# O DESENVOLVIMENTO DO FORMALISMO DA MECÂNICA CLÁSSICA, DE CHRISTIAAN HUYGENS E ISAAC NEWTON ATÉ LEONHARD EULER

Roberto de Andrade Martins

**Resumo**: Durante a maior parte do século XVII, os pesquisadores que contribuíram para o desenvolvimento da mecânica – como Galileo, Huygens e Newton – não dispunham do formalismo algébrico com o qual representamos atualmente as leis da física. Utilizavam apenas razões e proporções e raciocínios empregando métodos geométricos. Mesmo Newton praticamente não utilizou o cálculo diferencial e integral na apresentação de seus resultados. Por outro lado, na segunda metade do século XVIII, a situação havia mudado completamente, atribuindo-se grande parte dessa mudança à influência de Euler. Este artigo expõe esse aspecto pouco conhecido da história da mecânica, sugerindo a relevância de introduzir o conhecimento dessa transformação dos métodos matemáticos da física, no nível universitário, para que os estudantes e professores possam ter um conhecimento mais adequado sobre a origem daquilo que ensinamos atualmente.

**Palavras-chave**: história da física; história da mecânica; formalismo matemático; Huygens, Christiaan; Newton, Isaac; Euler, Leonhard

MARTINS, Roberto de Andrade. *Ensaios sobre História e Filosofia das Ciências I*. Extrema: Quamcumque Editum, 2021.

## 1. INTRODUÇÃO

A dinâmica clássica que conhecemos hoje em dia foi criada, em grande parte, no século XVII, graças aos trabalhos de Galileo, Descartes, Huygens, Newton, Leibniz e outros pesquisadores. Antes dessa época, a estática já estava bastante desenvolvida; e uma parte da cinemática que atribuímos a Galileo já era conhecida na Idade Média, tendo sido também aperfeiçoada por Benedetti e outros pensadores do século anterior.

Porém, a mecânica clássica que estudamos atualmente tem uma aparência muito diferente da que era utilizada no século XVII. Um estudante de física de hoje tem uma imensa dificuldade em compreender uma obra como os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de Newton; e se Newton pudesse ler os nossos livros didáticos de mecânica, teria também grande dificuldade para entendê-los. Em grande parte, essa diferença se refere aos *formalismos matemáticos* empregados naquela época e hoje em dia.

Nossos livros didáticos sobre Mecânica utilizam constantemente equações escalares e vetoriais para representar as relações entre as grandezas físicas. Além disso, no nível universitário, mostram como manipular essas grandezas utilizando as técnicas do cálculo diferencial e integral. Isso é tão familiar atualmente que pode parecer que sempre foi assim e que o próprio Isaac Newton já devia utilizar esse tipo de formalismo e essas técnicas. Afinal de contas, não foi ele um dos descobridores do cálculo diferencial e integral?

No entanto, em *nenhum ponto* de suas obras Newton apresentou equações mecânicas como as que utilizamos (nem escalares, nem vetoriais). Ele jamais escreveu, por exemplo, $F = ma$ nem $\vec{F} = m\vec{a}$. Na mecânica, ele trabalhava constantemente com as *ideias* de limite, derivada e integral, mas não utilizava símbolos para representar esses conceitos, nem empregava os métodos matemáticos para determinar seus valores. Seu método era, essencialmente, *geométrico* – em um sentido que será mostrado mais adiante.

O formalismo vetorial que utilizamos hoje em dia apenas surgiu graças aos trabalhos de Willard Gibbs e Oliver Heaviside, na década de 1880, ou seja, dois séculos após a publicação da obra fundamental de Newton; mas não vamos abordar aqui essa história (ver Stephenson, 1966; Silva, 2004; Crowe, 1967). O formalismo algébrico escalar e o uso dos símbolos e técnicas do cálculo diferencial e integral na mecânica começaram a se desenvolver antes da morte de Newton, mas foram apresentados de forma sistemática em um livro didático, pela primeira vez, por Leonhard Euler em 1736 e se tornaram usuais a partir de meados do século XVIII.

Este artigo apresentará, em primeiro lugar, as dificuldades encontradas até a época de Newton para escrever equações envolvendo grandezas físicas (como velocidade, tempo, força etc.). Tanto Galileo quanto os outros antecessores de Newton utilizavam a técnica matemática de razões e proporções, que apresentava várias dificuldades.[1] Depois, através de exemplos simples, este artigo explicará o método geométrico que Huygens e Newton utilizavam em suas deduções. Em seguida, será exposta a contribuição de Euler e, por fim, uma descrição de alguns dos autores que contribuíram para o desenvolvimento do formalismo matemático da mecânica, entre Newton e Euler.

## 2. AS EQUAÇÕES DA MECÂNICA

Atualmente, atribuímos a Newton a equação da força gravitacional que, em sua forma escalar, pode ser escrita:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

onde $F$ é o valor da força gravitacional entre duas partículas de massas $M$ e $m$, sendo $r$ a distância entre elas e $G$ uma constante.

[1] Ver o artigo anterior deste volume: MARTINS, Roberto de Andrade. O formalismo da mecânica clássica, de Aristóteles a Galileo

Mas o que significa, nessa equação, multiplicar uma massa por outra? E o que significa dividir esse produto de duas massas por uma distância ao quadrado? Geralmente não pensamos a respeito disso; mas qualquer contemporâneo de Newton colocaria imediatamente objeções a uma fórmula como essa, pois ela envolve multiplicação de grandezas concretas, bem como divisão de grandezas concretas. Na matemática antiga, essas operações eram proibidas. Não se podia nem mesmo escrever uma equação tão simples quanto a da velocidade no movimento uniforme,

$$v = \frac{s}{t}$$

Não se cogitava dividir uma distância por um tempo para obter uma velocidade, pois o conceito de divisão não poderia ser aplicado nesse caso de duas grandezas concretas. Havia sentido em se falar em uma velocidade que fazia um objeto percorrer vinte milhas em cinco horas, ou quatro milhas em uma hora, mas não se dizia que a velocidade desse objeto seria (20 milhas)/(5 horas) = 4 milhas/hora, porque dividir um comprimento (milhas) por um tempo (horas) não tem nenhum sentido[2]. Assim, embora o conceito de velocidade existisse, ele não era calculado através de operações de divisão, nem entrava em equações.

Como, então, era possível fazer cálculos e deduções envolvendo grandezas físicas? Utilizando a ideia de razões ou proporções, que fazia parte da matemática tradicional desde os *Elementos* de Euclides. Essa teoria permitia *comparar* grandezas concretas, de qualquer tipo (pesos, tempos, distâncias), desde que fossem do mesmo tipo (homogêneas), através de *razões*; e estabelecer comparações entre razões, através de *proporções*. No caso de duas figuras geométricas semelhantes, por exemplo (Fig. 1), podemos estabelecer uma

---

[2] Usei como exemplo uma distância em milhas, não em quilômetros, apenas porque a milha é uma unidade de distância que já existia desde o período dos antigos romanos.

proporção entre seus lados correspondentes, que pode ser escrita da seguinte forma, com uma notação que foi criada no século XVII:

$$\overline{AB} : \overline{AC} :: \overline{MN} : \overline{MP}$$

Essa relação simbólica pode ser transformada na seguinte frase: a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é proporcional à razão entre $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$; ou $\overline{AB}$ está para $\overline{AC}$ como $\overline{MN}$ está para $\overline{MP}$. Atualmente, como não estamos mais acostumados à teoria de razões e proporções, seríamos tentados a interpretar essa relação como uma igualdade entre duas divisões: $\overline{AB}$ dividido por $\overline{AC}$ é igual a $\overline{MN}$ dividido por $\overline{MP}$. Porém, essas duas formas de compreender a relação acima não são equivalentes. A razão entre duas grandezas *não é* uma divisão.

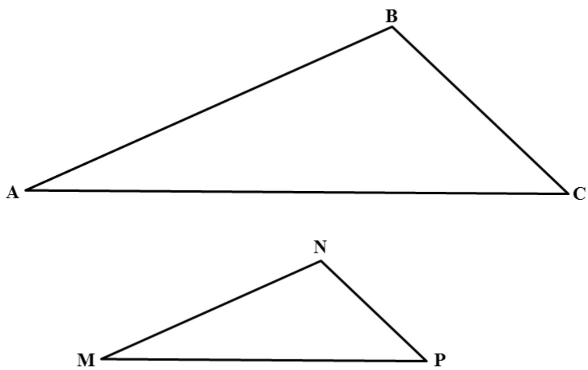



**Figura 1.** As propriedades de triângulos semelhantes podem ser estabelecidas pela antiga teoria de razões e proporções.

Utilizando razões e proporções, podemos escrever uma relação que descreve o mesmo conteúdo conceitual da equação $v = s/t$:

$$v : V :: (s : S)(T : t)$$

Podemos ler essa relação da seguinte forma: a razão entre duas velocidades $v : V$ é proporcional à composição da razão entre os espaços percorridos $s : S$ e o inverso da razão entre os tempos $T : t$ gastos nesses dois percursos. Novamente, como não estamos acostumados a essa linguagem, podemos imaginar que a relação acima é idêntica a esta equação:

$$\frac{v}{V} = \frac{s}{S} \times \frac{T}{t}$$

No entanto, a razão entre duas grandezas não é uma divisão; a proporcionalidade não é uma igualdade; e a composição de duas razões não é uma multiplicação.

Vejamos um exemplo específico. Atualmente, escrevemos que a aceleração centrípeta $a$ de um corpo que se move com velocidade $v$ em um círculo de raio $R$ é dada por:

$$a = \frac{v^2}{R}$$

A quarta proposição dos *Princípios Matemáticos* de Newton, por exemplo, afirma: "As forças centrípetas dos corpos que descrevem diferentes círculos com movimentos uniformes tendem para os centros desses círculos e estão uma para a outra como os quadrados dos arcos descritos em tempos iguais, aplicados aos inversos dos raios dos círculos", ou seja:

$$f : F :: (s : S)^2 (R : r)$$

No Corolário 1 da mesma proposição, Newton afirma: "Cor. 1. Portanto, como esses arcos são proporcionais às velocidades dos corpos, as forças centrípetas possuem uma razão composta da razão dupla das velocidades diretamente, e da razão simples dos raios inversamente".

$$f : F :: (v : V)^2 (R : r)$$

Utilizando-se esse tipo de estratégia é possível representar as relações da mecânica sem que apareçam divisões ou multiplicações por números concretos.

O simbolismo com o qual representamos aqui as razões e proporções não era utilizado por Newton e outros pesquisadores da época; eles geralmente exprimiam essas relações com palavras, como os dois exemplos mostrados acima. Além disso, costumavam associar as grandezas a linhas em diagramas esquemáticos, para estabelecer relações físicas a partir da Geometria.

> No século dezessete, a ideia de que a linguagem da filosofia natural tinha que ser geométrica estava profundamente enraizada. Desde os tempos de Galileo, pensava-se que o "Livro da Natureza" estava escrito em "círculos e triângulos, e outras figuras geométricas": ele não estava escrito com símbolos algébricos. (Guicciardini, 1999, p. 104)

## 3. A CONTRIBUIÇÃO DE CHRISTIAAN HUYGENS

Os estudantes e professores de Física associam o nome de Huygens[3] quase exclusivamente à óptica ondulatória. Pessoas que conhecem a história da astronomia sabem que ele também deu importantes contribuições a essa área, aperfeiçoando telescópios, descobrindo os anéis de Saturno, que tinham sido interpretados erroneamente por Galileo como indicando que o planeta era triplo e detectando o maior satélite de Saturno (Titan). Não costumam ser conhecidas, no entanto, suas imensas contribuições à mecânica (Bos, 1972), que incluem:

(a) a dedução, independentemente de Galileo, da lei da queda dos corpos (altura de queda proporcional ao quadrado da velocidade) e a prova da forma parabólica do movimento de projéteis sem resistência do ar – resultados que obteve aos 16 anos de idade (Beaulieu, 1981; Vilain, 2004);

(b) o estudo da *catenária*, que é a curva formada por uma corrente pendurada em suas extremidades, sob a ação da

[3] O nome deste pesquisador não deve ser pronunciado *Hóigens*, como quase todos dizem no Brasil, e sim como *Hahenx* Há um arquivo sonoro com a pronúncia desse nome no verbete Huygens da *Wikipedia* em inglês: <https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens>. Os holandeses geralmente pronunciam o "s" final de todas as palavras como os cariocas e portugueses, com um som parecido com o do "x".

gravidade – e que Simon Stevin e Galileo haviam afirmado, erroneamente, ser uma parábola (Bukowski, 2008);

(c) a análise considerada correta do estudo de colisões de "corpos duros" ou elásticos (que havia sido feita de modo errôneo por Descartes), na qual introduziu considerações de relatividade dos movimentos e a constância de uma grandeza proporcional ao quadrado da velocidade e à massa (semelhante à energia cinética) (Blackwell, 1977; Elichson, 1997);

(d) o estudo que consideramos correto da força em um movimento circular uniforme (Ehrlichson, 1994) – que havia sido avaliada de um modo totalmente errôneo por Galileo (Martins, 1994);

(e) o cálculo do período de um pêndulo simples, a invenção e análise mecânica correta do pêndulo cônico, bem como de pêndulos compostos (oscilação de corpos rígidos), introduzindo de forma correta o cálculo do centro de oscilação desses corpos (Ehrlichson, 1996);

(f) a prova de que um pêndulo cicloidal tem período que é independente de sua amplitude, ao contrário do pêndulo simples – corrigindo, assim, um equívoco de Galileo (Costabel, 1978; Ariotti, 1972).

Exatamente por causa desse desconhecimento dos resultados obtidos por Huygens para a mecânica, nossos livros textos de Física apresentam vários aspectos da mecânica clássica sem identificar o seu criador (teoria de colisões, força no movimento circular, período de um pêndulo etc.). Trata-se de uma grande injustiça.

A obra mecânica de Huygens se situa entre as contribuições de Galileo e Descartes e as de Newton. Sob muitos aspectos, pode-se dizer que seus trabalhos prepararam o terreno para o desenvolvimento dos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*. Newton citou com grande frequência a obra de Huygens e não há dúvidas de que esta influenciou o desenvolvimento dos *Principia* (Speiser, 1988, p. 486).

Vamos exemplificar a metodologia de Huygens, com o uso de proporções e análise geométrica, através de suas demonstrações a respeito do movimento circular, desenvolvidas em 1659 porém publicadas apenas muitos anos depois. Apresentaremos uma reconstrução dos argumentos de Huygens a partir do excelente estudo de Joella Yoder (2004), que se baseou nos manuscritos originais, em vez de utilizar a versão publicada – como quase todos os historiadores da física fazem.

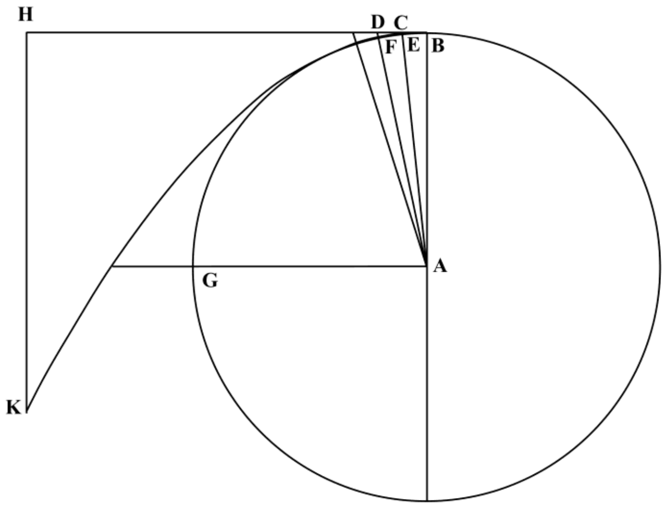



**Figura 2.** Diagrama baseado em um manuscrito de Huygens, de 1659, para analisar a força em um movimento circular (Yoder, 2004, p. 20).

Huygens já havia estudado a trajetória parabólica de um corpo submetido a uma força constante, como a gravidade; para estudar a "força centrífuga" de um corpo em movimento circular[4], ele utilizou seu conhecimento sobre o movimento parabólico (Fig. 2) e a relação matemática entre a parábola e o círculo osculador, que havia estudado cinco anos antes

[4] Huygens deu o nome de "força centrífuga" à força com que um corpo em movimento circular tende a se afastar do seu centro. Se esse corpo estiver preso a um fio, por exemplo, essa será a força que com que o corpo puxará o fio. Assim, não é a força que age sobre o corpo e sim a força que é produzida pelo corpo.

(YODER, 2004, p. 19). Um aspecto extremamente importante da dedução que Huygens apresentou é que ele utiliza a ideia de limite aplicada às figuras empregadas em sua análise. Se tomarmos pontos da parábola cada vez mais próximos ao ponto $B$ em que ela é tangenciada pelo círculo, então esses pontos da parábola estarão "praticamente" sobre o círculo, ou seja, sua distância ao círculo tende a zero. Assim, conhecendo-se as propriedades da parábola, elas poderão ser aplicadas ao círculo, nesse caso limite.

O diâmetro do círculo osculador é igual ao *latus rectum* da parábola, ou seja, é quatro vezes maior do que a distância do foco da parábola até seu vértice. A equação da parábola é dada por $x^2 = ky$, onde $k$ é o *latus rectum*. No diagrama aqui mostrado (Fig. 3), a linha $\overline{BC}$ representa a coordenada $x$ e a linha $\overline{CE}$ representa a coordenada $y$. Portanto, $BC^2 = K \cdot CE$. Como a constante $k$ é igual ao diâmetro do círculo osculador, que é $\overline{BM}$, temos: $BC^2 = BM \cdot CE$. Esta é uma relação geométrica importante, utilizada na dedução.

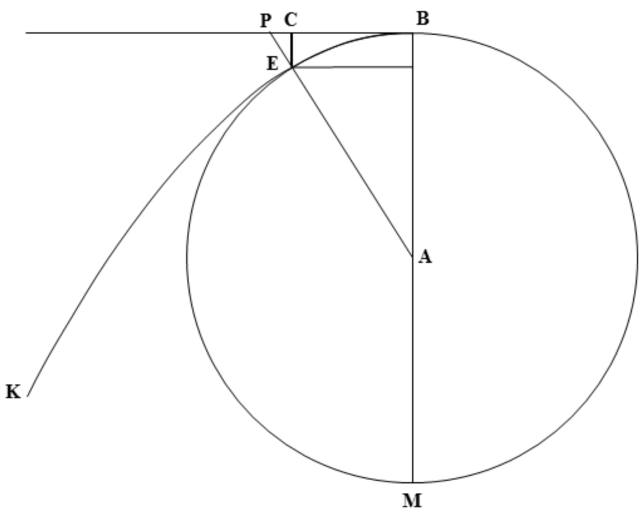



**Figura 3.** Relação entre uma parábola e o círculo osculador, utilizada por Huygens para comparar as forças nos dois tipos de movimento (Yoder, 2004, p. 21, com algumas alterações).

Suponhamos que a circunferência do diagrama aqui mostrado (Fig. 3) é a trajetória de uma partícula que se desloca nela no sentido anti-horário. Queremos encontrar a força centrífuga dessa partícula. Suponhamos que no ponto $B$ do círculo a partícula se desprendesse dele e pudesse se mover livremente. Se não houver qualquer força agindo sobre ela, a partícula se deslocará em linha reta, com velocidade constante, como já se sabia desde Descartes (Martins, 2012). Depois de certo intervalo de tempo ela chegaria ao ponto $P$, sobre a tangente ao círculo (ou seja, seu deslocamento nesse tempo seria $BP$, proporcional à sua velocidade). Porém, se a partícula está presa ao círculo, nesse mesmo tempo ela percorre um arco com o mesmo comprimento. Esse arco é aproximadamente igual a $BE$, considerando-se $AEP$ como uma reta – e quanto menor o intervalo de tempo, melhor será essa aproximação.

Então, se não houvesse nenhuma força prendendo a partícula ao círculo, ela chegaria ao ponto $P$; porém, como está presa ao círculo, ela chega ao ponto $E$. O segmento de reta $PE$ representa quanto a partícula foi desviada da trajetória retilínea, para ser mantida no movimento circular; e representa também quanto a partícula tende a se afastar do círculo, procurando se deslocar em linha reta. É, portanto, uma medida da força centrífuga da partícula.

Quando o intervalo de tempo é muito pequeno e os pontos $P$ e $E$ vão se aproximando de $B$, o ângulo entre os segmentos de reta $CE$ e $PE$ vai tendendo a zero e esses dois segmentos tendem a se tornar iguais. Além disso, a parábola e a circunferência osculadora se tornam indistinguíveis. Então, considerando esse caso limite, podemos transformar a relação $BC^2 = BM \cdot CE$ (válida para a parábola) na relação $BC^2 = BM \cdot PE$, que permite avaliar $PE$, que é a tendência da partícula a se afastar da circunferência. Como $BC$ é proporcional à velocidade da partícula, é fácil ver que a tendência da partícula de se afastar da circunferência é proporcional ao quadrado da sua velocidade e inversamente proporcional ao diâmetro do círculo ($BM$) ou ao seu raio. Esse resultado corresponde à nossa lei da força (ou aceleração) no movimento circular, que representamos como $F \propto v^2/r$.

Este é um exemplo simples da técnica geométrica utilizada por Huygens em suas deduções. Como veremos a seguir, o método utilizado por Newton é muito semelhante e provavelmente se inspirou no de seu antecessor (Guicciardini, 1999, p. 118).

## 4. O MÉTODO GEOMÉTRICO DE NEWTON

Para exemplificar o método geométrico de Newton, vamos considerar a sua primeira demonstração, nos *Princípios Naturais da Filosofia Natural* (Livro I, Seção II, Proposição 1, teorema 1). O seu enunciado é este: “As áreas descritas pelos raios traçados de um centro de forças imóvel até corpos em rotação [em torno deles] permanecem nos mesmos planos imóveis e são proporcionais aos tempos em que são descritos” (Newton, 1687, p. 37).

Esta proposição demonstrada por Newton corresponde àquilo que chamamos de “segunda lei de Kepler” no caso dos movimentos dos planetas: as áreas descritas pelas linhas que unem o Sol até um planeta são proporcionais ao tempo. No entanto, na sua Proposição 1, Newton generaliza essa propriedade para abranger corpos que se movem em torno de qualquer centro de forças – ou seja, é um caso muito mais geral do que o de Kepler. Pode ser qualquer tipo de força, com qualquer variação em relação à distância (por exemplo, diretamente proporcional à distância, ou inversamente proporcional ao cubo da distância). Atualmente, nós nos referimos a essa propriedade como a lei da conservação do momento angular; ela não tinha nem esse nome, nem qualquer outro, na época em que Newton a demonstrou.

Assim como na obra de Huygens, a prova apresentada por Newton é totalmente geométrica, ou seja, não utiliza equações como as que empregamos atualmente em Mecânica. Para desenvolver sua demonstração, Newton utilizou o diagrama aqui apresentado (Fig. 4), que vamos explicar e decompor em outros mais simples.

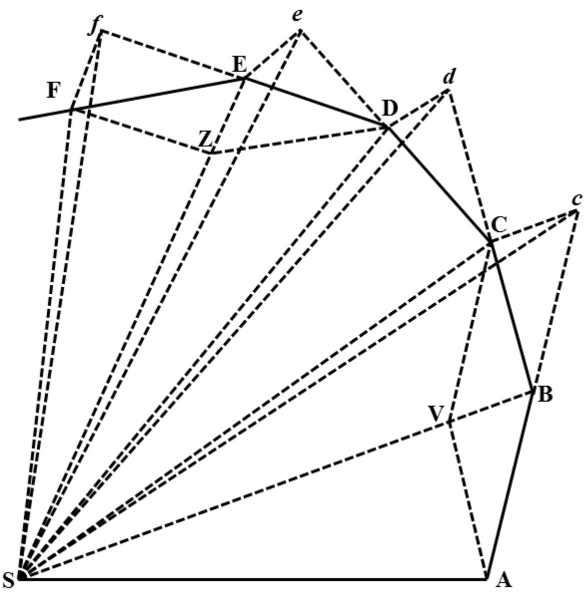



**Figura 4.** Diagrama utilizado por Newton para demonstração da lei das áreas (Newton, 1687, p. 37).

Primeiramente, Newton demonstrou que essa propriedade seria válida *se a partícula que se move não sofresse nenhuma força*. Ou seja: se uma partícula se move inercialmente, em linha reta e com velocidade constante, seu movimento obedece à lei das áreas. Este era um caso curioso e inesperado, pois antes de Newton se acreditava que as leis de Kepler estavam associadas apenas ao movimento dos planetas.

Para entendermos a argumentação geométrica de Newton, vamos considerar um diagrama mais simples do que o dele (Fig. 5). Consideremos que a reta $\overline{ABCD}$ representa a trajetória de uma partícula que se move inercialmente. Em certo intervalo de tempo $\Delta t$, a partícula se move de A até B; depois, em outro tempo igual, de B para C; depois, de C para D; e assim por diante, sempre com em linha reta e com velocidade constante.

Assim, as distâncias $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são iguais entre si. Agora, vamos mostrar que as áreas dos triângulos *SAB* e *SBC* são iguais entre si.

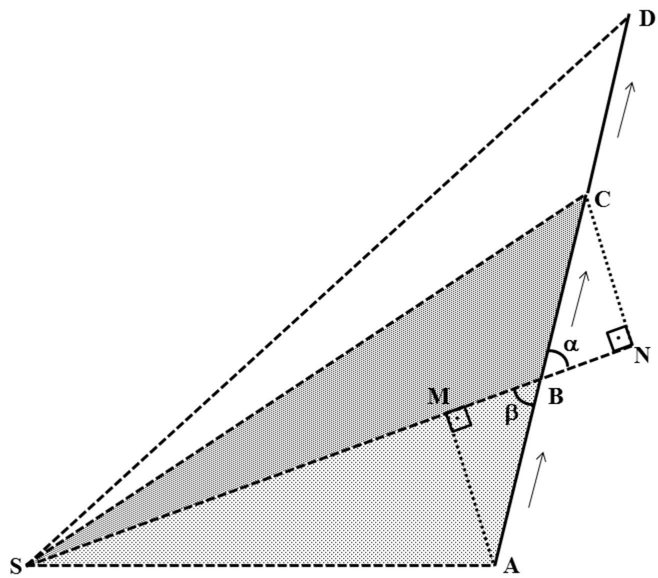



**Figura 5.** Demonstração de que a lei das áreas vale para o movimento retilíneo uniforme.

Prolonguemos a reta $\overline{SB}$ até *N*, traçando os segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{NC}$, ambos perpendiculares à reta $\overline{SB}$. Vamos considerar que $\overline{SB}$ é a base tanto do triângulo *SAB* quanto do triângulo *SBC*, pois a escolha do lado do triângulo que chamamos de "base" é arbitrária. Para provar que esses dois triângulos têm a mesma área, basta agora provar que eles têm alturas iguais, ou seja, que $\overline{AM}$ e $\overline{NC}$ são iguais entre si. Isso é fácil de ver, analisando os triângulos *ABM* e *BCN*; neles, todos os ângulos são iguais, pois ambos possuem ângulos retos e, além disso, os ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são iguais porque são opostos pelo vértice; portanto, os dois triângulos são semelhantes. Além disso, como os seus lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são iguais, então os dois triângulos são idênticos e todos os seus lados correspondentes são iguais; portanto, as suas alturas $\overline{AM}$ e $\overline{NC}$ são iguais entre si. Logo, as áreas dos triângulos $SAB$ e $SBC$ são iguais entre si. Pode-se fazer uma demonstração equivalente para o triângulo $SCD$ e todos os outros seguintes; portanto, todos os triângulos varridos em tempos iguais pelo raio que liga a partícula ao ponto $S$ possuem áreas iguais. Triângulos varridos em tempos diferentes terão áreas proporcionais a esses intervalos de tempo.

Há outro modo de fazer a demonstração da igualdade das áreas dos triângulos $SAB$ e $SBC$. Tomemos $\overline{AB}$ como base do primeiro triângulo e $\overline{BC}$ como a base de segundo. Essas duas bases são iguais, pois são os espaços percorridos em tempos iguais, em um movimento retilíneo uniforme. Agora, basta mostrar que os dois triângulos possuem a mesma altura. O vértice oposto à base dos dois triângulos é o ponto $S$. A altura dos dois triângulos é a distância entre esse ponto e a reta que contém as suas bases. Como as duas bases são colineares, a altura dos dois triângulos é a mesma. Portanto, suas áreas são iguais. Esta segunda demonstração é mais simples, porém a análise mostrada anteriormente facilita a compreensão de outros passos do restante da dedução de Newton.

Notemos que o ponto $S$ pode estar em qualquer posição. Seja onde for colocado o ponto $S$, as áreas dos triângulos sucessivos serão iguais. Ou seja: a lei das áreas vale para qualquer partícula que se mova inercialmente, em relação a qualquer ponto $S$ tomado como centro.

Nessa demonstração, a única hipótese física utilizada foi a lei da inércia; a partir dela, segue-se que os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são colineares e iguais entre si. Todo o resto da prova utiliza apenas geometria.

Passemos, agora, ao caso em que a partícula está submetida a forças. Embora Newton tenha utilizado uma única figura, vamos utilizar várias, para que o argumento fique mais fácil de entender. Em uma aula, utilizando projeção ou mesmo um quadro negro / verde / branco, é mais fácil de ir mostrando as relações geométricas do que em um texto como este. Além disso, na explicação abaixo, vamos utilizar algumas notações que Newton não usava, como $\Delta t$ e $\overrightarrow{v_1}$, para facilitar a compreensão de um leitor atual.

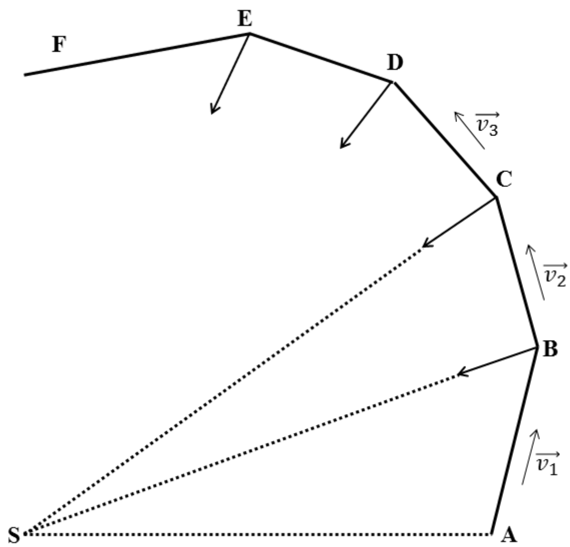



**Figura 6.** Trajetória poligonal, supondo-se que a partícula em movimento sofre impulsos instantâneos, na direção do ponto *S*, quando passa pelos vértices da linha poligonal.

Suponhamos que uma partícula descreve a trajetória poligonal *ABCDEF* (Fig. 6) da seguinte forma: de *A* até *B*, ela se move sem sofrer nenhuma força – e, portanto, em linha reta e com velocidade uniforme $\overrightarrow{v_1}$. Depois de um intervalo de tempo $\Delta t$, a partícula chega ao ponto *B*, onde ela sofre um impulso ou puxão instantâneo na direção do ponto *S*, que agora consideraremos como sendo um centro de atração. Por causa disso, sua velocidade se altera em direção e módulo, instantaneamente, no ponto *B*. Então, a partícula se move com essa nova velocidade $\overrightarrow{v_2}$, durante um novo intervalo de tempo igual $\Delta t$, sem sofrer nenhuma força – e, portanto, novamente em linha reta e com velocidade uniforme. Depois de um tempo $\Delta t$, a partícula chega ao ponto *C*, onde ela sofre um novo impulso ou puxão instantâneo na direção do ponto *S*, alterando novamente sua velocidade para $\overrightarrow{v_3}$; e assim por diante. Todos os puxões são na direção de *S*, mas não precisam ter o mesmo valor: alguns podem ser mais fracos, outros mais fortes.

Se os intervalos de tempo $\Delta t$ forem considerados cada vez menores, o polígono terá um número cada vez maior de lados; quando $\Delta t$ tende a zero, o polígono tende a se tornar uma curva suave e a situação corresponderá a uma partícula que está se movendo em uma trajetória curva, sofrendo forças que agem durante todo o tempo. Ou seja: um movimento suave como o dos planetas pode ser considerado como um caso limite do movimento poligonal com sucessivos puxões instantâneos.

O que se quer provar é que cada um dos triângulos formados pelos lados do polígono, unidos ao centro de força *S*, tem a mesma área; ou seja, o triângulo *SAB* e o triângulo *SBC* possuem a mesma área, e assim por diante. Analisemos, agora, cada etapa do movimento poligonal, de um modo semelhante ao seguido por Newton.

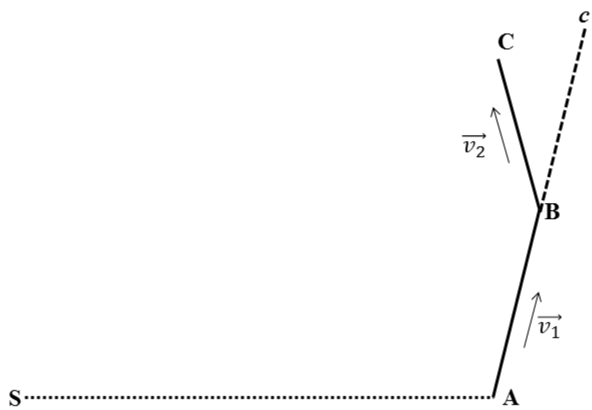



**Figura 7.** Inicialmente a partícula se move com velocidade constante no trecho *AB*, depois sofre um impulso instantâneo que altera sua velocidade e sua direção, percorrendo então o trecho *BC*.

Como já foi explicado, a partícula se move inicialmente no tempo $\Delta t$ de $A$ até $B$ com movimento retilíneo uniforme, com velocidade $\overrightarrow{v_1}$. Se não sofresse nenhum puxão para *S*, ela continuaria a se mover na mesma direção, com a mesma velocidade, de acordo com a lei da inércia, chegando depois de outro tempo $\Delta t$ ao ponto *c* (Fig. 7) e, como já foi provado antes, as áreas dos triângulos *SAB* e *SBc* são iguais entre si. No entanto, como a partícula sofreu um impulso instantâneo para *S* no ponto $B$, sua velocidade se alterou para $\overrightarrow{v_2}$ e, por isso, depois de um tempo $\Delta t$ ela chega ao ponto *C*. Os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, proporcionais às velocidades $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, pois consideramos sempre o mesmo intervalo de tempo $\Delta t$. Obviamente, as direções desses segmentos de retas são iguais às das velocidades respectivas. Assim, esses segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ podem ser considerados como representações geométricas das duas velocidades $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

Agora, se unirmos os pontos *c* e *C*, teremos um novo segmento de reta $\overline{cC}$ cuja interpretação devemos explicar (Fig. 8). As velocidades (e também os outros vetores) obedecem à lei de adição vetorial, que é representada geometricamente pela lei do paralelogramo. Vemos, pelo diagrama (Fig. 8), que $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}$. Portanto, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$. Ou seja, a velocidade $\overrightarrow{v_3}$, que é representada pelo segmento de reta $\overline{cC}$, é a variação de velocidade (velocidade final $\overrightarrow{v_2}$ menos velocidade inicial $\overrightarrow{v_1}$).

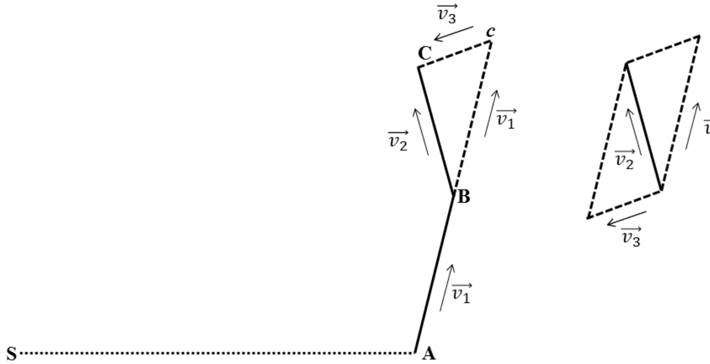



**Figura 8.** Análise vetorial da variação de velocidade sofrida pela partícula no ponto *B*.

Essa variação de velocidade $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ foi produzida pelo impulso instantâneo que a partícula sofreu quando passou pelo ponto $B$. Como o ponto $S$ representa o centro de forças, então esse impulso deve ter a direção da reta $\overline{BS}$ (Fig. 9). Portanto, o segmento de reta $\overline{cC}$, que representa a variação de velocidade $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ ocorrida no ponto $B$, deve ter a direção do segmento de reta $\overline{BS}$. Neste diagrama, os segmentos de reta $\overline{cC}$ e $\overline{BV}$ possuem tamanhos iguais e mesma direção. Por outro lado, os três segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{Bc}$ e $\overline{VC}$ também possuem tamanhos iguais e mesma direção.

O ponto $S$ e a reta $\overline{AB}$ definem um plano, ao qual pertence também $\overline{BS}$. Como o impulso se dá nessa direção, a variação de velocidade, representada por $\overline{cC}$, também está no mesmo plano. Toda a figura permanece no mesmo plano inicial e, portanto, o movimento não pode se desviar dele.

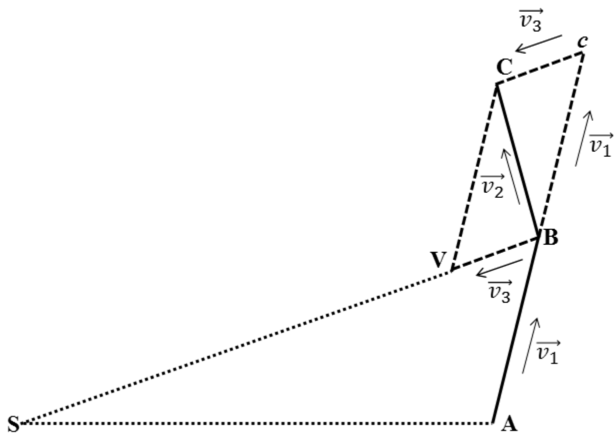



**Figura 9.** A variação de velocidade sofrida no ponto *B* deve ter a direção da reta *BS*, já que *S* é o centro de forças.

O passo seguinte é perceber que as áreas dos dois triângulos *SBC* e *SBc* são iguais entre si (Figura 10). De fato, os dois triângulos possuem a mesma base $\overline{SB}$; além disso, como o segmento de reta $\overline{Cc}$ é paralelo à base $\overline{SB}$, os dois pontos $C$ e $c$

estão à mesma distância (altura) da base. Portanto, as áreas dos dois triângulos *SBC* e *SBc* são iguais entre si. Porém, já havia sido provado antes (ao analisar o movimento inercial da partícula) que as áreas dos triângulos *SAB* e *SBc* também são iguais entre si.

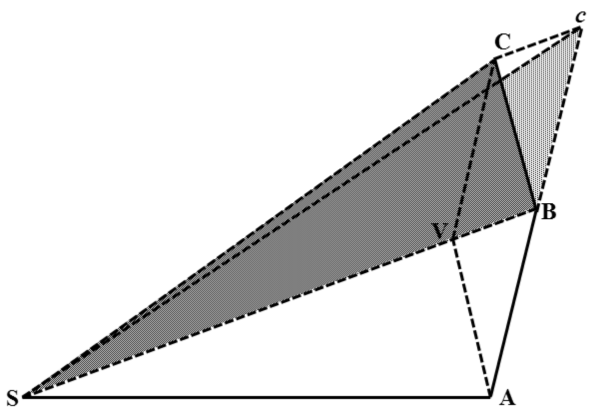



**Figura 10.** As áreas dos triângulos *SBC* e *SBc* são iguais, pois possuem a mesma base *SB* e a mesma altura, já que *Cc* é parelela a *SB*.

Assim, a área do primeiro triângulo *SAB* varrido no tempo $\Delta t$ pelo raio vetor que liga a partícula ao centro de forças *S* é igual à área do segundo triângulo *SBC* varrido também em um intervalo de tempo $\Delta t$ (Fig. 11). Utilizando-se o mesmo raciocínio, pode-se provar que a área do triângulo seguinte, *SCD*, também é igual às áreas de *SAB* e de *SBC*, e assim por diante. Assim, todos os triângulos varridos pelo raio vetor em tempos iguais são iguais; e as áreas varridas em intervalos de tempos diferentes serão proporcionais aos respectivos tempos.

Notemos que as únicas hipóteses físicas que foram utilizadas são (1) a lei da inércia, (2) a lei de composição das velocidades e (3) a ideia de que a variação da velocidade tem a mesma direção da reta que une a partícula ao centro de forças. Não existe nenhuma suposição sobre qual é o tipo de força, nem sobre como ela depende da distância. Além disso, se a força fosse repulsiva (em vez de atrativa) todo o raciocínio ainda seria válido.

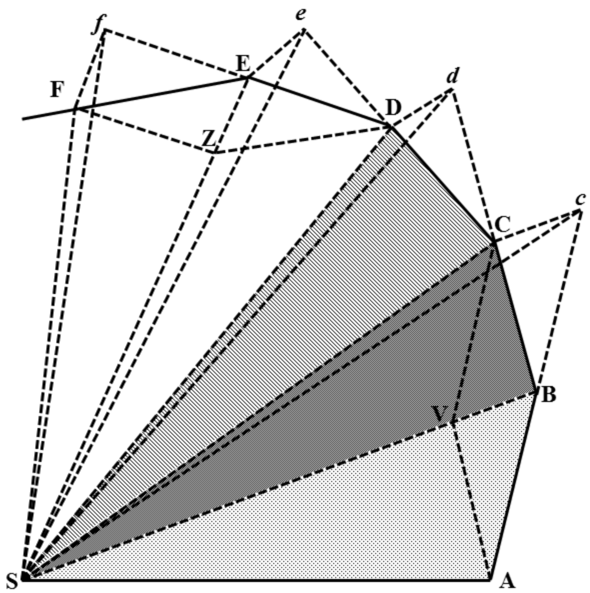



**Figura 11.** As áreas de todos os triângulos correspondentes a intervalos de tempo iguais, são iguais entre si.

A argumentação apresentada pelo próprio Newton em sua obra é bastante curta e poderá agora ser compreendida mais facilmente. Ela se refere apenas ao diagrama apresentado inicialmente (Fig. 4). A primeira parte do argumento, que se refere ao movimento inercial (primeira lei do movimento), é esta:

> Suponhamos que o tempo seja dividido em partes iguais; e que no primeiro intervalo desse tempo o corpo descreva a linha reta *AB* pela sua força inata. No segundo intervalo de tempo (pela Lei 1), se ele não for impedido, continuará diretamente até *c*, pela linha *Bc* igual a *AB*; e assim, pelos raios *AS*, *BS* e *cS* traçados até o centro, serão descritas as áreas iguais, *ASB*, *BSc*. (Newton, 1687, p. 37)

Notemos que Newton considera óbvio que os triângulos são iguais e não se dá ao trabalho de explicar o argumento geométrico.

Em seguida, Newton passa à situação em que existe uma força e utiliza (como foi feito acima) a regra do paralelogramo (Corolário 1 das leis do movimento):

> Porém, suponha que uma força centrípeta atua instantaneamente, com um grande impulso, quando o corpo chega a *B*; e que, desviando o corpo da linha reta *BC*, ela o obriga a continuar seu movimento na linha reta *BC*. Trace *cC* paralelo a *BS*, encontrando *BC* em *C*; e então, no fim do segundo intervalo de tempo (pelo Corolário 1 das Leis), ele será encontrado em *C*, no mesmo plano do triângulo *ASB*. Ligue *SC* e, já que *SB* e *Cc* são paralelos, o triângulo *SBC* será igual ao triângulo *SBc* e, portanto, também será igual ao triângulo *SAB*. Por um argumento semelhante, se a força centrípeta atua sucessivamente em *C*, *D*, *E* etc.; e faz com que o corpo, em cada intervalo de tempo, descrever as linhas retas *CD*, *DE*, *EF* etc.; todas elas ficarão no mesmo plano; e o triângulo *SCD* será igual ao triângulo *SBC*, e *SDE* a *SCD*, e *SEF* a *SDE*. E, portanto, em tempos iguais, serão descritas áreas iguais em um plano imóvel; e, por composição, quaisquer somas dessas áreas, como *SADS*, *SAFS*, estão uma para outra como os tempos em que são descritas. (Newton, 1687, p. 37-38)

O argumento é, essencialmente, o que já havia sido mostrado, porém mais sucinto. Por fim, Newton passa ao caso limite em que os intervalos de tempo vão tendendo a zero e o polígono tende a uma curva suave:

> Agora, deixe aumentar o número desses triângulos e sua largura diminuir ao infinito; então (pelo corolário 4, lema III) seu perímetro final *ADF* será uma linha curva e, assim, a força centrípeta pela qual o corpo é desviado sempre da tangente a essa curva, agirá continuamente. E quaisquer áreas descritas SADS, SAFS, que são sempre proporcionais aos tempos em

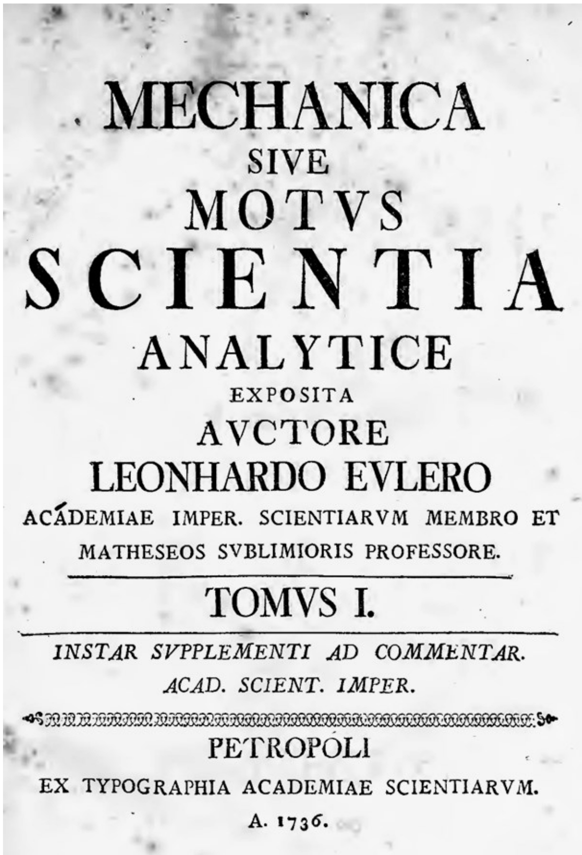
> que são descritas, serão proporcionais a esses tempos também neste caso. Q.E.D. [*Quod Erat Demonstrandum*] (Newton, 1687, p. 38)

Essa demonstração constitui o *primeiro* teorema mecânico apresentado por Newton na sua obra. É uma das mais simples. Outras provas geométricas que ele apresenta (como as relacionadas com as órbitas elípticas) são muito mais complexas. Para nós, que não estamos habituados a esse tipo de argumentos, a leitura e compreensão dos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* é muito difícil, sendo às vezes impossível de entender.

Voltando a um ponto levantado no início deste artigo, podemos questionar: e por que Newton não utilizou o cálculo diferencial e integral, bem como o formalismo algébrico, em sua obra? A resposta é simples. Ele escreveu para um público específico, que não conhecia ainda essa nova ferramenta matemática (Guicciardini, 1999, p. 107). Para ler os *Principia*, não era necessário adquirir o conhecimento do novo método matemático, pois ele era escrito em uma linguagem baseada na geometria.

## 5. O MÉTODO ANALÍTICO DE EULER

Newton faleceu em 1727. Nove anos depois, em 1736, um jovem matemático (com apenas 29 anos de idade) chamado Leonhard Euler publicou seu primeiro livro, um tratado de mecânica em dois volumes denominado *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, que pode ser traduzido por *Mecânica, ou a ciência do movimento exposta de modo analítico* (Fig. 12). O próprio título da obra é uma novidade, em dois sentidos. Primeiramente, porque até aquela época se dava o nome de "mecânica" principalmente ao estudo das máquinas e da estática. Em segundo lugar, porque o título do livro indica que o estudo será apresentado através de fórmulas (ou seja, de modo analítico) e não pelo método geométrico, como na obra de Newton.



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

*INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.*
*ACAD. SCIENT. IMPER.*

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

**Figura 12.** Folha de rosto do tratado de Mecânica de Euler (1736).

No prefácio da obra, Euler menciona tanto o livro de Newton (os *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*) quanto a *Phoronomia* de Jakob Hermann como exemplos de obras que utilizam o método sintético (geométrico) e não o analítico (empregando equações e cálculo diferencial e integral). Devemos notar que, até o século XVII, os significados de "análise" e "síntese", na matemática, eram diferentes dos que ele utilizou. "Análise" era o método que consistia em reduzir o mais complexo ao mais simples, decompor, voltar atrás, procurando algo já conhecido ou um primeiro princípio que justifique aquilo que se quer provar; "síntese" era o método de progredir do mais simples e particular para o mais complexo e geral (Heath, 1921, v. 1, p. 371; v. 2, p. 400-401).

> Aquilo que ocorre com todos os escritos compostos sem o uso da análise vale principalmente para a Mecânica; mesmo se o leitor ficar convencido da verdade das coisas lá apresentadas, ele será incapaz de obter um conhecimento suficientemente claro e distinto delas; e se os mesmos problemas forem mudados ligeiramente, ele pode ter grandes dificuldades de resolvê-los, a menos que recorra à análise e desenvolva as mesmas proposições pelo método analítico. Assim, eu sempre tive a mesma dificuldade em fazer uso disso, quando examinei os *Principia* de Newton ou a *Phoronomia* de Hermann, pois mesmo quando as soluções dos problemas me pareciam estar satisfatoriamente compreendidos, bastava uma pequena mudança e eu não era capaz de resolver o novo problema. Assim, há muito tempo, tanto quanto sou capaz, tenho procurado obter pela análise o que se oculta nesses métodos sintéticos, para poder apresentar as mesmas proposições que são manipuladas mais facilmente por meu próprio método analítico. Assim, trabalhando com esse último método, obtive um aumento perceptível de minha compreensão. [...] E assim nasceu este tratado sobre o movimento, no qual são apresentadas convenientemente na devida ordem tanto as coisas que encontrei nos escritos de outros sobre o movimento dos corpos, como também minhas próprias considerações, demonstradas pelo método analítico. (Euler, 1736, v. 1, páginas sem número)

No primeiro capítulo da *Mechanica*, Euler primeiramente apresenta uma série de definições sobre o movimento e depois começa a introduzir equações que envolvem, inicialmente, relações entre números abstratos produzidos por razões entre grandezas do mesmo tipo. Por exemplo, a Proposição 2, Teorema, seção 25: “Para dois corpos que avançam com movimento uniforme, as velocidades são diretamente [proporcionais] aos espaços percorridos por cada um e inversamente com o tempo no qual esses espaços são percorridos” (Euler, 1736, v. 1, p. 9)

> Demonstração. Sejam $A$ e $a$ os dois corpos, e suas velocidades [*celeritas*] $C$ e $c$; e que o corpo $A$ percorre um espaço [*spatium*] $S$ no tempo [*tempus*] $T$, enquanto o corpo $a$ [percorre] um espaço $s$ no tempo $t$. Como no movimento uniforme as distâncias são proporcionais aos tempos (18), o espaço que o corpo $a$ completa no tempo $T$ pode ser determinado pela proporção $t{:}T = s{:}\frac{sT}{t}$. Portanto, o corpo $a$ se moverá em um tempo $T$ um espaço $\frac{sT}{t}$. Mas, no mesmo tempo $T$, o corpo $A$ se move um espaço $S$. As velocidades dos corpos devem ser medidas pelos espaços que eles percorrem no mesmo tempo (18). Por isso, $C{:}c = S{:}\frac{sT}{t}$, ou $C{:}c = \frac{S}{T}{:}\frac{s}{t}$. Daí se seguem que as velocidades são diretamente [proporcionais] aos espaços e inversamente aos tempos em que eles são percorridos. Q.E.D. (Euler, 1736, v. 1, p. 10)

É relevante observar que Euler utiliza letras para representar as grandezas físicas (algo que Newton não fazia) e que a escolha dessas letras está associada aos seus nomes, em latim. Assim, a velocidade é representada por $c$ (inicial de *celeritas*), a distância ou espaço percorrido por $s$ (*spatium*) e o tempo por $t$ (*tempus*). Ainda utilizamos $s$ e $t$, mas $c$ foi substituído por $v$ (de *velocitas*), pois utilizamos geralmente $c$ para representar uma constante.

Embora na citação acima Euler estivesse ainda utilizando razões e proporções, devemos notar que ele já escrevia $\frac{S}{T}$, ou seja, estava dividindo um espaço por um tempo; e também $\frac{sT}{t}$, onde aparece um espaço multiplicado por um tempo. Além disso, ele utiliza o próprio sinal de igualdade, em vez do sinal de proporcionalidade que havia sido adotado no século anterior.

Essa atitude de ignorar as restrições do conceito de divisão da matemática clássica vai avançando, nos trechos seguintes de sua obra, sem qualquer justificativa.

> §26. A partir da última proporção [*analogia*] é produzida esta equação $\frac{CT}{S} = \frac{ct}{s}$. Portanto, em qualquer movimento uniforme, o produto da velocidade pelo tempo, dividido pelo

> espaço percorrido naquele tempo, dá sempre o mesmo quociente. (Euler, 1736, v. 1, p. 10)

Aqui, Euler se refere explicitamente ao *produto da velocidade pelo tempo*, ou seja, a multiplicação de duas grandezas concretas, *dividido pelo espaço percorrido*, ou seja, a divisão por um número concreto. As duas citações seguintes mostram que ele passa a se referir frequentemente ao produto e à divisão de grandezas físicas:

> Corolário 4. §29. Dada a velocidade de um corpo que se move uniformemente, e algum espaço percorrido, pode-se obter o tempo em que esse espaço foi percorrido, a saber, dividindo o espaço pela velocidade. [...]
>
> Corolário 5. §30. De modo semelhante, a velocidade pode ser expressa pelo espaço percorrido dividido pelo tempo; e o próprio espaço também pelo produto do tempo pela velocidade. (Euler, 1736, v. 1, p. 11)

Depois de introduzir os conceitos básicos da cinemática, Euler começa a realizar deduções e, aqui, ele abandona totalmente o método geométrico de Newton e passa a utilizar o cálculo diferencial e integral, como no exemplo abaixo:

> Proposição 4. Teorema. §37. Um corpo se move com algum tipo de movimento variável ao longo da linha *AM*, sendo dada a velocidade do corpo em cada ponto; pede-se determinar o tempo no qual o arco *AM* é completado. (Euler, 1736, v. 1, p. 13)

> Solução. Seja *AM* o espaço $=s$ da linha reta ou curva; e seja $c$ a velocidade que o corpo tem em $M$, que será alguma função do próprio $s$. A partir de $M$ toma-se o elemento $Mm$, que se considera ser atravessado com a velocidade uniforme $c$. Sendo o elemento $Mm$ chamado de $ds$, o tempo em que este elemento é percorrido $= \frac{ds}{c}$ (29). Portanto, integrando, é obtido o tempo em que o arco todo é completado $= \int \frac{ds}{c}$. Deve

ser adicionada a essa integral uma constante que torne esse tempo =0, quando se faz $s$=0, segundo as regras de integração conhecidas. Q.E.I. (Euler, 1736, v. 1, p. 13-14)

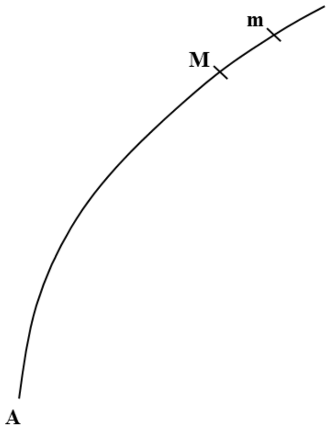
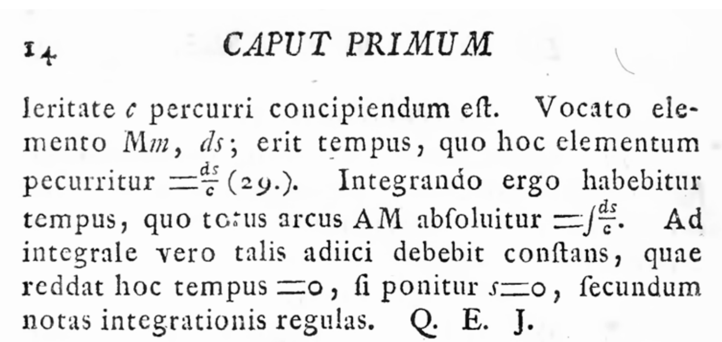



**Figura 14.** Diagrama de Euler para explicar o Teorema do §37.

O diagrama utilizado aqui por Euler (Fig. 14) não serve para auxiliar a dedução (como em Huygens e Newton), mas apenas para ilustrar a situação que ele está estudando. Notemos que ele utilizou a divisão da distância pela velocidade e que introduziu diretamente o uso de integrais na cinemática. Para que não se pense que a notação aqui mostrada é anacrônica, é útil conferir a imagem do trecho correspondente do livro de Euler (Fig. 15).



14 CAPUT PRIMUM

leritate $c$ percurri concipiendum eſt. Vocato elemento $Mm$, $ds$; erit tempus, quo hoc elementum pecurritur $= \frac{ds}{c}$ (29.). Integrando ergo habebitur tempus, quo totus arcus AM abſoluitur $= \int \frac{ds}{c}$. Ad integrale vero talis adiici debebit conſtans, quae reddat hoc tempus $=0$, ſi ponitur $s=0$, ſecundum notas integrationis regulas. Q. E. J.

**Figura 15.** Parte da demonstração do Teorema do §37 no livro de Euler, onde podemos observar a notação que ele utilizou (Euler, 1736, v. 1, p. 14).

Nem tudo o que Euler fazia em 1736 corresponde exatamente à nossa abordagem. Ele não usava, por exemplo, o conceito de aceleração. Nos pontos em que esperaríamos o surgimento desse conceito, ele utiliza uma grandeza sem nome que corresponde ao *inverso* da aceleração, como aqui:

> Corolário 3. §133. Se, portanto, no início do seu movimento, a velocidade adquirida em um pequeno tempo *t* é chamada de *c* e o espaço percorrido é *s*, teremos *t*=*nc*. Mas também $t = \int \frac{ds}{c}$ (37). Portanto, se deduz $nc = \int \frac{ds}{c}$ ou $ncdc = ds$, de onde sai $s = \frac{nc^2}{2} = \frac{t^2}{2n}$. Logo, os espaços descritos desde o início do movimento estão na razão dupla dos tempos [são proporcionais aos quadrados dos tempos] ou das velocidades adquiridas nesses espaços. (Euler, 1736, v. 1, p. 52)

Observemos que a grandeza *n* aqui utilizada por Euler corresponde ao inverso da aceleração, pois escreveríamos *c*=*at* em vez de *t*=*nc*, e $s = \frac{at^2}{2}$ em vez de $s = \frac{t^2}{2n}$.

Ao introduzir considerações dinâmicas, Euler não utilizou o termo Newtoniano para força (*vis*) e sim o de potência (*potentia*), mas seu uso é muito semelhante, como nos exemplos abaixo:

> Proposição 19. Teorema. §150. Se o ponto se move na direção *AM* e percorre o pequeno espaço *Mm*, sendo solicitado pela potência *p* que o puxa na mesma direção, o aumento de velocidade que esse ponto adquire é como [é proporcional a] a potência que o solicita multiplicada por esse pequeno tempo em que ele percorre o elemento [de distância] *Mm*. (Euler, 1736, v. 1, p. 61)

Ou seja, a variação de velocidade *dc* é proporcional a *pdt*, o que é semelhante ao que escreveríamos como $dv \propto Fdt$. Vejamos outros exemplos:

> Corolário 1. §151. Seja o ponto que está em *M*, com velocidade *c*, e o pequeno espaço *Mm*=*ds*, sendo $dt = \frac{ds}{c}$, pois se deve considerar que o elemento *Mm* é descrito por um movimento uniforme. Como, além disso, *dc* é como *pdt* [proporcional a *pdt*], *dc* será proporcional a *pds/c*, ou *cdc* proporcional a *pds*. Portanto, o aumento do quadrado da velocidade é proporcional à potência multiplicada pelo elemento de espaço percorrido. (Euler, 1736, v. 1, p. 62)

Ou, com nossa representação: $d(v^2) \propto Fds$ e, portanto, $\Delta(v^2) \propto F\Delta s$. O significado físico é semelhante ao de nossa consideração atual de que a variação da energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado pela força que age sobre ela, embora os conceitos de trabalho e energia cinética não existissem naquela época.

Logo em seguida, Euler introduziu o papel da massa inercial, que ele descreve como sendo a quantidade de matéria da partícula, ou o número de "pontos" que ela contém:

> Proposição 20. Teorema. §154. Se a direção do movimento dos pontos é igual à direção das potências, o aumento de velocidade será proporcional à potência vezes o pequeno tempo e dividida pela matéria ou quantidade de pontos. (Euler, 1736, v. 1, p. 63)

Ou seja: a variação de velocidade *dc* é proporcional a $\frac{pdt}{A}$. Euler não utilizou nenhum símbolo especial para a quantidade de matéria (ou massa), representando essa grandeza, em cada caso, pela mesma letra que representa o próprio corpo que está se movendo, como no exemplo abaixo. Além disso, para passar de uma *proporcionalidade* a uma *equação*, Euler introduziu uma constante *n* cuja natureza não é esclarecida neste ponto, embora seja discutida posteriormente:

> Corolário 1. §155. Então, se a velocidade do ponto *A* for *c*, teremos $dc = \frac{npdt}{A}$, onde *n* indica sempre um número que

não depende nem da potência, nem do tempo, nem da quantidade de pontos.

Corolário 2. §156. A quantidade de matéria $A$ aqui considerada vem da relutância à potência que solicita, isto é, corresponde à força de inércia [*vis inertiae*]. Assim, o aumento da velocidade é como [proporcional a] a potência que solicita e o pequeno tempo diretamente, mas inversamente à força de inércia do corpo.

Corolário 3. §157. Considerando o espaço $Mm=ds$, temos $dt = \frac{ds}{c}$. Portanto, $dc = \frac{npds}{Ac}$, ou teremos $cdc = \frac{npds}{A}$. Portanto, o aumento do quadrado da velocidade é produzido pela potência multiplicada pelo pequeno espaço percorrido, dividido pela massa ou força de inércia dos corpúsculos. (Euler, 1736, v. 1, p. 64)

A primeira equação aqui apresentada por Euler é correspondente a $dv = \frac{Fdt}{m}$, ou $m\frac{dv}{dt} = F$ (nossa forma da "segunda lei de Newton"), embora ele não a escreva desse modo.

Na *Mechanica* e em suas outras obras, Euler continuou a elaborar e utilizar esse formalismo (González Redondo, 2003), mas não vamos discutir aqui esse desenvolvimento posterior.

## 6. ENTRE NEWTON E EULER

Quando examinamos o formalismo empregado por Leonhard Euler em sua mecânica, nós nos sentimos muito mais confortáveis do que ao tentar compreender os *Principia* de Newton. De fato, tanto o uso de um formalismo algébrico quanto o emprego do cálculo diferencial e integral (com o simbolismo desenvolvido por Leibniz) que Euler empregou na sua *Mechanica* foram depois de algum tempo adotados por quase todos – e chegaram até nossos livros didáticos. A importância da contribuição de Euler, sob esse aspecto, é indiscutível e tem sido reconhecida pelos historiadores da ciência (Maronne; Panza, 2014).

Devemos, porém, ter o cuidado de não imaginar que Euler, sozinho, criou e impôs esse novo formalismo. A construção da ciência é um trabalho coletivo, lento, com idas e voltas. Cada avanço depende de inúmeras contribuições de um grande número de pessoas, muitas das quais são quase totalmente desconhecidas hoje em dia. Essa transformação do formalismo da mecânica clássica não é uma exceção.

Uma primeira pista que salta aos olhos é o uso do cálculo diferencial e integral *com o formalismo de Leibniz*. Como é bem conhecido, Newton e Leibniz criaram independentemente suas versões do cálculo diferencial e integral, com diferentes conceituações e simbolismos bem diversos. Os símbolos de diferencial, derivada e integral que usamos hoje em dia são os de Leibniz. Raramente utilizamos o simbolismo dos *fluxions* de Newton, exceto em alguns pontos especiais da mecânica clássica em que escrevemos $\dot{x}$ para derivada de $x$ em relação ao tempo e $\ddot{x}$ para a componente $x$ da aceleração. O símbolo de Newton para a integral, que era um quadrado (para simbolizar áreas) nunca é usado hoje em dia. O formalismo do cálculo diferencial e integral que Euler usou mostra que, *pelo menos neste aspecto*, ele estava sendo influenciado por Leibniz. Na verdade, a influência foi mais ampla.

Até meados do século XVII, praticamente todos os matemáticos consideravam que razões eram diferentes de divisões e não eram números nem frações; e que proporções, sendo relações entre duas razões, não eram igualdades ou equações (Sylla, 1984). Por isso, eram utilizados símbolos diferentes para essas coisas. A divisão era geralmente representada sob a forma de uma fração e o símbolo de igualdade que utilizamos hoje em dia já era comum, naquela época. Assim, podia-se escrever $\frac{42}{6} = \frac{21}{3}$, por exemplo. Para razões e proporções, o simbolismo mais utilizado na segunda metade do século XVII era o que foi proposto por Vincent Wing em 1651(Cajori, 1993, v. 1, p. 275), representando "a razão de $a$ para $b$ é proporcional à razão de $c$ para $d$" por $a : b :: c : d$.

Leibniz, no entanto, se posicionou em 1693 contra essas distinções clássicas:

> Eu sempre desaprovei o fato de que são usados símbolos especiais em razões e proporções; pois para a razão é suficiente o sinal de divisão, e da mesma forma para proporção é suficiente o sinal de igualdade. Assim eu escrevo a razão de *a* para *b* assim: $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, assim como é feito ao dividir *a* por *b*. Eu designo proporção, ou a igualdade de duas razões, pela igualdade das duas divisões ou frações. Assim, quando eu exprimo que a razão de *a* para *b* é a mesma que a de *c* para *d*, é suficiente escrever $a : b = c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (Leibniz, *apud* Cajori, 1993, v. 1, p. 295)

Note-se que Leibniz decidiu simplesmente *ignorar* uma tradição matemática de dois mil anos, sem apresentar qualquer justificativa mais aprofundada.

Em seus escritos sobre mecânica, Leibniz utilizou principalmente a linguagem das razões e proporções, descrevendo seus raciocínios através de palavras e não por equações. Porém, em vários pontos, ele começou a utilizar divisões em vez de razões, bem como empregar fórmulas algébricas para representar as relações entre as grandezas (González Redondo, 2004).

Vejamos, em primeiro lugar, alguns exemplos da pequena obra com o longo título *Essay de dynamique sur les loix du mouvement, ou il est monstré, qu'il ne se conserve pas la même quantité de mouvement, mais la même force absolue, ou bien la même quantité de l'action motrice* (Leibniz, 1860, p. 215-231), escrita por Leibniz provavelmente entre 1699 e 1701 (Duchesneau, 1994, p. 244). Nessa obra, Leibniz utiliza tanto a ideia de divisão de uma grandeza física por outra, como a de seu produto, sem apresentar qualquer justificativa, muitas vezes misturando a linguagem de razões e proporções com divisões e igualdades.

> Assim, as velocidades estão na razão composta da [razão/ direta dos espaços percorridos e da [razão] recíproca dos tempos empregados. *Ou, o que é a mesma coisa, para ter a estimativa da velocidade, deve-se tomar o espaço e dividi-lo pelo tempo*. Por exemplo, *A* completa 4 pés em três segundos e *B* completa 2 pés em um segundo; a velocidade de *A* será como 4 dividido por 3, quer dizer, como $\frac{4}{3}$, e a velocidade de B será como 2 dividido por 1, quer dizer, como 2, de modo que a velocidade de A estará para a de B como $\frac{4}{3}$ para 2, quer dizer, como 2 para 3. (Leibniz, 1860, p. 222; trecho enfatizado por mim)

> Entende-se por quantidade de movimento o produto da massa pela velocidade, de modo que, sendo a massa do corpo como 2 e a velocidade como 3, a quantidade de movimento do corpo seria como 6. Assim, se houver dois corpos que se encontram, multiplicando a massa de cada um por sua velocidade e tomando a soma dos produtos, pretende-se que essa soma deve ser a mesma antes e depois do encontro. (Leibniz, 1860, p. 216)

Na mesma obra, Leibniz introduz equações algébricas para representar relações entre grandezas físicas e fazer deduções. Ele analisa a colisão de dois corpos elásticos *a* e *b* representando suas velocidades antes do choque por *v* e *y*; e suas velocidades depois do choque por $x$ e $z$, indicando que essas velocidades podem ter sinais negativos. As massas dos dois corpos são indicadas pelas mesmas letras que os representam, ou seja, *a* e *b* (Leibniz, 1860, p. 226). Escreve, então, as seguintes equações:

> I. *Equação linear*, que exprime a conservação da causa do choque ou da velocidade respectiva:
> $$v - y = z - x$$
> onde $v - y$ significa a velocidade respectiva entre os corpos, com a qual se aproximam antes do choque, e $z - x$ significa a velocidade respectiva com a qual eles se afastam depois do choque. E essa velocidade respectiva é sempre a mesma

quantidade antes ou depois do choque, supondo que os corpos sejam bem elásticos, é isso o que diz essa equação. Deve-se apenas observar que como os sinais variam na explicação do detalhe, essa regra geral conterá todos os casos particulares. O que ocorre também na equação seguinte:

II. *Equação plana*, que exprime a conservação do progresso comum ou total dos dois corpos

$$av + by = ax + bz$$

[...]

III. *Equação sólida*, que exprime a conservação da força total absoluta ou da ação motriz

$$avv + byy = axx + bzz$$

(Leibniz, 1860, p. 227)

A "equação sólida" de Leibniz corresponde à nossa lei da conservação da energia cinética (válida para choques elásticos); ele escreve $avv$ em vez de $av^2$, como fazemos hoje. Essas três relações haviam sido utilizadas por Huygens no seu estudo de colisões, porém sem utilizar o formalismo algébrico que Leibniz introduz aqui. A vantagem desse formalismo é que o autor pode desenvolver demonstrações muito mais simples – exatamente como fazemos até hoje. Ele indica, por exemplo, que as três equações indicadas acima não são independentes e que bastam duas delas, pois a terceira pode ser obtida das outras duas, o que mostra de forma muito simples:

Pela primeira, temos $v + x = y + z$ e, pela segunda, teremos $a(v - x) = b(z - y)$. Multiplicando uma equação pela outra segundo os lados correspondentes, teremos $a(v - x)(v + x) = b(z - y)(z + y)$, o que produz $avv - axx = bzz - byy$, ou a terceira equação. (Leibniz, 1860, p. 228)

Na citação acima, apenas fizemos uma pequena mudança de notação, pois Leibniz não utilizava parênteses. Em vez de $a(v - x)$ ele escrevia $a, v - x$ e assim por diante, nos outros casos.

O uso de simbolismo algébrico já aparece anteriormente em outra obra de Leibniz, *Dynamica de potentia et legibus naturae corporeae* (Leibniz, 1860, p. 281-514) , escrita em 1689, que é a mais ampla formulação de sua mecânica. No entanto, quase todo esse tratado utiliza argumentos com razões e proporções, bem como análises geométricas; apenas em uma pequena parte (Leibniz, 1860, p. 425-431) ele apresenta equações algébricas, acrescentando também o uso de integrais de grandezas físicas.

A abordagem de Leibniz influenciou diretamente seu principal discípulo Christian Wolff, bem como a família Bernoulli. Ora, Leonhard Euler foi aluno de Johann Bernoulli e colega de Daniel, Nikolaus e Johann Bernoulli filho (Suisky, 2009, p. vii). Encontra-se, então, uma conexão indireta entre o formalismo utilizado por Euler e aquele que Leibniz já havia começado a empregar algumas décadas antes.

A história é, no entanto, mais complexa. Michel Blay publicou trabalhos em que mostrou que Leibniz e a família Bernoulli ainda não haviam conseguido desenvolver plenamente o uso do cálculo diferencial e integral na mecânica. Esse historiador atribui um papel fundamental a Pierre Varignon (Blay, 1988; Blay, 1992), que escreveu vários trabalhos entre 1707 e 1711 nos quais estudou o movimento de projéteis submetidos a resistências, apresentando um método geral de resolução que tem grande semelhança com as equações diferenciais que utilizamos hoje em dia.

Niccolò Guicciardini (1996), por outro lado, mostrou o importante papel de Jakob Hermann, que reformulou resultados de Newton (como sua demonstração da lei das áreas) utilizando o cálculo diferencial e integral. Como vimos, Euler citou a *Phoronomia* de Jakob Hermann, mas apenas para criticá-la; na verdade, em vários pontos dessa obra encontramos o uso de letras para representar as grandezas físicas, equações algébricas para representar suas relações, multiplicação e divisão de grandezas concretas (Hermann, 1716, p. 2-4), bem como o uso do cálculo diferencial e integral para resolver questões da mecânica.

Temos, infelizmente, uma tendência a tentar simplificar a história, procurando os "grandes personagens" que deram os "passos fundamentais" que levaram ao que aceitamos hoje em dia. Por causa disso, até mesmo os historiadores da ciência podem privilegiar indevidamente as contribuições de pesquisadores mais conhecidos – como Leibniz e Euler – ignorando a importância do trabalho de outros autores menos conhecidos. Não temos dúvidas de que, se for feita uma busca cuidadosa, serão encontrados muitos outros autores e trabalhos que não foram citados aqui e que contribuíram para a mudança de abordagem na mecânica, passando do método geométrico, com uso de razões e proporções, para o método algébrico, incorporando também o cálculo diferencial e integral. Quem foi o "primeiro" a fazer isso? A pergunta é inadequada, justamente porque o desenvolvimento da ciência depende de inúmeras contribuições de muitas pessoas.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As técnicas matemáticas podem ajudar muito no desenvolvimento da física, mas devemos perceber que elas são apenas um *instrumento*. Um marceneiro, alguns séculos atrás, não dispunha das ferramentas elétricas atuais, como furadeira, serra, parafusadeira etc. Ele empregava instrumentos manuais que exigiam força muscular e habilidade, que atualmente consideramos muito pouco práticos. No entanto, um bom marceneiro era capaz de produzir móveis de altíssima qualidade. Na física, podemos considerar que ocorre algo semelhante. Newton era capaz de deduzir, pelo seu método geométrico, resultados de extrema complexidade – como a análise das perturbações do movimento da Lua, levando em conta a influência do Sol e o achatamento da Terra. Um estudante universitário (ou mesmo um professor universitário de Mecânica) pode ser incapaz de obter resultados semelhantes. No entanto, não há dúvidas de que o uso dos instrumentos matemáticos adequados pode *facilitar* muito o trabalho do estudante e do pesquisador. Este artigo mostrou o desenvolvimento de um dos aspectos da evolução do formalismo matemático da Mecânica, que está incorporado ao ensino contemporâneo e cujo desenvolvimento é pouco conhecido.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), sem o qual teria sido impossível desenvolver este trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARIOTTI, Piero E. Aspects of the conception and development of the pendulum in the 17th century. *Archive for History of Exact Sciences*, **8** (5): 329-410, 1972.

BEAULIEU, Anne. Christiaan Huygens et Mersenne l'inspirateur. Pp. 25-31, in : ACLOQUE, Paul *et al*. *Huygens et la France*. Paris : J. Vrin, 1981.

BLACKWELL, Richard J. Christiaan Huygens' "The motion of colliding bodies". *Isis*, **68**: 574-597, 1977.

BLAY, Michel. *La naissance de la mécanique analytique*. La science du mouvement au tournant des XVII e et XVIII e siècles. Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

BLAY, Michel. Varignon ou la théorie du mouvement des projectiles 'comprise en une Proposition générale'. *Annals of Science*, **45** (6): 591-618, 1988.

BOS, Henk Jan Maarten. Christiaan Huygens. Vol. 6, pp. 597-613, in: GILLESPIE, Charles Coulston (ed.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Charles Scribner's Sons, 1972.

BOYER, Carl B. *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1968.

BUKOWSKI, John. Christiaan Huygens and the problem of the hanging chain. *The College Mathematics Journal*, **39** (1): 2-11, 2008.

CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations*. New York: Dover, 1993. 2 vols.

COSTABEL, Pierre. Isochronisme et accélération (1638-1687). *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, **28** (102): 3-20, 1978.

CROWE, Michael J. *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1967.

DUCHESNEAU, François. *La dynamique de Leibniz*. Paris: J. Vrin, 1994.

ERLICHSON, Herman. Huygens and Newton on the problem of circular motion. *Centaurus*, **37** (3): 210-229, 1994.

ERLICHSON, Herman. Christiaan Huygens' discovery of the center of oscillation formula. *American Journal of Physics*, **64** (5): 571-574, 1996.

ERLICHSON, Herman. The young Huygens solves the problem of elastic collisions. *Amerian Journal of Physics*, **65**: 149-154, 1997.

EULER, Leonhard. *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. 2 vols. Petropoli: ex Typographia Academiae Scientiarum, 1736.

FABIEN, Chareix. La découverte des lois du choc par Christiaan Huygens. *Revue d'Histoire des Sciences*, **56** (1): 14-58, 2003.

GONZÁLEZ REDONDO, Francisco A. La contribución de Leonard Euler a la matematización de las magnitudes y las leyes de la mecánica, 1736-1765. *Lull*, **26**: 837-857, 2003.

GONZÁLEZ REDONDO, Francisco A. La formulación matemática de la Mecánica en el siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, **66**: 74-90, Febrero 2004.

GUICCIARDINI, Niccolò. An episode in the history of dynamics: Jakob Hermann's proof (1716-1717) of Proposition 1, Book 1, of Newton's *Principia*. *Historia Mathematica*, **23**: 167-181, 1996.

GUICCIARDINI, Niccolò. *Reading the Principia: The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

HEATH, Thomas Little. *A history of Greek mathematics*. 2 vols. Oxford: The Clarendon Press, 1921.

HERMANN, Jacob. *Phoronomia, sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum*. Amstelaedami: apud Rod. & Gerh. Wetstenios, 1716.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. *Leibnizens mathematische Schriften*. Zweite Abtheilung. Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend. Band II. Editado por Karl Immanuel Gerhardt. Halle: H. W. Schmidt, 1860.

MAHONEY, Michael S. Huygens and the pendulum: From device to mathematical relation. Pp. 17-39, in: *The growth of mathematical knowledge*. Dordrecht: Springer, 2000.

MARONNE, Sébastien; PANZA, Marco. Euler, reader of Newton: mechanics and algebraic analysis. *Advances in Historical Studies*, **3** (1): 12-21, 2014.

MARTINS, Roberto de Andrade. Estado de repouso e estado de movimento: uma revolução conceitual de Descartes. Pp. 291-308, in: PEDUZZI, Luiz; MARTINS, André Ferrer; FERREIRA, Juliana (eds.). *Temas de história e filosofia da ciência no ensino*. Natal: Editora da UFRN, 2012.

MARTINS, Roberto de Andrade. Galileo e a rotação da Terra. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física,* **11** (3): 196-211, 1994.

NEWTON, Isaac. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. London: jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, 1687.

SILVA, Cibelle Celestino. A escolha de uma ferramenta matemática para a física: o debate entre os quatérnions e a álgebra vetorial de Gibbs e Heaviside. Pp. 115-126, in: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C. P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro*. Campinas: AFHIC, 2004.

SMITH, David Eugene. *A history of mathematics*. 2 vols. New York: Dover, 1951.

SPEISER, David. Le Horologium Oscillatorium de Huygens et les Principia. *Revue Philosophique de Louvain*, **86** (72): 485-504, 1988.

STEPHENSON, Reginald. Development of vector analysis from quaternions. *American Journal of Physics*, **34**: 194-201, 1966.

SUISKY, Dieter. *Euler as physicist*. Berlin: Springer, 2009.

SYLLA, Edity. Compounding ratios. Bradwardine, Oresme, and the first edition of Newton's *Principia*. Pp. 11-43, in: MENDELSOHN, Everett (ed.). *Transformation and tradition in the sciences*. Essays in honor of I. Bernard Cohen. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

VILAIN, Christiane. Christiaan Huygens' Galilean mechanics. Pp185-198, in: PALMERINO, Carla Rita; THIJSSEN, J. M. M. H. (eds.). *The reception of the Galilean science of motion in seventeenth-century Europe*. Dordrecht: Springer, 2004.

YODER, Joella G. *Unrolling time. Christiaan Huygens and the mathematization of nature*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

Scientiarum Historia et Theoria Studia, volume 4

Roberto de Andrade Martins

# Ensaios sobre História e Filosofia das Ciências I

Extrema: Quamcumque Editum, 2021

## Sumário

Prólogo ........................................................................................1

O *Tratado da Esfera* de André do Avelar (1593) ..............................5

O surgimento da mecânica quântica – uma ou duas teorias? ..........41

Ibn Al-Haytham e a revolução medieval na Óptica .......................125

O formalismo da mecânica clássica, de Aristóteles a Galileo ......165

O desenvolvimento do formalismo da mecânica clássica, de Christiaan Huygens e Isaac Newton até Leonhard Euler ..............195

Paperback edition: ISBN 978-65-996890-6-2
Kindle edition: ISBN 978-65-996890-7-9

Available at:
https://www.amazon.com/dp/659968906X