,91
272	0,907	1,30	1,29
259	0,864	1,025	0,99
248	0,827	0,855	0,86
236	0,787	0,765	0,77

A última coluna indica o valor teórico calculado, utilizando-se os cálculos de Searle e Wien - que, na verdade, não se aplicam a esse experimento. A conclusão de Kaufmann foi de que a concordância era boa e de que talvez toda a massa do elétron fosse puramente eletromagnética.

A teoria de Lorentz já não se aplicava a este caso; mas, utilizando a relação de Poincaré entre fluxo de energia e momentum, Abraham (1902, 1903) calculou de forma exata a massa maupertuisiana de uma carga em movimento (ver GOLDBERG, 1970). Abraham supôs que a carga tem forma esférica invariável, e adotou duas alternativas: (i) uma carga elétrica distribuída homogeneamente por todo o volume da esfera; e (ii) uma carga elétrica superficial. No primeiro caso, a energia eletrostática de repouso é:

$$W_e = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a} ,$$

e a energia magnética:

$$W_m = \frac{3}{10}\frac{e^2}{a}\{(\frac{1+\beta^2}{2\beta})\ln(\frac{1+\beta}{1-\beta}) - 1\}$$

$$\simeq \frac{4}{5}\frac{e^2}{ac^2}\frac{v^2}{2} = \frac{4}{3}\frac{W_e}{c^2}\frac{v^2}{2} \quad ,$$

e o momento magnético é:

$$p = \frac{3}{5}\frac{e^2}{ac}\frac{1}{\beta}\{(\frac{1+\beta^2}{2\beta})\ln(\frac{1+\beta}{1-\beta}) - 1\}$$

$$= 2\frac{W_m}{\beta c} \simeq (\frac{4}{3}\frac{W_e}{c^2})v.$$

No caso de uma carga superficial, temos:

$$W_e = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a} \quad ,$$

$$p = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}\frac{e^2}{a})\frac{1}{\beta^2}\{(\frac{1+\beta^2}{2\beta})\ln(\frac{1+\beta}{1-\beta}) - 1\}\beta c \ .$$

A partir do momentum, como já vimos, é possível definir a massa maupertuisiana $m = |\vec{p}|/|\vec{v}|$. No entanto, Abraham preferiu definir a massa a partir da relação $F = ma$, ou seja: $m = F/a = (dp/dt)(dv/dt) = dp/dv$. Pode-se chamar esse conceito de "massa acelerativa". Conforme se considerasse uma aceleração longitudinal ou transversal ao movimento inicial, os resultados obtidos eram diferentes. Daí se originou a distinção clássica entre "massa longitudinal" e "massa transversal". No caso transversal, obtém-se $dp/dv = p/v$.

Os resultados obtidos por Abraham foram, no caso da carga esférica distribuída:

massa transversal: $m_t = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1+\frac{2}{5}\beta^2 + \frac{9}{35}\beta^4 + \ldots)$

massa longitudinal: $m_L = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1+\frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \ldots)$.

No ano seguinte, Kaufmann realiza novas medidas de e/m e as compara com a fórmula da massa transversal de Abraham, concluindo que há uma boa concordância (KAUFMANN, 1903). Mas outros físicos não ficaram satisfeitos com o modelo do elétron rígido de Abraham. Bucherer propôs um modelo em que o elétron se contraía pelo movimento, porém seu volume permanecia constante, pois ele se dilatava para os lados (BUCHERER, 1904). Obteve para as massa longitudinal e transversal:

$$m'_L = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1 + \beta^2 + \frac{10}{9}\beta^4 + \ldots),$$

$$m'_t = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1 + \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{2}{9}\beta^4 + \ldots) \ .$$

Por fim, em 1904, Lorentz desenvolve os cálculos exatos para um elétron que se contraía pelo movimento, que não se dilate lateralmente e que só tenha carga superficial (LORENTZ, 1904). Obtém:

$$m_L'' = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1-\beta^2)^{-3/2} = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1+\frac{3}{2}\beta^2+\frac{15}{8}\beta^4+\dots),$$

$$m_t'' = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1-\beta^2)^{-1/2} = \frac{2e^2}{3Rc^2}(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{3}{8}\beta^4+\dots).$$

No primeiro artigo de Einstein, em 1905, são deduzidas as expressões:

$$m_L''' = m_o(1-\beta^2)^{-3/2},$$

$$m_t''' = m_o(1-\beta^2)^{-1}.$$

No caso longitudinal, Einstein obtinha portanto o mesmo resultado de Lorentz. No caso transversal, os resultados eram diferentes e, aliás, a equação de Einstein era imcompatível com as medidas conhecidas. Em 1906, Planck corrige a dedução de Einstein, que passa a concordar com a de Lorentz (ver MILLER, Albert Einstein's special theory of relativity).

Note-se que, em todo esse desenvolvimento, houve certa confusão sobre como definir a massa e sobre a relação dos vários tipos de massa com a experiência. Agora, no entanto, as coisas estavam claras e foram desenvolvidos testes das várias teorias. Inicialmente, as medidas de Kaufmann (1905) concordaram muito bem com as equações de Abraham e mostraram menor concordância com as de Bucherer e Lorentz. Planck, que preferia a teoria de Lorentz, submeteu os resultados de Kaufmann a uma cuidadosa análise mas acabou por concordar com ele. Poincaré (1906) e Lorentz (Theory of electrons) se curvaram diante desse resultado e declararam que a teoria de Abraham era a preferível. Einstein (1907), pelo contrário, negou-se a aceitar o teste experimental como decisivo.

Só em 1914 e 1915 foram realizadas experiências mais exatas da medida de e/m em função da velocidade (NEUMAN, 1914; GUYE & LAVANCHY, 1915). Essas experiências foram favoráveis à teoria de Lorentz (e à de Einstein, que levava às mesmas equações).

4- Relação entre massa e energia potencial

Após todo esse longo histórico, podemos chegar, enfim, ao nosso problema central: quando uma carga elétrica se move em um campo eletromagnético externo, sua massa depende de sua energia potencial? Ou, de modo mais geral: qual a relação entre massa e energia potencial?

Nenhum dos trabalhos citados até agora havia examinado essa questão. Em todos eles, calculava-se a massa de um elétron supondo que só existia o campo gerado pelo próprio elétron (ABRAHAM, 1902). Supunha-se, no entanto, que os resultados obtidos eram aplicáveis às experiências de deflexão, nas quais, evidentemente, existiam campos externos aos elétrons.

Posteriormente, alguns autores falam rapidamente sobre a questão. Max von Laue (Das Relativitaetsprinzip, p. 149-50) afirma que não se pode incluir a energia potencial na relação $E = mc^2$. Tolman, pouco depois (TOLMAN, 1914), afirma o contrário; nenhum dos dois justifica sua opinião.

O primeiro autor a discutir mais seriamente a questão parece ter sido Wilson (1922). Ele supõe que uma certa fração f da energia potencial de interação elétron-núcleo caminha com o elétron e que outra fração (1-f) fica presa ao núcleo, imóvel. Supõe que essa fração que se move com o elétron contribui para sua massa. Levando essa suposição em conta, Wilson aperfeiçoa a teoria de Sommerfield do átomo de hidrogênio e mostra que, supondo-se que f = 1/10, obtém uma concordância perfeita entre teoria e experiência. No entanto, não há justificativa teórica para esse valor de f.

Para que não haja perigo de confusão, é importante distinguir entre a massa de um sistema e o de uma de suas partes. Em um sistema como um átomo, a energia potencial elétron-núcleo influencia a massa do conjunto; mas e a massa de cada uma das partes? Essa é a questão complicada.

Em sua tese de 1925, Louis de Broglie discute também o problema (BROGLIE, 1925, p. 69-70). Porém, não o resolve teoricamente, afirmando apenas que ele pode ser resolvido por experiências espectroscópicas (uma idéia semelhante à de Wilson).

Vamos dar um salto de 40 anos, deixando de lado outros autores. Em 1964, Léon Brillouin se dedica à questão e tenta resolvê-la teoricamente. Considera duas cargas elétricas em interação, com raios e cargas diferentes. Calcula a densidade de energia em torno de cada uma das cargas interagentes e conclui que exatamente a metade da energia potencial do sistema está associada a cada carga. Utilizando a relação de Einstein, calcula então uma massa correspondente a essa energia potencial (BRILLOUIN,1964, 1965).

Logo após os trabalhos de Brillouin, surgem vários outros. Palacios (1968) defende a idéia de que a energia potencial influi na massa; porém, admite que as frações da energia potencial que estão associadas a cada carga são inversamente proporcionais às suas massas iniciais (resultado a que também chega de Broglie, em 1972). Arzeliès, pelo contrário, chega à conclusão de que a energia potencial não influi na massa das partículas em interação, afirmando que, se influísse, isso seria observável no estudo do espectro do átomo de hidrogênio (ARZELIÈS, Relativistic point dynamics, § 156, p. 220).

Outros autores também discutiram o problema, sem resolvê-lo. Todos utilizam argumentos teóricos vagos e baseados em analogias. Por isso, não se chegou a um acordo sobre o problema.

Tendo conhecimento dessa situação e estimulado, em grande parte, pela preocupação do prof. Cesar Lattes com a questão, coloquei-me, quatro anos atrás, essa pergunta: será possível resolver o problema de modo definitivo?

Vamos analisar o problema: todos os autores partem da relação de Einstein ($E = mc^2$) e se debatem tentando descobrir como aplicá-la ao problema. Ora, a relação de Einstein, como já foi dito, não é uma relação geral e não há razão teórica nenhuma para supor que ela se aplique às partes de um sistema eletromagnético extenso em interação.

É preciso, levando em conta a lição histórica, determinar, em primeiro lugar, qual tipo de massa está em discussão. Como o problema é comumente colocado em termos da dinâmica de um elétron do átomo, é claro que a massa relevante é a massa maupertuisiana ($m = p/v$). Muito bem. E como calcular essa massa, nesse caso?

Mais uma vez, a resposta vem do passado: basta, em princípio, utilizar as antigas técnicas eletrodinâmicas (pré-relativísticas) de Thomson, Searle, Lorentz, Abraham, etc.. O momentum associado à carga em movimento pode ser obtido pela integração, em todo o espaço, da densidade de momentum do campo eletromagnético ($\vec{g} = \vec{S}/c^2$); além disso, deve-se levar em conta efeitos de tensão que possam surgir no sistema, utilizando então as relações de Planck e von Laue.

Isso traça um caminho claro para resolver a questão, sem o uso da relação $E = mc^2$.

Este é o problema e este é o método de resolvê-lo. O problema é, atualmente, o tema de tese de Silvia Petean, do Instituto de Física "Gleb Wataghin" da UNICAMP. Embora a tese não tenha sido ainda concluída, um caso particular já foi analisado: o de uma carga elétrica em movimento dentro (ou fora) de um capacitor. Esse caso particular permite mostrar que a energia potencial não influi na massa da partícula.

Infelizmente, embora a idéia seja simples, os cálculos são bastante complicados e não é possível mostrá-los neste artigo, que já está suficientemente longo. Terei que pedir aos leitores que acreditem que a solução existe e já foi desenvolvida.

5- Conclusão

O objetivo central deste artigo era mostrar o valor do conhecimento da História da Ciência para a prática cientí fica. No caso aqui discutido, a pesquisa histórica permitiu localizar um problema científico antigo, importante e não resolvido; e o próprio conhecimento histórico permitiu encontrar o método (clássico) para resolvê-lo conclusivamente. Note-se que, sem fazer uma análise histórica semelhante, físicos do porte de Brillouin, Arzeliès e de Broglie ficaram divagando, sendo incapazes de resolver o problema teórico.

Suponho que este exemplo mostra que o conhecimento da História da Ciência pode auxiliar a pesquisa científica atual; e que o desconhecimento da História da Ciência (ou sua não utilização) pode prejudicar a compreensão conceitual da ciência.

O exemplo aqui citado não é o único. Há outros problemas importantes em aberto, na mesma área, que admitem abordagem semelhante: será geral a relação de Thomson entre fluxo de energia e densidade de momentum? Será o tensor de momentum-energia sempre simétrico, necessariamente?

Uma última observação: o conhecimento histórico necessário para localizar ou manipular esses problemas não é elementar e não pode ser obtido a partir da mera leitura de livros de História da Ciência. O estudo histórico útil para a pesquisa é detalhado, profundo, baseado na leitura de enorme quantidade de trabalhos originais sobre um certo assunto. Ou seja: o conhecimento da História da Física pode auxiliar a pesquisa, porém não se trata de um "atalho" ou de uma mágica: o caminho preparatório é árduo, infelizmente. Ou felizmente, para quem gosta de ler trabalhos antigos.

Agradecimentos

Agradeço o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que contribui para a realização dessa pesquisa através de uma bolsa e auxílios. Agradeço também a Paulo Lenzi Jr., cujos estudos de Iniciação Científica (bolsa da FAPESP) auxiliaram a preparação do presente trabalho.

Referências Bibliográficas

1. ABRAHAM, M. Dynamik des Elektrons. Goettingen Nachr., 3: 20-41, 1902.

2. ———. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. Ann. Phys., 10(4): 105-79, 1903.

3. ———. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. Phys. Z., 4: 57-63, 1903.

4. ———. Zur Theorie der Strahlung und des Strahlungsdruck. Ann. Phys., 14(4): 236-87, 1904.

5. ARZELIÈS, H. Relativistic point dynamics. Oxford, Pergamon, 1972.

6. BARNETT, S.J. On the question of the motion of the ether in a steady electromagnetic field. Phys. Rev., 31: 662-5, 1910.

7. BARTOLI, S. Sopra i movimenti prodotti della luce e dal calore. Florence, Monnier, 1876.

8. BOLTZMANN, L. Ueber eine von Hrn. Bartoli entdeckte Beziehung der Wärmestrahlung zum zweiten Hauptsatze. Ann. Phys. Chem., 22(3): 31-72, 1884.

9. BRILLOUIN, L. L'énergie potentielle et sa masse. C. Rend. Acad. Sci. Paris, 259: 2361-2, 1964.

10. ———. The actual mass of potencial energy, a correction to classical relativity. Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 53: 475-82, 1280-4, 1965.

11. BROGLIE, L. Recherches sur la théorie des quanta. Ann. Phys., 3(10): 22-128, 1925.

12. ———. Sur la répartition des potentiels d'interaction entre les particules d'un système. C. Rend. Acad. Sci. Paris, 275 B: 899-901, 1972.

13. BUCHERER, A.H. Mathematische Einfuehrung in die Elektronentheorie. Leipzig, Teubner, 1904.

14. ———. Das deformierte Elektron und die Theorie des Elektromagnetismus. Phys. Z., 6: 833-4, 1905.

15. CUSHING, J.T. Electromagnetic mass, relativity and Kaufmann's experiments. Am. J. Phys., 49: 1133-49, 1981.

16. EINSTEIN, A. Zur Elektrodynamik bewegter Koerper. Ann. Phys. 17(4): 891-921, 1905 (a).

17. ———. Ist die Traegheit eines Koerpes von seinem Energieinhalt abhaengig? Ann. Phys., 18(4): 639-41, 1905 (b).

18. ———. Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und dit Traegheit der Energie. Ann. Phys., 20(4): 627-33, 1906.

19. ———. Ueber das Relativitaetsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrb. Radioakt. Elektr., 4:411-62, 1907.

20. FARADAY, M. Experimental researches in electricity. In: Encyclopaedia britannica. University of Chicago, 1952. v. 45.

21. ———. On the physical character of the lines of magnetic force. Phil. Mag., 3(4): 401-28, 1852.

22. FITZGERALD, G.F. Note on Mr. J.J. Thomson's investigation of the electromagnetic action of a moving electrified sphere. Proc. R. Dublin Soc., 3: 250-4 , 1881; Phil. Mag., 3(5): 302-5, 1882.

23. GALITZINE, B. Ueber strahlende Energie. Ann. Phys. Chem., 47(3): 479-95, 1892.

24. GOLDBERG, S. The Lorentz theory of electrons and Einstein's theory of relativity. Am. J. Phys., 37: 498-513, 1969.

25. ———. The Abraham theory of the electron. Arch. Hist. Ex. Sci., 7: 7-25, 1970.

26. ———. Max Planck's philosophy of nature and his elaboration of the special theory of relativity. Hist. St. Phys. Sci., 7: 125-60, 1976.

27. GUYE, C.E. & LAVANCHY, C. Verification expérimentale de la formule de Lorentz-Einstein par les rayons cathodiques de grande vitesse. C. Rend. Acad. Sci. Paris, 161: 52-5, 1915.

28. HASENOEHRL, R. Zur Theorie der Strahlung in bewegten koerpern. Ann. Phys., 15(4): 344-70, 1904: 16: 833-4, 1905.

29. HEAVISIDE, O. Electromagnetic theory. New York, Chelsea, 1971. 3 v.

30. ———. Electrical papers. London, MacMillan, 1894. 2 v.

31. ———. Electromagnetic induction and its propagation. Electrician, 14: 178-81, 306-10, 1885.

32. ———. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. Phil. Mag., 27(5): 324-39, 1889.

33. ———. On forces, stresses, and fluxes of energy in the electric field. Phil. Trans. R. Soc. London A, 183: 423-80, 1892.

34. HEIL, W. Diskussion der Versuche ueber die traege Masse bewegter Elektronen. Ann. Phys., 31(4): 519-46, 1910.

35. HELMHOLTZ, H. von. Folgerungen aus Maxwell's Theorie ueber die Bewegund des reinen Aethers. Sitz. d. Akad. Wiss. Berlin, 649-56, 1893; Ann. Phys. Chem., 53(2): 135-43, 1894.

36. HENDERSON, W.S. & HENRY, J. Experiments on the motion of the aether in an electromagnetic field. Phil. Mag., 44(5): ·20-6, 1897.

37. IVES, H.E. Derivation of the mass-energy relation. J. Opt. Soc. Am., 42: 520-43, 1952.

38. KAUFMANN, W. Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Becquerel Strahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. Goettingen Nachr., 2: 143-5, 1901.

39. ———. Ueber die elektromagnetische Masse des Elektrons. Goettingen Nachr., 3: 291-6, 1902; Phys. Z., 4: 54-7, 1902.

40. ———. Ueber die elektromagnetische Masse des Elektrons, II. Goettingen Nachr., 4: 90-103, 1903.

41. ———. Ueber die Konstitution des Elektrons. Berl. Ber., 45: 945-56, 1905.

42. ———. Ueber die Konstitution des Elektrons. Ann. Phys., 19(4): 487-553, 1906.

43. LANGEVIN, P. La physique des électrons. Rev. Gén. Sci. Pur. Appl., 16: 257-76, 1905.

44. ———. L'inertie de l'énergie et ses conséquences. J. Phys. Théor. Appl., 3(4): 553-91, 1913.

45. LARMOR, J. A dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Part II: theory of electrons. Phil. Trans. R. Soc. London A, 86: 695-743, 1985.

46. LAUE, M. von. Das Relativitaetsprinzip. Vieweg,Braunschweig, 1911.

47. LAUE, M. von. Zur Diskussion ueber den starrer Koerper in der Relativitaetstheorie. Phys. Z., 12: 85-7, 1911 (a).

48. ———. Zur Dynamik der Relativitaetstheorie. Ann. Phys., 35: 524-42, 1911 (b).

49. ———. On the conception of the current of energy. Proc. R. Acad. Amsterdam, 14: 825-31, 1912.

50. LEBEDEW, P. Untersuchungen ueber die Druckskraefte des Lichtes. Ann. Phys., 6(4): 433-58, 1901.

51. LENARD, P. Ueber die electrostatischen Eigenschaften der Kathodenstrahlen. Ann. Phys. Chem., 64(3): 279-89, 1898.

52. LEWIS, G.N. A revision of the fundamental laws of matter and energy. Phil. Mag., 16(4): 705-17, 1908.

53. LODGE, O.J. A discussion concerning the motion of the ether near the earth, and concerning the connexion between ether and gross matter, with some new experiments. Phil. Trans. R. Soc. London A, 184: 727-804, 1893.

54. ———. Experiments on the absence of mechanical connexion between ether and matter. Phil. Trans. R. Soc. London A, 189: 149-66, 1897.

55. LORENTZ, H.A. Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Koerpern. Leiden, Brill, 1895.

56. ———. Ueber die scheinbare masse der ionen. Phys. Z., 2: 78-80, 1901.

57. ———. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light. Proc. R. Acad. Sci. Amsterdan, 6: 809-36, 1904.

58. ———. Sur la masse de l'énergie. Arch. Néerl., 2: 139-54, 1912.

59. LORENTZ, H.A. Collected papers. The Hague, Nijhoff, 1937. v. 5, p. 216-28.

60. ———. Lectures on theoretical physics. London, MacMillan, 1931.

61. ———. The theory of electrons. New York, Dover, 1952.

62. MAXWELL, J.C. A treatise on electricity and magnetism. 3. ed. New York, Dover, 1954.

63. MIE, G. Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energie uebertragung. Sitz. k. Akad. Wiss. Wien (IIa), 107: 1115-82, 1898.

64. ———. Ueber den wirklichen Energiestrom in electromagnetischen Felde. Verh. d. Gesellschaft Deutsch., Naturf. u. Aertze (II), 1: 78-80, 1899.

65. MILLER, A.I. Albert Einstein's special theory of relativity. Reading, Addison-Wesley, 1981.

66. NEUMANN, G. Die traege Masse schnell bewegter Elektronen. Ann. Phys., 45(4): 529-79, 1914.

67. NICHOLS, E.F. & HULL, G.F. A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. Phys. Rev., 13: 307-20, 1901.

68. ———. The pressure due to radiaton. Astroph. J., 17: 315-51, 1903.

69. ———. Ueber Strahlungsdruck. Ann. Phys., 12(4): 225-63, 1903.

70. PALACIOS, J. Na nueva dinámica antirrelativista. Rev. R. Acad. Cienc. Ex. Fis. Nat. Madrid, 62: 69-132, 1968.

71. PLANCK, M. Die Kaufmannschen Messungen der Ablenkbarkeit der β-Strahlen in ihrer Bedeutung fuer die Dynamik der Elektronen. Verh. dtsch. phys. Ges., 8: 418-32, 1906.

72. ———. Nachtrag zu der Besprechung der Kaufmannschen Ablenkungsmessungen. Verh. dtsch. phys. Ges., 9: 301-5, 1907.

73. ———. Zur Dynamik bewegter Systeme. Sitz. preuss. Akad. Wiss. Berlin: 542-70, 1907; Ann. Phys., 26(4): 1-34, 1908.

74. POINCARÉ, H. La théorie de Lorentz et le principe de réaction (1900). In: Oeuvres de Henri Poincaré. Paris, Gauthier Villars, 1934-53. v. 9, p. 464-88.

75. ———. Sur la dynamique de l'électron. Rend. Circ. Mat. Palermo, 21: 129-75, 1906.

76. POYNTING, J.H. On the transfer of energy in the electromagnetic field. Phil. Trans. R. Soc. London A, 175: 343-61, 1884.

77. RITZ, W. Recherches critiques sur l'électrodynamique générale. Ann. Chim. Phys., 13(8): 145-275, 1908.

78. SEARLE, G.F.C. Problems in electric convection. Phil. Trans. R. Soc. London A, 187: 675-713, 1896.

79. ———. On the motion of an electrified ellipsoid. Phil. Mag., 44: 329-41, 1897.

80. THOMSON, J.J. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. Phil. Mag., 11(5): 229-49, 1881.

81. ———. On the magnetic effects produced by motion in the electric field. Phil. Mag., 28(5): 1-12, 1889.

82. ———. On the illustration of the properties of the electric field by means of tubes of electrostatic induction. Phil. Mag., 31(5): 149-71, 1891.

83. ———. Recent researches in electricity and magnetism. Oxford, Oxford University, 1893.

84. ———. Cathode rays. Phil. Mag., 44: 293-316, 1897.

85. TOLMAN, R.C. Relativity theory: general dynamical principles. Phil. Mag., 28(6): 572-82, 1914.

86. VOLTERRA, V. Sul flusso di energia meccanica. Nuovo Cimento, 10(4): 337-59, 1899.

87. WHITTAKER, Sir E. A history of the theories of eather and electricity. New York, Humanities, 1973. 2 v.

88. WIEN, W. Ueber den Begriff der Localisierung der Energie. Ann. Phys. Chem, 45(2): 684-728, 1892.

89. ———. Ueber die Moeglichkeit einer elektromagnetischen Begruendung der Mechanik. Ann. Phys., 5(4): 501-13, 1901.

90. WILSON, H.A. Quantum theory of the spectrum of hydrogen. Astroph.J., 56: 34-9, 1922.