LEGRIS, Javier. Demostraciones formales y razonamiento estructural. *In*: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C. P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro*. Campinas: AFHIC, 2004. Pp. 218-225. (ISBN 85-904198-1-9)

DEMOSTRACIONES FORMALES Y RAZONAMIENTO ESTRUCTURAL

Javier Legris *

Resumen – Este trabajo se ocupa de los aspectos puramente lógicos de las demostraciones, tal como son analizados desde la perspectiva del razonamiento estructural, según la cual las deducciones más básicas son deducciones estructurales, en las que todos los símbolos son esquemáticos; no hay constantes de ningún tipo. El término "estructural" hace referencia al hecho de que en estas deducciones se aplican exclusivamente reglas estructurales en el sentido de los sistemas de secuentes de Gentzen. En el trabajo se discutirá en qué medida la idea de razonamiento estructural sirve para aclarar la naturaleza de las deducciones lógicas y también se tematizarán las relaciones entre las demostraciones formales y sus contrapartidas preformales.

El *razonamiento estructural* (expresión tomada de SCHROEDER-HEISTER, 2002) ha mostrado ser un marco formal general sumamente útil para analizar y comparar muy diferentes sistemas de lógica. En particular, ha servido para caracterizar lógicas que no pueden encuadrarse dentro del razonamiento deductivo (tales como las lógicas no monótonas y la lógica lineal) y que han sido llamadas "lógicas subestructurales". La idea básica de este marco formal consiste en dar las propiedades que definen las constantes lógicas en diferentes sistemas sobre la base de "propiedades estructurales". Estas propiedades se dan por supuestas en el tipo de inferencia que se pretenden reconstruir en un sistema lógico. Así, la naturaleza de las constantes lógicas dentro de un sistema determinado de lógica depende de la naturaleza de la relación de inferencia subyacente al sistema. Esto es lo que ha llevado a una concepción de las constantes lógicas como "signos de puntuación" (véase DOSEN, 1994). El razonamiento estructural toma sus ideas de los sistemas de secuentes concebidos por Gentzen y es considerado por ello como una perspectiva enraizada en la teoría de la demostración. Este trabajo consiste en una serie de observaciones acerca de la relación entre el razonamiento estructural y la idea de demostración formal. Con este fin se hará referencia a la "teoría general de la demostración" y a la distinción entre "lógica como lenguaje" y "lógica como cálculo". A modo de conclusión, se sostendrá la conveniencia de entender este marco del razonamiento estructural

* Universidad de Buenos Aires (UBA) y Conicet, Argentina. E-mail: jlegris@mail.retina.ar

como una metodología general para desarrollar sistemas lógicos y no como una reconstrucción de una idea preformal de deducción.

1 LA FORMALIZACIÓN DE DEMOSTRACIONES Y LA TEORÍA DE LA DEMOSTRACIÓN

Las demostraciones aparecen en la metodología científica desde por lo menos el siglo III a. C., con la sistematización de la geometría debida a Euclides y la teoría aristotélica de la ciencia. Aristóteles hizo en los *Segundos Analíticos* una caracterización de las demostraciones que se convirtió en clásica. Según esta, una demostración es un *razonamiento deductivo* que proporciona *conocimiento*. Una demostración es sobre todo una manera de *justificar* la afirmación de un enunciado a partir de otros que han sido afirmados previamente por medio de una serie de inferencias. El carácter justificatorio de la demostración tiene como condición necesaria que el enunciado *demostrado* se *deduzca* a partir de otros (y este es el aspecto *lógico* de la demostración).

En este punto se introduce el concepto de demostración *formal*, cuyos criterios de corrección depende de la *forma lógica*, de los enunciados que integran una demostración. En esta forma lógica son las expresiones lógicas las que son constantes. Siendo aún más estrictos, se habla de demostraciones efectuadas en un lenguaje formal. Se tiene, entonces, un concepto *formalizado* de demostración, definido inductivamente sobre la base de las fórmulas del lenguaje y del sistema de deducción en consideración (este es el concepto de derivabilidad formal definido por medio de sistemas formales). Las demostraciones son en este caso secuencias de fórmulas del lenguaje. Es muy discutible si las demostraciones formales capturan todo el *contenido* intuitivo que se le adscribe al concepto de demostración.

Esta es la idea de demostración que fue tematizada por la teoría de la demostración surgida en el contexto del programa de Hilbert, según el cual toda demostración matemática debía poder reducirse a procedimientos demostrativos finitarios. Posteriormente las investigaciones de Gentzen constituyeron lo que Dag Prawitz llamó *teoría general de la demostración*, con el propósito expreso de reconstruir formalmente las demostraciones matemáticas (PRAWITZ, 1981). Esta se basa particularmente en el sistema de deducción natural. Según una afirmación del propio Gentzen, las reglas de introducción de este sistema confieren *significado* a, son las definiciones de, las constantes lógicas y las reglas de eliminación deben *justificarse* por las reglas de introducción (GENTZEN, 1935). De este modo, la sistematización que la deducción natural hacía de las deducciones formales tenía una dimensión *semántica*. En este sentido, son muy ilustrativas las correspondencias entre las reglas de introducción de la deducción natural y la interpretación BHK, la interpretación standard de las constantes lógicas intuicionistas. De acuerdo con las ideas originales de Gentzen, las reglas de introducción son válidas en virtud de que establecen el significado de las constantes lógicas. Las reglas de eliminación son válidas en virtud de que puedan justificarse por las reglas de introducción por medio de procedimientos de reducción de las primeras a las últimas (una presentación más extensa puede verse en LEGRIS, 1999a).

2 RAZONAMIENTO ESTRUCTURAL

En sus investigaciones, Gentzen había desarrollado (a partir de ideas debidas a Paul Hertz; véase LEGRIS, 1998) otro tipo de sistematización de la inferencia deductiva conocida como los sistemas de secuentes. Este tipo de sistematización originó recientemente la perspectiva del *razonamiento estructural*. Dentro de esta perspectiva se puede sostener que las deducciones lógicas se reducen a *deducciones estructurales*, en las cuales todo es esquemático, y no aparecen siquiera símbolos lógicos.

Son deducciones en las que no aparece constante alguna del lenguaje. Piénsese en $A_1, .., A_m$, y B como enunciados de un lenguaje en consideración. Entonces,

$$A_1, .., A_m : B$$

es un secuente, y representa el hecho de que el enunciado B se sigue deductivamente de los enunciados $A_1, .., A_m$ (en ese orden). Los enunciados a la izquierda del doble punto están *ordenados* en una secuencia y reciben conjuntamente el nombre de "antecedente"; el de la derecha recibe el nombre de "sucedente". Debido a la existencia de un orden entre los enunciados que forman el antecedente, este puede considerarse una *estructura*. Asimismo, los dos puntos indican una relación entre el antecedente y el sucedente, de modo que un secuente puede considerarse una estructura más compleja.

El término "estructural" hace referencia al hecho de que en estas deducciones se aplican exclusivamente reglas estructurales en el sentido de los sistemas de secuentes de Gentzen. Las reglas estructurales concebidas por Gentzen no se refieren a la composición interna de las fórmulas, sino a la manera en que las fórmulas aparecen en los secuentes. Estas reglas son las siguientes:

Reflexividad

$$\frac{}{A : A}$$

Dilución

$$\frac{S : C}{A, S : C}$$

Corte

$$\frac{S : C \qquad C, T : A}{S, T : A}$$

Su justificación se encuentra en la misma idea de inferencia deductiva, en la que se *afirma* un enunciado sobre la base de afirmar otros. Obviamente, todo enunciado se infiere de sí mismo. Además, dada una inferencia deductiva, el agregado de nuevas afirmaciones no podría alterarla. Finalmente, las inferencias pueden encadenarse, de modo que son transitivas.

Además, deben considerarse las reglas que en otra parte he llamado "de manipulación" (véase LEGRIS, 1999b), pues se limitan a manipular la información expresada por los enunciados, y son las siguientes:

Contracción

$$\frac{A, A, S : C}{A, S : C};$$

Permutación

$$\frac{S, A, B, T : C}{S, B, A, T : C};$$

Finalmente, a estas reglas debe añadirse la siguiente:

Sustitución de variables de individuo

$$\frac{S : C}{S : C\ [x/y]}$$

S : C [*x*/*y*] indica el resultado de reemplazar todas las apariciones libres de la variables de individuo x por la variable y en los enunciados del secuente S : C.

3 ANÁLISIS DE LAS CONSTANTES LÓGICAS Y RAZONAMIENTO ESTRUCTURAL

Kosta Dosen propuso un análisis de las constantes lógicas sobre la base del razonamiento estructural. Dosen sostenía que toda constante lógica podía analizarse en términos de rasgos estructurales de las deducciones. Por ejemplo, los casos de la conjunción, el condicional y el cuantificador universal quedan expresados por medio de las siguientes *reglas de equivalencia*, donde S y T representan estructuras en el antecedente, en el sentido apuntado antes (DOSEN, 1994, pp. 278 y ss.):

S : A T: B
===========
S, T: A&B.

S, A:B
=======
S: A→B.

S: A[c]
=========
S: ∀xA[x]

La regla de la conjunción establece que en una deducción en la que aparezcan el enunciado A y el enunciado B (sin importar en qué orden) puede aparecer en un paso subsiguiente la conjunción A&B. Así, la aparición en una deducción de la conjunción A&B indica (*hace referencia a*) la aparición tanto de A como de B previamente en la deducción, sin importar el orden en que se dan ambos enunciados. El condicional A → B se introduce en una deducción para indicar que hay una deducción de B a partir de A. El caso del cuantificador universal es especialmente ilustrativo de esta concepción pues exige analizar nuevamente el problema de los dominios de cuantificación. Tal como se expresa en las reglas de Gentzen, la aparición de una cuantificación universal ∀xA[x] en una deducción querrá decir que en la deducción ha aparecido anteriormente A[c] (se ha deducido anteriormente), siendo c un parámetro que no aparece en las premisas de la deducción. Así es que c denota arbitrariamente a cualquier individuo del dominio, sin relativizar a un dominio determinado y A[c] ha sido inferido sin hacer referencia al dominio (vale para el universo entero, por así decirlo). Pero, una vez más cabe insistir, el cuantificador universal menciona el hecho de que anteriormente se ha deducido A[c].

En suma, las constantes lógicas parecen cumplir el papel de indicar ciertos rasgos de los enunciados que aparecen en deducciones. Por ello "no dicen nada acerca del mundo"; son formas de *resumir* o *reorganizar* lo que enunciados que son premisas o conclusiones de deducciones expresan.[1]

La tesis central de Dosen dice:

> Una constante de un lenguaje es lógica, si y sólo si, puede ser analizada de manera acabada en términos estructurales. (DOSEN, 1994, p. 281)

Dosen basa su tesis en varios supuestos. En primer lugar, considera que la lógica es la ciencia de las deducciones formales y que las deducciones formales básicas son deducciones estructurales. Pero el supuesto fundamental es que toda constante del lenguaje objeto de la que depende la descripción de una deducción formal no estructural puede ser analizada acabadamente en términos estructurales.

4 RAZONAMIENTO ESTRUCTURAL Y SEMÁNTICA DE DEMOSTRACIONES

Los secuentes pueden interpretarse como relaciones de deducción, y el análisis de las constantes lógicas puede traducirse a las reglas de introducción y eliminación del sistema de deducción natural de Gentzen. Se requiere únicamente especificar ciertos procedimientos de transformación, y – según el caso – cada miembro de la equivalencia se traduce a una regla de introducción o eliminación respectivamente. Esto lleva a la suposición de que el razonamiento estructural reconstruye las mismas ideas que subyacían en la dedución natural. Sin embargo, esto es así en la medida en que uno se limite a considerar secuentes singulares. Cuando se toman en consideración secuentes con múltiples sucedentes, la situación cambia drásticamente. Por de pronto, la transformación de las reglas de equivalencia de Dosen en las reglas de introducción y eliminación de Gentzen no es directa. Además, es importante destacar que en este análisis de las constantes lógicas no se recurre a los conceptos semánticos usuales como los de valuación, función de verdad, ni tampoco al concepto de construcción, característico del intuicionismo. Sin embargo, las reglas de equivalencia presentadas parecen tener un valor *semántico* en relación con las constantes lógicas (idea que, por lo demás, ha sido explorada anteriormente; véase por ejemplo KUTSCHERA, 1968).

El análisis podría sin duda ser rotulado como una *teoría general* acerca de cálculos lógicos, como una forma de "lógica abstracta". Es decir, el razonamiento estructural sirve para caracterizar los símbolos lógicos que aparecen no sólo en diferentes lógicas (clásica, intuicionista, lineal, etc.), sino también en diferentes sistemas para una lógica determinada (axiomáticos, de deducción natural, etc.). Así, señala las diferencias estructurales que poseen las derivaciones en diferentes sistemas.

Ahora bien, siguiendo esta perspectiva, se puede afirmar lo siguiente: Los aspectos puramente lógicos de las demostraciones se reducen a razonamientos estructurales. Esta tesis lleva a adoptar las deducciones estructurales como las unidades elementales de toda deducción lógica, con independencia de la naturaleza de los elementos que las integren. Sin embargo, en este punto aparecen algunos interrogantes. Por ejemplo, es natural pensar que las deducciones representadas por los secuentes más

[1] Una justificación de esta idea basada en el uso de las constantes lógicas en el lenguaje ordinario puede verse en LEGRIS, 2001.

básicos estén constituidas por enunciados atómicos, de modo que se debe tener previamente una concepción acerca del significado de enunciados de este tipo y, sobre todo, de la naturaleza de las deducciones más básicas. Por el contrario, la idea de analizar las constantes lógica en términos de deducciones estructurales parece ser *neutra* respecto de cómo se entienda el significado de enunciados. Más aún, da la impresión de que los símbolos que compongan las deducciones estructurales no tienen por qué entenderse como enunciados. De hecho, hay interpretaciones de los secuentes que asignan a sus elementos básicos no enunciados, sino acciones u otro tipo de entidades.[2]

Por lo demás, la función elucidatoria del razonamiento estructural es controversial, en la medida en que se trate de una teoría general acerca de cálculos lógicos. En este sentido, Dosen señala que su idea de deducción estructural "debe estar estrechamente ligado con el significado de las constantes lógicas, incluso si no suponemos que coincide exactamente con este significado" (DOSEN, 1994, p. 292).

En este punto los conceptos mismos de significado, definición y elucidación deben ser aclarados. La idea que subyace a la concepción de Dosen es que *analizar* una expresión de un lenguaje objeto L en un lenguaje M de nivel superior es establecer una equivalencia en M, en uno de cuyos lados aparece la expresión a analizar. Pero además de eso, de manera implícita, el análisis se lleva a cabo recurriendo a una teoría formal expresada en el lenguaje M. En este caso, Dosen hace uso de la teoría formal de deducciones estructurales. En líneas generales, Dosen parece proponer una elucidación del significado de las constantes lógicas en el sentido de Carnap, para quien:

> La tarea de la elucidación [*explication*] consiste en transformar un concepto dado más o menos inexacto en uno exacto o, más bien, en reemplazar el primero por el segundo. (CARNAP, 1950, p. 3)

En este caso el concepto inexacto de constante lógica es elucidado recurriendo a una teoría formal.

5 OBSERVACIONES FINALES: "LÓGICA COMO CÁLCULO"

En el marco de la teoría general de la demostración basada en la deducción natural se construye una semántica formal basada en la idea de demostración que da condiciones de significación para enunciados con constantes lógicas (compárese, una vez más, con la interpretación BHK de las constantes lógicas). Por el contrario, el razonamiento estructural da condiciones formales, independientemente de una concepción del significado de enunciados (o incluso independientemente de que se están tomando en consideración enunciados o expresiones de otro tipo). Es comparable al caso del álgebra de la lógica del siglo XIX de Boole, Peirce y Schröder, en la que sólo se postulaban propiedades formales de los operadores y reglas de manipulación para las constantes lógicas.

Las investigaciones algebraicas de Ernst Schröder, quien sistematizó las ideas de Boole, Peirce y otros algebristas de la lógica, son muy ilustrativas en este respecto. Schröder había comenzado desarrollando un "álgebra absoluta" que debía abarcar tanto álgebra como lógica, Sus leyes se refieren a entidades de cuya naturaleza no se hace supuesto alguno (a los que él llamaba "números generales puros"; véase SCHRÖDER 1873, p. 233) y por ello son leyes "puras" que rigen operaciones abstractas de suma, producto, etc. Años más tarde, el sistema que presentó en su obra *Lecciones sobre el álgebra de la lógica* se ocupó de las propiedades estructurales de la lógica y de las constantes lógicas por medio del uso de un álgebra abstracta. Por ejemplo, un mismo sistema algebraico puede aplicarse tanto a proposiciones como a términos y el álgebra de los relativos puede aplicarse tanto a razonamientos relacionales como a la formalización de la matemática, y lo que importa es determinar

[2] La posibilidad de diversas interpretaciones para los secuentes ya fue advertida por Paul Hertz (véase LEGRIS, 1998).

las propiedades formales del sistema abstracto, del cual los sistemas lógicos son casos de aplicación.[3]

Ciertamente, hay también importantes diferencias entre el razonamiento estructural y el álgebra de la lógica. En este último caso, no aparece explícitamente un equivalente de "inferencias estructurales" y no se trata tanto de definir operaciones como de establecer principios generales que caractericen estructuras abstractas pasibles de interpretación en diferentes dominios. Además, en el razonamiento estructural el concepto de inferencia o consecuencia es siempre constante, pese a que –como se mencionó anteriormente- todos los símbolos son esquemáticos.

Esta comparación evoca la distinción hecha por Jean van Heijenoort entre *lógica como cálculo* y *lógica como lenguaje*, (véase VAN HEIJENOORT 1967). La lógica entendida como cálculo se limita al estudio de relaciones formales, combinatorias, entre los símbolos – a la manera de un *calculus ratiocinator* – y no se analizan los contenidos de enunciados, ni se pretende que la estructura de estos reflejen categorías semánticas u ontológicas. Los cálculos obtenidos pueden recibir diferentes interpretaciones en diferentes dominios de objetos (y lo que uno entiende como lógica es una de esas interpretaciones). Esto es lo que sucedía en el álgebra de la lógica de Schröder. La idea de entender la lógica como un lenguaje, tal como se encontraba ejemplarmente en la notación conceptual (*Begriffsschrift*) de Frege, implica considerar un dominio universal al cual se aplica el lenguaje y la lógica, sin posibilidad de interpretaciones diferentes, hechas en diferentes dominios. El lenguaje resulta ser una notación universal que refleja categorías ontológicas básicas (como las de objeto y función en el caso de Frege).[4]

Esta distinción, que puede encontrarse en los orígenes de la lógica simbólica, se hace posteriormente mucho más difusa. Como señala van Heijenoort, después de 1920 ambas tradiciones tienen a entremezclarse y a fundirse, tal como ocurrió de hecho en la teoría de la demostración de Hilbert. Sin embargo, la metodología del razonamiento estructural está más próxima a la tradición de la lógica como cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOSEN, Kosta. Logical constants as punctuation marks. *In*: GABBAY, Dov M. (comp.). *What is a logical system?* Oxford: Oxford University Press, 1994. Pp. 273-296.

GENTZEN, Gerhard. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* **39**: 176-210, 405-431, 1935.

KUTSCHERA, Franz von. Die Vollsständigkeit des Operatorensystems {¬, ∧, ∨, ⊃} für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, **11**: 3-16, 1968.

LEGRIS, Javier. Paul Hertz y los orígenes de la teoría de la demostración. *Episteme*, **3** (7): 148-157, 1998.

———. Observaciones sobre el desarrollo de la teoría de la demostración y su relevancia para la filosofía de la lógica. *Revista Patagónica de Filosofía* **1**: 115-132, 1999 (a).

———. Reglas estructurales y análisis de la consecuencia lógica. En: SOTA, Eduardo & URTUBEY, Luis (comps.). *Epistemología e Historia de la Ciencia. Selección de trabajos de las IX Jornadas.* Córdoba (Argentina): Universidad Nacional de Córdoba, 1999 (b). Pp. 234-241.

[3] Cabe observar que las leyes algebraicas son demostradas recurriendo a definiciones que recuerdan al análisis de las constantes lógicas ofrecido antes. Por ejemplo, Schöder define el producto mediante la relación de menor o igual del siguiente modo: Si c <= a y c <= b, entonces c <= a.b (véase SCHRÖDER, 1890, p. 196).

[4] La diferencia queda más clara si se tienen presente los orígenes de la idea del cálculo en el desarrollo del álgebra, la cual era vista fundamentalmente como un método para resolver problemas, antes que como una forma de exposición sistemática.

———. Sobre la lógica como la teoría de las deducciones estructurales. En CARACCIOLO, Ricardo & LETZEN, Diego (comps.). *Epistemología e Historia de la Ciencia. Selección de trabajos de las XI Jornadas.* Vol. 7. Córdoba (Argentina): Universidad Nacional de Córdoba, 2001. Pp. 262-268.

PRAWITZ, Dag. Philosophical aspects of proof theory. *In*: FLOISTAD, G. (comp.). *Contemporary philosophy. A new survey*, Vol. I. La Haya / Boston / London: Martinus Nijhoof, 1981.

SCHRÖDER, Ernst. *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*. Lepizig: B. G. Teubner, 1873.

———. *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik)*, vol. I. Leipzig: Teubner, 1890.

SCHROEDER-HEISTER, Peter. Resolution and the origins of structural reasoning: Early proof-theoretic ideas of Hertz and Gentzen. *The Bulletin of Symbolic Logic*, **8**: 246-265, 2002.[5]

VAN HEIJENOORT, Jean. Logic as calculus and logic as language. *In*: COHEN, R. S.; WARTOFSKY, M. (comps.). *In memory of Norwood Russell Hanson.* Dordrecht: Reidel, 1967. (Boston Studies in the Philosophy of Science 3). Pp. 440-446.

[5] *Natural Deduction Colloquium*. Rio de Janeiro, julio 2001.