GAUSS E A ORIGEM DA GEOMETRIA DIFERENCIAL

Ana Paula Bispo - Unicamp
Roberto de Andrade Martins – Unicamp

anabispo@ifi.unicamp.br

Resumo

A obra *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresentada à Sociedade Real de Göttingen em 1827 pode ser caracterizada como uma das principais na história da geometria diferencial durante o século 19. Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento da teoria de Gauss para o estudo de uma superfície curva e a introdução de ferramentas que serviram como base para a geometria diferencial não-euclidiana.

Introdução

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) possui trabalhos em várias áreas, envolvendo astronomia, matemática, física, etc. No período de 1818 a 1825, realiza uma série medidas de campo para o rei de Hannover, que visavam a formação de uma rede de triângulos para obter a curvatura da Terra. Este fato aumenta seu interesse pelo estudo das geodésicas que vinha desde 1813, com um trabalho sobre teoria de potencial e, com o estudo do mapeamento da superfície terrestre sobre uma esfera e um plano, em 1816 (Gilliespie, p.298).

Com o fim das medidas de campo, Gauss dedica-se aos cálculos e análise dos resultados e, em outubro de 1827, apresenta à Sociedade Real de Göttingen, o trabalho *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, que se torna seu principal trabalho sobre geometria diferencial. Nele, Gauss trata da curvatura de uma superfície curva de modo diferente do que era conhecido desde Euler. Além de relacioná-la com a área projetada sobre uma esfera auxiliar, Gauss encontra equações para a curvatura que dependem das coordenadas intrínsecas à superfície, o que permite definir seu Teorema Egregium, e construir uma linguagem em geometria diferencial que servirá como base para o desenvolvimento de uma geometria não-euclidiana por Riemann (1857).

O objetivo deste trabalho é mostrar em detalhes o desenvolvimento da teoria sobre superfícies curvas de Gauss contida em *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, destacando sua contribuição para a geometria diferencial durante o século 19 e os pontos que influenciaram Riemann e Beltrami em suas pesquisas de uma geometria não-euclidiana. Para isso baseamos o trabalho no artigo original de Gauss, publicado em latim em 1827; numa versão traduzida para o inglês por Hiltebeitel e Morehead em 1965, e numa versão traduzida para o francês em 1852.

A natureza da superfície curva

Gauss inicia o trabalho definindo uma esfera auxiliar para o estudo de uma superfície curva qualquer. A esfera auxiliar é uma esfera de raio igual a um, sem unidade dimensional. A "direção" [localização no espaço] de qualquer ponto da superfície curva está associada com o ponto correspondente sobre a esfera. Consideremos uma superfície qualquer: é possível traçar um plano tangente em cada ponto da superfície e, sobre este ponto, uma normal ao plano tangente. A normal, ou o que poderíamos associar a um vetor normal, possui um raio correspondente (paralelo) na esfera auxiliar. Do mesmo modo, o plano tangente pode ser associado a um círculo máximo. Como sobre a superfície curva as normais em diferentes pontos podem ter a mesma direção, os raios correspondentes podem ser sobrepor. Do mesmo modo, uma figura sobre a superfície curva tem vários raios associados na esfera auxiliar e desse modo forma uma figura também sobre a esfera auxiliar (Gauss, seções 1 e 2).

Definida a esfera auxiliar, é possível estudar a natureza da superfície curva através da normal ao plano tangente em determinados pontos da superfície curva, utilizando para isso as coordenadas nesta última e suas projeções na esfera auxiliar. Para este fim, Gauss adota três métodos (seções 4 e 5). O primeiro método consiste em definir uma função que descreve a superfície como $W = f(x,y,z) = 0$, onde x, y, z são as coordenadas do ponto onde é traçada a normal. O segundo método assume um sistema de coordenadas p, q sobre a superfície curva sendo que $x = x(p,q)$; $y = y(p,q)$; $z = z(p,q)$, onde x, y, z são as coordenadas cartesianas do ponto sobre a superfície. O terceiro método assume que a terceira coordenada é função das outras duas no primeiro método, ou seja, $z = z(x,y)$.

Utilizando considerações de proporcionalidade Gauss determina a relação entre as coordenadas na esfera auxiliar e as derivadas das coordenadas na superfície curva. Para os três métodos anteriores temos, respectivamente:

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} \qquad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}} \qquad Z = \frac{R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$

$$X = \frac{bc'-cb'}{\Delta} \qquad Y = \frac{ca'-ac'}{\Delta} \qquad Z = \frac{ab'-ba'}{\Delta}$$

onde: $\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-a'b)^2} = \Delta$

e

$$X = \frac{t}{\sqrt{1+t^2+u^2}} \qquad Y = \frac{u}{\sqrt{1+t^2+u^2}} \qquad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+t^2+u^2}}$$

A curvatura da superfície

A correspondência entre a figura sobre a superfície curva e a figura sobre a esfera auxiliar permite estabelecer o conceito de medida de curvatura e determinar esta constante em função das coordenadas da superfície curva através dos métodos anteriores. Diferente do conceito dado por Euler (1767), em que a curvatura dependia dos raios máximo e mínimo, Gauss associa a curvatura à razão entre as áreas da figura sobre a esfera auxiliar e sobre a superfície curva. Sendo a esfera auxiliar sem unidade dimensional, a curvatura é dada por m^{-2}. A medida de curvatura corresponde à curvatura em cada ponto da superfície e, integrada, fornece a curvatura para toda a superfície curva. Dependendo do sentido adotado para a normal como positivo, a medida de curvatura pode ser positiva ou negativa, o que deve ser levado em consideração na integração, para determinar a curvatura final. Com isso, alguns pontos se sobrepõem e outros se anulam na integração total (GAUSS, seções 6 a 11).

Considerando inicialmente um triângulo sobre a superfície curva, a relação entre as áreas nesta superfície e na esfera auxiliar, a medida de curvatura, é dada por:

$$k = \frac{dX\delta Y - dY\delta X}{dx\delta y - dy\delta x}$$

onde o numerador corresponde à área do triângulo projetada sobre a esfera auxiliar e o denominador corresponde à área nas coordenadas cartesianas sobre a superfície curva.

Usando os métodos anteriores que descrevem a natureza da superfície curva, a medida de curvatura pode ser escrita em função das coordenadas da própria superfície, ficando, para os três métodos:

1º método:

$$\left(P^2+Q^2+R^2\right)^2 k = P^2\left(QR'-P''^2\right)+Q^2\left(PR'-Q''^2\right)+R^2\left(PQ-R''^2\right)+2QR\left(Q'R'-PP'\right)$$
$$-2PR\left(P'R'-QQ'\right)+2PQ\left(P'Q'-RR'\right)$$

2º método: $k = \dfrac{DD''-D'^2}{\left(A^2+B^2+C^2\right)^2}$

3º método: $k = Z^6\left(TV-U^2\right)\left(1+t^2+u^2\right) = Z^4\left(TV-U^2\right) = \dfrac{TV-U^2}{\left(1+t^2+u^2\right)}$

O resultado obtido para o segundo método tem a vantagem de trabalhar com quaisquer coordenadas p, q sobre a superfície curva e pode ser desenvolvido usando uma notação que envolve as derivadas das coordenadas na própria superfície curva, ficando:

$$4\left(EG-F^2\right)^2 k = E\left(\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}+\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)^2\right)+F\left(\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q}+4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}-2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right)+$$
$$+G\left(\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}-2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}+\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right)-2\left(EG-F^2\right)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right)$$

Os coeficientes E, F, G dependem apenas de p, q e das derivadas dessas coordenadas em relação à projeção sobre a esfera auxiliar. Com isso é possível "varrer" toda a superfície curva. Como a curvatura é a integração da medida de curvatura, fica possível obtê-la apenas com as coordenadas sobre a própria superfície curva. Se utilizamos a relação para um elemento de linha como: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ e substituindo os coeficientes *E, F, G*, encontramos, para o elemento de linha nas coordenadas intrínsecas da superfície a expressão:

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

Se a distância entre todos os pares de pontos não se altera quando a superfície é desenvolvida sobre outra, entendendo-se desenvolvimento como se pudéssemos "cobrir" uma superfície com outra, então os coeficientes do elemento de linha permanecem inalterados, o que leva Gauss a seu Teorema Egregium:

> "*Se uma superfície é desenvolvida sobre qualquer outra superfície, a medida de curvatura em cada ponto permanece inalterada*" (Gauss, seção 12).

Uma superfície que pode ser desenvolvida sobre um plano, como um cone ou um cilindro, possui curvatura igual a zero. Uma superfície que pode ser desenvolvida sobre outra sem alterar a direção da normal possui curvatura positiva.

As expressões encontradas para a curvatura e elemento de linha não dependem das coordenadas cartesianas *x, y, z* , apenas das coordenadas *p, q*, sobre a superfície curva.

A soma dos ângulos do triângulo

O passo seguinte no trabalho de Gauss é a aplicação deste resultado para o triângulo geodésico. Após uma série de demonstrações sobre propriedades das linhas mais curtas (Gauss, seções 14 a 16), ele associa aos coeficientes *E, F, G* um significado geométrico no sistema de coordenadas *p, q*, considerando-se o crescimento de cada uma das coordenadas separadamente, e mantendo-se a outra constante. Considerando que o sistema *p, q* é formado por linhas mais curtas (geodésicas) e usando as propriedades definidas antes para estas, é possível transformar as coordenadas para coordenadas polares, em função dos coeficientes *E, F, G*, obtendo a seguinte equação para a medida de curvatura (Gauss, seções 17 a 20):

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2} \qquad \text{e} \qquad d\theta = -\frac{\partial m}{\partial p}dq \qquad \text{sendo } \sqrt{G} = m$$

Calculada a integral da medida de curvatura para um triângulo formado por linhas mais curtas (geodésicas), Gauss encontra a relação entre o excesso ou déficit em 180° da soma dos ângulos do triângulo e a área deste projetada sobre a esfera auxiliar:

> "*O excesso sobre 180° da soma dos ângulos de um triângulo formado por linhas mais curtas sobre uma superfície côncava-côncava, ou o déficit de 180° da soma dos ângulos de um triângulo formado por linhas mais curtas sobre uma esfera côncava-convexa, é medido pela área da parte da esfera a qual corresponde, através das direções das normais aquele triângulo, se a superfície total da esfera é tomada igual a 720 graus.*"

O resultado pode ser generalizado para qualquer polígono de *n* lados que possa ser subdividido em triângulos. A relação entre a soma dos ângulos e a área já era conhecida para um triângulo esférico (Legendre, p. 426). O resultado de Gauss generaliza para um triângulo sobre qualquer superfície curva (Gauss, seções 21 a 27).

A expansão em série dos três ângulos do triângulo, considerando as mesmas coordenadas polares, permite generalizar o resultado para um triângulo qualquer e obter a relação entre os ângulos e a área , dada por:

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}\left(b^2 + c^2 - 2a^2\right)$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}\left(a^2 + c^2 - 2b^2\right)$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}\left(a^2 + b^2 - 2c^2\right)$$

onde σ é área do triângulo; A*, B*, C* são os ângulos do triângulo retilíneo; A, B, C são os ângulos do triângulo sobre a superfície curva e *a, b, c* são as séries em torno de um ponto, nas coordenadas *p, q*. Negligenciando os termos de quarta ordem, Gauss aplica ao caso dos triângulos entre as cidades de Hohehagen, Brocken e Inselberg :

> *"Então para os ângulos A, B, C sobre uma superfície não-esférica, devem ser aplicadas reduções desiguais, tal que os senos dos ângulos alterados se tornem proporcionais aos lados opostos. A desigualdade, geralmente falando, será de terceira ordem; mas se a superfície difere pouco de uma esfera, a desigualdade será de ordem mais alta. Mesmo nos maiores triângulos sobre a superfície da terra, cujos ângulos são possíveis de se medir, a diferença sempre pode ser considerada como insensível. Então, por exemplo, no maior dos triângulos que pudemos medir nos anos recentes, ou seja, aquele entre os pontos Hohehagen, Brocken, Inselberg, onde o excesso da soma dos ângulos foi 14"85348, o cálculo deu as seguintes reduções a serem aplicadas aos ângulos:*
>
> *Hohehagen. . . . . –4"95113*
> *Brocken. . . . .–4"95104*
> *Inselberg. . . . .–4"95131".* (Gauss, seção 28)

A medição feita por Gauss fornece uma diferença na casa dos segundos de arco, o que é incompatível com a precisão permitida pelos aparelhos utilizados na época (Breitenberger, 1984). Para o caso das medidas de triângulos, Gauss havia criado um aparelho que realizava a medida da distância através da reflexão da luz por dois espelhos perpendiculares entre si, o qual sofria influência da temperatura e do terreno, o que tornava tamanha precisão nas medidas impossível de ser obtida.

Conclusão

Segundo alguns autores o resultado obtido por Gauss está relacionado ao seu interesse por geometria não-euclidiana. No entanto, o trabalho é todo ele desenvolvido em um espaço euclidiano, utilizando propriedades da trigonometria esférica, conhecida desde os tempos das navegações, e que têm como referência a geometria de Euclides. A introdução da esfera auxiliar para estudar a superfície curva permite utilizar as propriedades da trigonometria esférica para obter um resultado genérico para qualquer superfície curva.

O uso de coordenadas intrínsecas para descrever a natureza da superfície e assim determinar a expressão para o elemento de linha e da curvatura foram introduzidas por Gauss e serviram de base para o desenvolvimento da geometria num espaço não-euclidiano de Riemann (1854) e Beltrami (1868).

Referências

BELTRAMI, Eugenio. Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea. *Giornale di Matematica,* 6: 284-312, 1868.

BREITENBERGER, Ernst. Gauss's geodesy and the axiom of parallels. *Archive for History of Exact Sciences*, 31 (3): 273-289, 1984.

EULER, Leonard. Recherches sur la courbure des surfaces [1760]. *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin,* 16: p. 119-143, 1767 (Estes textos estão disponíveis também em formato PDF em <http://gallica.bnf.fr>).

GAUSS, Karl Friedrich. *General investigations of curved surfaces* [1827]. Trad. Adam Hiltebeitel and James Morehead. New York: Raven Press Hewlett, 1965.

——. *Recherches générales sur les surfaces courbes.* Trad. M. A.. Paris: Bachelier, 1852.

——. Disquisitiones generales circa superficies curvas. In: *Werke.* Göttingen: Dieterich, 1863. Vol. 4, pp. 217-258.

GILLIESPIE, Charles Coulston (org.). *Dictionary of scientific biography.* New York: Charles Scribner's, 1981, 16 vols.

LEGENDRE, A. M. *Éléments de géométrie* 11ª ed. Paris: Firmin Didot, 1817.

RIEMANN, Bernhard. On the hypotheses wich lie at the bases of geometry. Trad. William Kingdon Clifford. *Nature* 8 (183): 14-17, (184):36- 37, 1873.