VELASCO, Patrícia Del Nero. Sobre o operador de conseqüência de Tarski. *In*: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C., P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro*. Campinas: AFHIC, 2004. Pp. 351-358. (ISBN 85-904198-1-9)

SOBRE O OPERADOR DE CONSEQÜÊNCIA DE TARSKI

Patrícia Del Nero Velasco *

Resumo – Apresentamos algumas propriedades do operador de conseqüência, devidas a A. Tarski, que aparecem no artigo "On some fundamental concepts of metamathematics", que é de importância fundamental na medida em que representa o primeiro trabalho sobre lógica abstrata.

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas propriedades do operador de conseqüência Cn postuladas por A. Tarski em seu artigo inaugural "On some fundamental concepts of metamathematics" (TARSKI, 1993a). No texto em questão, Tarski faz uma primeira introdução à lógica abstrata (ou universal) a partir da definição de um sistema lógico constituído somente por sentenças e pelo operador de conseqüência. O operador de conseqüência de Tarski indica, dado um conjunto de sentenças, qual é o conjunto de sentenças que é conseqüência do conjunto dado. Logo, L = (S,Cn) é dito um *sistema lógico* ou uma *estrutura de Tarski*, sendo S um conjunto não vazio e enumerável. A enumerabilidade de S facilita algumas demonstrações, como o Teorema de Lindenbaum, evitando o uso de ferramentas conjuntistas mais sofisticadas como o Lema de Zorn, ou o Axioma da Escolha que lhe é equivalente. Utilizaremos letras latinas minúsculas para denotar elementos de S e maiúsculas para subconjuntos de S, bem como letras cursivas para famílias de subconjuntos de S.

O operador Cn é definido no conjunto dos subconjuntos de S, ou seja: Cn: $\wp(S) \rightarrow \wp(S)$. E os seguintes axiomas são satisfeitos:

Axioma 1. $X \subseteq Cn(X)$. Este axioma é comumente denominado *axioma da autodedutibilidade* e afirma que se uma sentença a pertence a um conjunto X, então esta mesma sentença a pertence às conseqüências de X. Ou seja: toda sentença pertencente a um dado conjunto é considerada como uma conseqüência deste conjunto.

Axioma 2. $Cn(Cn(X)) = Cn(X)$. Este axioma, denominado *axioma da idempotência*, afirma que as conseqüências das conseqüências de um conjunto X é igual às próprias conseqüências de X. Em

* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP,Brasil. pdnvelasco@hotmail.com.

outras palavras: que o conjunto das conseqüências de um dado conjunto não pode ser alargado por meio de uma nova aplicação do operador de conseqüência.

Axioma 3. $Cn(X) = \cup Cn(X')$ para todo $X' \subseteq X$ finito. Este axioma, dito *axioma da compacidade dedutiva* diz que as conseqüências de um conjunto correspondem exatamente à união das conseqüências de todos os seus subconjuntos finitos, ou seja, se uma sentença é conseqüência de um conjunto de sentenças então ela é conseqüência de uma parte finita do mesmo e vice-versa. É importante ressaltar que este axioma é crucial para o sistema de Tarski, porque é a chave da demonstração da primeira proposição, e esta embasa quase todos os resultados seguintes.

Axioma 4. Existe uma sentença a tal que $Cn(\{a\}) = S$. Este axioma é denominado *axioma da trivialização*: existe uma sentença a tal que as conseqüências do conjunto constituído por a correspondem ao conjunto de todas as sentenças de L. Em outras palavras, dito de maneira não precisa, isto significa que existe uma sentença que trivializa o sistema, ou seja, uma sentença a partir da qual todas as sentenças são conseqüência.

O primeiro resultado importante da estrutura de Tarski é denominado Lei de monotonicidade e, como dito anteriormente, é de extrema importância para a estrutura estudada, pois permeia a maioria das demonstrações. A proposição 1 permite afirmarmos que o operador de conseqüência Cn, no domínio dos conjuntos de sentenças, é monotônico, ou seja, se uma sentença a pertence às conseqüências do conjunto X e X está contido em Y, então a sentença a pertence também às conseqüências do conjunto Y.

Proposição 1. Se $X \subseteq Y$, então $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Demonstração. Suponha que $X \subseteq Y$ e $a \in Cn(X)$. Assim, pelo axioma 3, $a \in \cup Cn(X')$ para todo $X' \subseteq X$ finito. Logo, existe $X' \subseteq X$ finito tal que $a \in Cn(X')$. Assim, existe $X' \subseteq Y$ finito tal que $a \in Cn(X')$. Portanto, usando novamente o axioma 3, obtemos $a \in Cn(Y)$. QED

Posteriormente, Tarski assume esta proposição 1 como axioma ao invés da compacidade. No entanto, o sistema assim definido é mais fraco, pois a compacidade não é dedutível da monotonicidade com as outras condições postuladas.

Corolário.
(i) Se $A \subseteq Cn(B)$, então $Cn(A) \subseteq Cn(B)$.
(ii) $Cn(A) \subseteq Cn(A \cup B)$.

Demonstração. Para (i). Seja $A \subseteq Cn(B)$. Pela proposição 1, temos $Cn(A) \subseteq Cn(Cn(B))$. Assim, pelo axioma 2, $Cn(A) \subseteq Cn(B)$. Para (ii). Segue imediatamente da aplicação da proposição 1 no resultado conjuntista $A \subseteq A \cup B$. QED

Proposição 2. $Cn(X \cup Y) = Cn(X \cup Cn(Y)) = Cn(Cn(X) \cup Cn(Y))$.

Demonstração. A idéia é mostrar, utilizando a proposição 1, que: (i) $Cn(X \cup Y) \subseteq Cn(X \cup Cn(Y))$, (ii) $Cn(X \cup Cn(Y)) \subseteq Cn(Cn(X) \cup Cn(Y))$ e (iii) $Cn(Cn(X) \cup Cn(Y)) \subseteq Cn(X \cup Y)$. Para (i). Se $Y \subseteq Cn(Y)$ então $X \cup Y \subseteq X \cup Cn(Y)$ e, portanto, $Cn(X \cup Y) \subseteq Cn(X \cup Cn(Y))$. Para (ii). Se $X \subseteq Cn(X)$ então $X \cup Cn(Y) \subseteq Cn(X) \cup Cn(Y)$ e, portanto, $Cn(X \cup Cn(Y)) \subseteq Cn(Cn(X) \cup Cn(Y))$.

Para (iii). Como $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$, temos, respectivamente, $Cn(X) \subseteq Cn(X \cup Y)$ e $Cn(Y) \subseteq Cn(X \cup Y)$. Logo, $Cn(X) \cup Cn(Y) \subseteq Cn(X \cup Y)$ e, por monotonicidade, $Cn(Cn(X) \cup Cn(Y)) \subseteq Cn(Cn(X \cup Y)) = Cn(X \cup Y)$. QED

Devido à compacidade dedutiva temos que qualquer subconjunto finito das conseqüências de um dado conjunto também é subconjunto das conseqüências de uma parte finita do conjunto dado, como afirma o próximo resultado, útil nas demonstrações que seguem.

Proposição 3. Se C é finito e $C \subseteq Cn(A)$, então existe um conjunto B finito tal que $B \subseteq A$ e $C \subseteq Cn(B)$.

Demonstração. Seja $C = \{c_1, c_2,..., c_m\}$ e, por hipótese, $C \subseteq Cn(A)$. Então $c_i \in Cn(A)$. Assim, pelo axioma 3, existe um conjunto $A_i \subseteq A$ finito tal que $c_i \in Cn(A_i)$. Seja, agora, $\cup_{1 \leq i \leq m} A_i = B$. Portanto, temos que:

(i) B é finito, pois B é (por definição) união de finitos;

(ii) $B \subseteq A$, pois $A_i \subseteq A$ $(1 \leq i \leq m)$;

(iii) $C \subseteq Cn(B)$. Isso porque temos que $c_i \in C$, e, por conseguinte, $c_i \in Cn(A_i)$. Como $A_i \subseteq B$, pela proposição 1, $Cn(A_i) \subseteq Cn(B)$, e assim, $c_i \in Cn(B)$, $\forall c_i$. Portanto, segue o resultado. QED

Em geral não vale $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$, isto é, não se pode comutar o operador de conseqüência com a união de conjuntos. No entanto, sob certa condição, isso é possível, como estabelecido na seguinte proposição.

Proposição 4. Seja $R \subseteq \wp(S)$ uma classe que satisfaça a seguinte condição: (α) Para toda subclasse finita L de R existe um conjunto $Y \in R$ tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$. Então, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$.

Demonstração. Considere $x \in Cn(\cup_{X \in R} X)$. Definimos $A = \cup_{X \in R} X$. Então, $x \in Cn(A) = \cup_{A' \subseteq A \text{ finito}} Cn(A')$. Logo, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $x \in Cn(A')$. Assim, $A' \subseteq \cup_{X \in R} X$ finito. Seja $L = \{X \in R: X \cap A' \neq \varnothing\}$. Como A' é finito, existe $L \subseteq R$ finito tal que $A' \subseteq \cup_{X \in L} X$. Como L é finito, usando a condição (α), existe $Y \in R$ tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$. Logo, $A' \subseteq Y$ e, então, $Cn(A') \subseteq Cn(Y)$. Portanto, $x \in Cn(Y)$ e como $Y \in R$, temos que $x \in \cup_{X \in R} Cn(X)$. Considere agora $x \in \cup_{X \in R} Cn(X)$. Então, existe $X' \in R$ tal que $x \in Cn(X')$. Como $X' \subseteq \cup_{X \in R} X$, então $Cn(X') \subseteq Cn(\cup_{X \in R} X)$. Logo, $x \in Cn(\cup_{X \in R} X)$. QED

Corolário. Seja $R \subseteq \wp(S)$ uma classe que satisfaça a seguinte condição: (β) $R \neq \varnothing$ e para quaisquer dois conjuntos V e Z pertencentes a R, ou $V \subseteq Z$ ou $Z \subseteq V$. Então $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$.

Demonstração. Suponha (β). Logo, para toda subclasse finita L de R existe um conjunto $Y \in R$ tal que $\cup_{X \in L} X \subseteq Y$. Como $R \subseteq \wp(S)$, então, pela proposição 4, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$. QED

A partir dos conceitos primitivos de sentença e conseqüência, quase todos os conceitos importantes de metamatemática podem ser definidos. Com base no sistema axiomático dado, diversas propriedades fundamentais desses conceitos podem ser estabelecidas.

Um primeiro conceito definido nos termos acima é o de *sistema dedutivo fechado* que aqui denominaremos teoria. Uma teoria é um conjunto que já contém todas as suas conseqüências. Visto que o axioma 1 garante que $X \subseteq Cn(X)$, o conceito de teoria, primordial para o sistema tarskiano, pode ser assim definido:

Definição 1. X é *teoria* se e somente se $X = Cn(X)$.

O primeiro resultado interessante sobre teorias afirma que Cn(X) é teoria e é a menor teoria que inclui X, como abaixo demonstrado:

Proposição 5. Cn(X) é teoria e é a menor teoria que inclui X.

Demonstração. Seja $Y = Cn(X)$. Então, $Cn(Y) = Cn(Cn(X)) = Cn(X) = Y$ e, portanto, Y é teoria e $X \subseteq Y$, pois $X \subseteq Cn(X)$. Suponha que exista uma teoria Y' tal que $X \subseteq Y' \subseteq Y$. Logo, por monotonicidade, $Cn(X) \subseteq Cn(Y') \subseteq Cn(Y)$. Mas $Cn(Y) = Cn(X)$. Logo, $Cn(Y') = Cn(Y)$. Como Y e Y' são teorias, $Cn(Y) = Y$ e $Cn(Y') = Y'$. Então $Y = Y'$. E segue o resultado. QED

Um resultado fácil de ser obtido é que a intersecção de qualquer família não vazia de teorias é teoria, como abaixo enunciado.

Proposição 6. Se R é uma família de teorias e $R \neq \emptyset$, então $\cap R$ é teoria.

Demonstração. Sabemos que $\cap R \subseteq Z$ para todo $Z \in R$. Por monotonicidade, $Cn(\cap R) \subseteq Cn(Z)$. Como Z é teoria, $Cn(\cap R) \subseteq Z$ (para todo $Z \in R$). Logo, $Cn(\cap R) \subseteq \cap R$ e, portanto, $\cap R$ é teoria. QED

Enquanto a intersecção de teorias é teoria, a união de teorias nem sempre é teoria. Assim, a próxima proposição estabelece uma condição suficiente para que a união de teorias seja, igualmente, teoria.

Proposição 7. Se R é uma família de teorias que satisfaz a condição (α) da proposição 4, então $\cup_{X \in R} X$ é teoria.

Demonstração. Como R é uma família de teorias, $R \subseteq \wp(S)$. Assim, pela proposição 4, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} Cn(X)$. Como $X \in R$ e R é família de teorias, X é teoria, ou seja, $X = Cn(X)$. Logo, $Cn(\cup_{X \in R} X) = \cup_{X \in R} X$ e, por conseguinte, $\cup_{X \in R} X$ é teoria. QED

A condição acima enunciada para a união de teorias é suficiente, mas não necessária. No entanto, se restringirmos o sistema lógico para aqueles que pressupõem o cálculo proposicional clássico e assumirmos que a classe R é finita, então obtemos o seguinte resultado atribuído a Lindenbaum: se $\cup_{X \in R} X$ é teoria então a classe R satisfaz a condição (α) da proposição 4 e R é uma família de teorias.

Um segundo conceito definido por Tarski é o de equivalência entre conjuntos. Assim, dois conjuntos são chamados logicamente equivalentes, ou simplesmente equivalentes, se e somente se as conseqüências destes mesmos coincidem. A importância do conceito de equivalência reside no fato de que quase toda propriedade a ser considerada aqui se aplica a todos os conjuntos equivalentes a um dado conjunto A sempre que esta mesma propriedade se aplica a A.

Definição 2. X é *equivalente* a Y se e somente se $Cn(X) = Cn(Y)$.

O conceito de *consistência*, próximo a ser definido, é de fundamental importância para a metamatemática: trata-se de um conceito central em torno do qual as pesquisas das disciplinas dedutivas se desenvolvem. Um conjunto de sentenças é dito *consistente* se e somente se não é equivalente ao conjunto de todas as sentenças, *i.e.*, se o conjunto de suas conseqüências não contém como elementos todas as sentenças. (Em caso contrário, o conjunto é dito *inconsistente*.)

Definição 3. X é *consistente* se e somente se $Cn(X) \neq S$.

Deve-se notar que a definição de Tarski para conjuntos consistentes difere da usual, segundo a qual um conjunto de sentenças é dito consistente se e somente se para toda sentença é impossível que esta e a sua negação pertençam às conseqüências do mesmo. Portanto, a definição tarskiana possui caráter mais geral, dado que o conceito de negação não é pressuposto – podendo (como agora) ser aplicada às disciplinas dedutivas que prescindem do conceito de negação ou que a negação não se comporta classicamente como no caso das lógicas paraconsistentes. É interessante dizer, contudo, que as definições mencionadas são equivalentes para as disciplinas baseadas no sistema ordinário do cálculo sentencial clássico (TARSKI, 1983a, teorema 9*).

Uma propriedade importante dos conjuntos consistentes é expressa na próxima proposição:

Proposição 8. O conjunto A é consistente se e somente se todo subconjunto finito de A é consistente.

Demonstração. Demonstraremos a contrapositiva, ou seja, o conjunto A é inconsistente se e somente se existe um subconjunto finito de A inconsistente. Seja $A \subseteq S$ inconsistente, *i.e.*, $Cn(A) = S$. Assim, $S = \cup\, Cn(A')$ para todo $A' \subseteq A$ finito. Considere o axioma 4: existe $a \in S$ tal que $Cn(\{a\}) = S$. Portanto, existe $A' \subseteq A$ finito tal que $a \in Cn(A')$. Então, $\{a\} \subseteq Cn(A')$ e, portanto, $S = Cn(\{a\}) \subseteq Cn(Cn(A')) = Cn(A')$. Assim, $Cn(A') = S$ e $A' \subseteq A$ finito. Considere agora $A' \subseteq A$ tal que A' é inconsistente. Logo, $Cn(A') = S$ e $Cn(A') \subseteq Cn(A)$. Temos então que $S = Cn(A') \subseteq Cn(A) \subseteq S$. Logo, $Cn(A) = S$, ou seja, A é inconsistente. QED

Vimos, na proposição 7, a condição suficiente para a união de teorias ser igualmente uma teoria. A próxima proposição mostrará a condição suficiente para a união de conjuntos consistentes ser igualmente consistente (visto que a mera união de conjuntos consistentes não garante que o novo conjunto formado seja consistente).

Proposição 9. Se R é uma família de conjuntos consistentes e satisfaz a condição (α) da proposição 4, então $\cup_{X\in R} X$ é consistente.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\cup_{X\in R} X$ é inconsistente. Assim, pela proposição anterior, existe $A \subseteq \cup_{X\in R} X$ finito e inconsistente. Como A é finito, existe uma subclasse $L \subseteq R$ finita tal que $A \subseteq \cup_{X\in L} X$. Logo, pela condição ($\alpha$), existe $Y \in R$ e portanto consistente tal que $\cup_{X\in L} X \subseteq Y$. Assim, $A \subseteq Y$ e novamente pela proposição 8, Y é inconsistente (contradição!). QED.

A última definição a ser trabalhada nesta apresentação é a de conjunto completo. Diz-se que um conjunto é *completo* se e somente se para todo conjunto consistente do qual este primeiro é subconjunto, tem-se que tais conjuntos são equivalentes.

Definição 4. X é *completo* se e somente se para todo Y consistente que inclui X, $Cn(X) = Cn(Y)$.

Assim como mencionado em relação à definição de consistência, a definição tarskiana de conjunto completo difere da usual, segundo a qual um conjunto é completo se e somente se para toda sentença, ou a própria sentença ou a negação desta pertencem às conseqüências do conjunto referido. Novamente, a definição de Tarski prescinde do conceito de negação, sendo mais geral e, contudo, equivalente à definição usual para todas as disciplinas embasadas no cálculo sentencial clássico (TARSKI, On some fundamental concepts of metamathematics, teorema 10*).

A definição de Tarski, acima apresentada, não é operacional. Portanto, demonstraremos uma proposição que oferece uma caracterização de conjunto completo mais operacional e intuitiva, a saber: um conjunto é completo se e somente se para toda sentença que não pertence às conseqüências do conjunto dado, se unirmos tal sentença ao conjunto dado, o fecho deste novo conjunto coincidirá com o conjunto S de todas as sentenças.

Proposição 10. X é completo se e somente se para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = S$.

Demonstração. Seja $X \subseteq S$. Se X é inconsistente, não há nada a demonstrar, visto que os dois lados da equivalência são satisfeitos. Seja, então, X consistente, *i.e.*, $Cn(X) \neq S$. Suponha que X é completo e $x \notin Cn(X)$. Suponha, por absurdo, que $Cn(X \cup \{x\}) \neq S$. Assim, $X \cup \{x\}$ é consistente e $X \subseteq X \cup \{x\}$. Como X é completo, $Cn(X) = Cn(X \cup \{x\})$. Mas $x \in Cn(X \cup \{x\})$ e, portanto, $x \in Cn(X)$ (contradição!). Suponha, agora, que para todo $x \notin Cn(X)$, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Seja Y consistente tal que $X \subseteq Y$. Suponha, por absurdo, que $Cn(X) \neq Cn(Y)$. Por monotonicidade, $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$ e, então, existe $x \in Cn(Y)$ tal que $x \notin Cn(X)$. Logo, por hipótese, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Mas $X \cup \{x\} \subseteq Cn(Y)$ e, assim, $Cn(X \cup \{x\}) \subseteq Cn(Cn(Y)) = Cn(Y)$. Então, $S \subseteq Cn(Y)$ e, portanto, $Cn(Y) = S$ (contradição!). QED

Um outro resultado interessante que será utilizado a seguir diz respeito às teorias consistentes e completas:

Proposição 11. X é teoria consistente e completa se e somente se X é consistente e para toda $x \in S$, ou $x \in X$ ou $Cn(X \cup \{x\}) = S$.

Demonstração. Seja X uma teoria consistente e completa. Em particular, X é consistente. Seja $x \in S$. Se $x \in X$, então segue o resultado. Se $x \notin X$, $x \notin C(X)$, pois X é teoria. Como também X é completo, pela proposição anterior, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Suponha, agora, X consistente tal que para toda $x \in S$, ou $x \in X$ ou $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Por hipótese, X é consistente. Suponha, por absurdo, que X não é teoria, *i.e.*, $X \neq Cn(X)$. Logo, existe $x \in Cn(X)$ tal que $x \notin X$. Assim, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Mas sabemos, pela proposição 2, que $Cn(X \cup \{x\}) = Cn(Cn(X) \cup \{x\})$. Conseqüentemente, $Cn(Cn(X) \cup \{x\}) = Cn(Cn(X)) = Cn(X)$ e, portanto, $Cn(X) = S$ (contradição!). Logo, X é teoria. Por fim, mostremos que X é completo. A proposição 10 afirma que X é completo se e somente se para todo $x \in S$, se $x \notin Cn(X)$ então $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Suponha, assim, que $x \notin Cn(X)$. Como X é teoria, $x \notin X$ e, por hipótese, $Cn(X \cup \{x\}) = S$. Logo, X é completo. QED

Um resultado importante envolvendo todas as definições apresentadas é conhecido na literatura como *teorema de Lindenbaum*, uma vez que foi originalmente estabelecido por este autor para sistemas incompletos do cálculo sentencial (TARSKI, 1983c; TARSKI & LUKASIEWICZ, 1983). Este teorema afirma que todo conjunto consistente de sentenças pode ser aumentado de modo a formar uma teoria consistente e completa.

Teorema de Lindenbaum. Se X é consistente, então existe um conjunto Y que inclui X que é teoria consistente e completa.

Demonstração. Lembrando que S é enumerável, fixemos uma enumeração dos seus elementos, ou seja, seja $S = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Construiremos, a partir de um conjunto consistente X, uma seqüência infinita de conjuntos X_i com $i \in \omega$, o conjunto dos números naturais. Definimos:

$X_0 = X$	
$X_1 = X_0 \cup \{a_1\}$	se $X_0 \cup \{a_1\}$ é consistente
$X_1 = X_0$	em caso contrário
…	
$X_n = X_{n-1} \cup \{a_n\}$	se $X_{n-1} \cup \{a_n\}$ é consistente
$X_n = X_{n-1}$	em caso contrário
…	

Definimos, assim, $R = \{ X_0, X_1, ...\}$ e $Y = \cup X_i$, com $i \in \omega$.
A partir da construção acima, temos os seguintes resultados:

$X_i \subseteq X_{i+1}$	para todo $i \in \omega$;
$X_i \subset X_j$	para todo $i,j \in \omega$, com $i < j$;
$X_i \subseteq Y$	para todo $i \in \omega$; em particular, $X \subseteq Y$;
Se L é um subconjunto finito de R, então existe $k \in \omega$ tal que $\cup L \subseteq X_k$.	
X_i é consistente	para todo $i \in \omega$;

Portanto, R é consistente. Por (4), (5) e a proposição 9, $\cup R = \cup X_{i \text{ (para todo } i \in \omega)} = Y$ é consistente. Suponha agora, por absurdo, que $x \notin Y$ e $Cn(Y \cup \{x\}) \neq S$. Assim, $x \notin X_i$ e, por construção, $Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) = S$. Mas $X_{i-1} \cup \{x\} \subseteq Y \cup \{x\}$ e, portanto, $Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) \subseteq Cn(Y \cup \{x\})$. Assim, $S = Cn(X_{i-1} \cup \{x\}) \subseteq Cn(Y \cup \{x\}) \neq S$ (contradição!). Logo, $x \in Y$ ou $Cn(Y \cup \{x\}) = S$. Finalmente, usando a proposição 11, obtemos que Y é uma teoria consistente e completa. QED

Os resultados presentes no artigo inaugural de Tarski e acima demonstrados foram reapresentados pelo autor em um outro artigo, intitulado "Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences" (TARSKI, 1983b), no qual Tarski inicia a articulação da idéia de uma *base lógica* de um sistema dedutivo. Para um estudo extensivo do artigo inaugural mencionado pode-se recorrer à Velasco (2000). Para um estudo da relação entre o teorema de Lindenbaum e a noção de completude semântica (que é diferente da completude presente neste trabalho) ver DE SOUZA (2001). Para um estudo sobre tópicos ventilados neste artigo ver DE SOUZA & VELASCO (2002). Agradecemos a Edelcio G. de Souza por críticas e sugestões à versão preliminar do artigo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: A teoria geral. *Cognitio: Revista de Filosofia* **2**: 213-19, 2001.

DE SOUZA, E. G.; VELASCO, P. D. N. Lindenbaumologia II: Cálculos lógicos abstratos. *Cognitio: Revista de Filosofia* **3**: 115-21, 2002.

TARSKI, A. On some fundamental concepts of metamathematics. *In:* CORCORAN, J. (ed.). *Logic, semantics, metamathematics*. Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983. Pp. 30-37. (a)

———. Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences. *In:* CORCORAN, J. (ed.). *Logic, semantics, metamathematics*. Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983. Pp. 60-109. (b)

———. On extensions of incomplete systems of the sentencial calculus. *In:* CORCORAN, J. (ed.). *Logic, semantics, metamathematics*. Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983. Pp. 393-400. (c)

TARSKI, A.; LUKASIEWICZ, J. Investigations into the sentencial calculus. *In:* CORCORAN, J. (ed.). *Logic, semantics, metamathematics*. Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983. Pp. 38-59.

VELASCO, P. D. N. *Estudos em lógica abstrata: sobre um artigo inaugural de A. Tarski*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.