O FORMALISMO DA MECÂNICA CLÁSSICA, DE ARISTÓTELES A GALILEO

Roberto de Andrade Martins

Resumo: Da Antiguidade até o século XVII, os autores que se dedicaram ao desenvolvimento dos princípios da mecânica – como Aristóteles, Arquimedes e Galileo – não dispunham do formalismo algébrico com o qual representamos atualmente as leis da física. Utilizavam apenas razões e proporções e raciocínios empregando métodos geométricos. Este artigo expõe esse aspecto da história da mecânica, apresentando os aspectos relevantes da matemática grega e discutindo a possível utilidade do estudo dessa antiga abordagem no ensino de física.
Palavras-chave: história da física; história da mecânica; formalismo matemático; Aristóteles; Galileo Galilei

1. INTRODUÇÃO

A história da física costuma se concentrar nas ideias (teorias, hipóteses etc.) desenvolvidas no passado. Este artigo irá focalizar outro aspecto: o antigo formalismo empregado na mecânica clássica.

Hoje em dia, os livros didáticos sobre Mecânica utilizam constantemente equações escalares e vetoriais para representar as relações entre as grandezas físicas. Isso é tão familiar atualmente que pode parecer que sempre foi assim. A história, no entanto, é muito mais complicada. Até a época de Newton, *ninguém* escrevia equações para descrever as leis da física. A

MARTINS, Roberto de Andrade. *Ensaios sobre História e Filosofia das Ciências I*. Extrema: Quamcumque Editum, 2021.

"física matemática" era baseada apenas no uso de razões e proporções, sem fórmulas. Quando os livros didáticos apresentam as equações do movimento uniformemente acelerado e as atribuem a Galileo, elas utilizam uma notação que não existia no século XVII. Da mesma forma, quando as "leis de Newton" são apresentadas, elas utilizam uma notação que Newton nunca empregou – e que só se popularizou no século XVIII, após os trabalhos de Euler e outros autores. Os personagens da chamada "Revolução Científica" utilizavam métodos matemáticos antigos – não houve uma ruptura com o passado, sob esse aspecto. Aquilo que chamamos de "Mecânica Newtoniana" é, na verdade, o resultado de um trabalho coletivo que durou décadas, com contribuições de muitos autores, tanto anteriores a Newton (como Descartes e Huygens) como posteriores (como Euler e a Marquesa de Châtelet)[1].

Este artigo apresentará, em primeiro lugar, as dificuldades conceituais da matemática antiga para se pensar sobre produtos e divisões de grandezas (como, por exemplo, espaço dividido pelo tempo). Depois, mostrará como se desenvolveu a teoria matemática de proporções na Antiguidade e como ela era utilizada pelos pensadores antigos, como Aristóteles, para estudar fenômenos físicos. Veremos que, em muitos casos, essa técnica era acompanhada pelo uso de diagramas geométricos. Por fim, apresentará como a mesma técnica se manteve até Galileo, mostrando alguns exemplos de suas deduções.

Ao contrário do que ocorreu no desenvolvimento histórico, nossos estudantes aprendem a física, desde o início, utilizando fórmulas matemáticas envolvendo diversas grandezas, como velocidade, massa, força, aceleração etc. Pode ser que saltar a etapa histórica de raciocínios envolvendo razões e proporções, no desenvolvimento educacional, seja um erro. Muitos anos atrás, em um projeto educacional desenvolvido em colaboração com o professor Isaac Queiroz Jr., procuramos identificar e

[1] Os desenvolvimentos seguintes, a partir de Newton, serão abordados em outro artigo.

sanar falhas dos estudantes universitários, para que eles pudessem ter um melhor rendimento nos seus estudos sobre Física. Naquele projeto, criamos uma disciplina de um semestre que introduzia desde técnicas de leitura de textos até as estratégias de resolução de problemas matemáticos complexos (Martins, 1976a; Martins, 1976b). Em uma das etapas, os alunos aprendiam a trabalhar com raciocínios de proporcionalidade – e tinham enorme dificuldade em fazer isso. Depois de dominar essas técnicas elementares, no entanto, passavam a utilizá-las com facilidade e proveito na resolução de problemas da física. Talvez o ensino atual de Física possa se beneficiar com o estudo e aplicação do antigo método de razões e proporções.

2. AS LIMITAÇÕES DA ARITMÉTICA CLÁSSICA

Quando nós escrevemos $F = ma$ e outras equações mecânicas, não costumamos parar para pensar sobre o que significa multiplicar (ou dividir) uma grandeza física por outra. Na verdade, os conceitos de multiplicação e divisão que fazem parte da matemática desde a Antiguidade *não se aplicam* às equações físicas que utilizamos. Vamos explicar esse ponto.

O conceito primitivo de *multiplicação*, surgido com cálculos envolvendo números inteiros, corresponde ao de uma *soma repetida* (Boyer, 1968, p. 15; Smith, 1951, vol. 2, p. 102). Ou seja: 3×4, ou três multiplicado por quatro, é a mesma coisa que $3 + 3 + 3 + 3$, ou seja, o número 3 somado consigo mesmo quatro vezes. Embora 3×4 tenha o mesmo valor que 4×3, são coisas conceitualmente diferentes, porque no primeiro caso (3 multiplicado por quatro) estamos repetindo quatro vezes o número 3; no segundo (4 multiplicado por 3) estamos repetindo três vezes o número quatro.

O conceito clássico de multiplicação pode ser aplicado a grandezas concretas, em alguns casos. Por exemplo: podemos multiplicar por algum número abstrato uma certa quantidade de maçãs, de sapatos etc. Por exemplo: 4 sapatos multiplicados por 3 é uma operação válida, correspondente a 4 sapatos + 4 sapatos + 4 sapatos (ou seja, 4 sapatos somados 3 vezes) cujo valor corresponde a 12 sapatos. Porém, não se pode aplicar a multiplicação a duas quantidades concretas como, por exemplo, 3 sapatos × 4 maçãs. A mesma proibição se aplicava às grandezas acompanhadas de unidades – por exemplo, 3 polegadas × 4 libras era uma expressão que não fazia sentido.

Na matemática antiga existia uma única exceção para isso, referente à multiplicação de grandezas geométricas. Desde a Idade Média, considerava-se válido multiplicar um comprimento por outro comprimento, para encontrar a área de um retângulo, por exemplo (Smith, 1951, vol. 2, p. 103).

Limitações semelhantes existiam para a *divisão*, já que esta operação era considerada desde a Antiguidade como o inverso da multiplicação (Smith, 1951, vol. 2, p. 130). Se $3 \times 4 = 12$, então $12 \div 4 = 3$. No caso dos números inteiros, pode-se descrever a divisão como uma operação que indica quantas vezes o denominador está contido no numerador; por exemplo: $12 \div 4 = 3$ significa que 4 está contido 3 vezes em 12. O numerador de uma divisão pode ser um número concreto (por exemplo, 12 sapatos), mas o denominador deve, geralmente, ser um número abstrato. Pode-se dividir 12 sapatos pelo número 3, mas o inverso não tem significado. Aqui, novamente, a exceção que surgiu posteriormente foi a divisão de grandezas geométricas, aceitando-se a possibilidade de dividir um comprimento por outro (Smith, 1951, vol. 2, p. 130) e até mesmo um volume por uma área (produzindo um comprimento), um volume por um comprimento (produzindo uma área) ou uma área por um comprimento (produzindo um comprimento).

No caso de números concretos, ou *grandezas*, a matemática da Antiguidade não permitia sua divisão, mas introduziu o conceito de *razão*, que contornava essa dificuldade em muitos casos.

Vejamos um exemplo simples. Costumamos representar a lei das alavancas da seguinte forma:

$$F_1 L_1 = F_2 L_2$$

onde F_1 e F_2 são as forças aplicadas nas duas extremidades da alavanca e L_1 e L_2 são as distâncias dessas extremidades ao fulcro da alavanca. Essa equação utiliza a multiplicação de duas grandezas concretas, força e distância – o que é problemático, como vimos. Mas pode ser representada de outra forma:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{L_2}{L_1}$$

Agora, em vez de produtos de grandezas físicas, esta é uma equação entre números abstratos – a divisão entre duas forças (que é um número) é igual à divisão entre dois comprimentos (que é um número).

Mesmo esse tipo de relação era proibido, na aritmética antiga. Porém, podia-se falar sobre a *razão* entre duas grandezas; e duas razões podiam ser comparadas. Era válido dizer, por exemplo, que a razão entre duas forças era proporcional à razão inversa de suas distâncias. Ou, utilizando uma notação que foi desenvolvida muito posteriormente:

$$F_1 : F_2 :: L_2 : L_1$$

Vejamos como essa abordagem se desenvolveu na matemática antiga.

3. A TEORIA GREGA DE RAZÕES E PROPORÇÕES

O quinto livro dos *Elementos* de Euclides apresenta uma teoria geral sobre comparação e proporções de grandezas de qualquer tipo. Atribui-se a origem dessas ideias a Eudoxos, contemporâneo de Platão; embora a organização dessa teoria, nos *Elementos*, seja considerada como de Euclides (Heath, 1956, vol. 2, p. 112; Heath, 1921, vol. 1, p. 325). Conjetura-se que a teoria de razões e proporções começou a ser desenvolvida por Pitágoras e seus seguidores, no estudo da música, porém envolvendo apenas grandezas que pudessem ser representadas por números inteiros ou racionais (Heath, 1921, vol. 1, p. 85). A proporção entre quatro termos considerada mais perfeita, ou "musical", era a que podemos representar com notação mais recente sob a forma $a : (a+b)/2 :: 2ab/(a+b) : b$. Um exemplo numérico: 12 está para 9 como 8 está para 6 (Heath, 1921, vol. 1, p. 86). A teoria das razões e proporções, chamada em grego λογιστής (*logistes*) e de "logística"[2] por alguns autores atuais, era considerada na época de Platão como uma teoria matemática diferente da aritmética e da geometria (Fowler, 1979, pp. 810-811).

No quinto livro dos *Elementos*, Euclides define "razão" entre duas grandezas da seguinte forma: "Uma razão é um tipo de relação com respeito ao tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo" (Heath, 1956, vol. 2, p. 116). Em grego, "razão" é λόγος (*logos*), uma palavra muito utilizada na filosofia antiga para representar o fundamento do pensamento. As grandezas eram chamadas de μέγεθος (*megethos*), que significa aquilo que pode ser medido ou que tem um tamanho. Grandezas de mesmo tipo ou homogêneas são indicadas em grego pela palavra ομογενής (*omogenes*), que pode ser decomposta em ὁμοῦ + γένος, significando coisas do mesmo gênero. Duas grandezas de mesmo tipo (como as alturas de duas pessoas) são coisas que podem ser comparadas entre si, podendo ser iguais ou uma delas ser maior do que a outra. Elas possuem uma razão entre elas. A altura de uma pessoa e o peso de outra pessoa, por outro lado, não podem ser comparados entre si, são grandezas heterogêneas, que não possuem uma razão.

Euclides estabelece outra condição para que duas grandezas possam ter uma razão: "Diz-se que duas grandezas possuem uma razão uma para a outra quando uma delas, ao ser multiplicada, consegue exceder a outra" (Heath, 1921, vol. 1, p. 384). Portanto, além de serem do mesmo tipo, nenhuma delas pode ser nula (de tamanho zero) nem infinita.

[2] Em português atual, a palavra "logística" se refere a transportes; mas pode também ser considerada como uma tradução do grego λογιστικός (*logistikos*), que se refere ao estudo das razões, chamadas de λόγος (*logos*) em grego.

As razões podem ser comparadas entre si, estabelecendo *proporções*. Se o peso de um objeto é o dobro do de outro, e seu tamanho é também o dobro, então a razão entre os dois pesos é igual à razão entre seus tamanhos e essas grandezas são *proporcionais*. Euclides define a proporcionalidade da seguinte forma: "Grandezas que possuem a mesma relação devem ser chamadas proporcionais" (Heath, 1956, vol. 2, p. 129). A palavra grega que significa "proporcional" é ἀνάλογος (*analogos*) e proporcionalidade é αναλογία (*analogia*). Quando utilizamos as nossas palavras "análogo" e "analogia", não percebemos que elas possuem essa antiga relação com a teoria das proporções.

É importante notar que, na matemática antiga, uma razão entre duas grandezas *não é* uma divisão entre elas, é um conceito diferente.

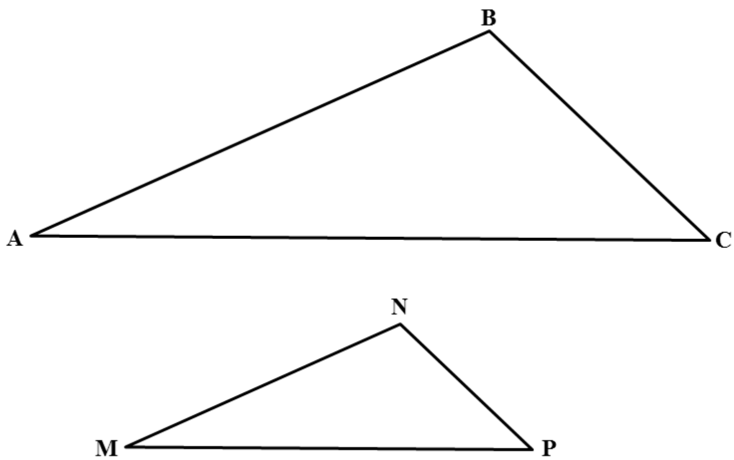


Figura 1. As propriedades de triângulos semelhantes podem ser estabelecidas pela antiga teoria de razões e proporções.

Na geometria grega, a teoria das proporções era utilizada, por exemplo, na comparação entre figuras semelhantes. Dois triângulos são semelhantes se os seus ângulos são iguais, dois a dois; e se dois triângulos são semelhantes, seus lados correspondentes são proporcionais. Euclides desenvolve essas propriedades no sexto livro dos *Elementos*, ou seja, logo após apresentar a teoria de razões e proporções (Heath, 1921, vol. 1, p. 391). Por exemplo: "Em triângulos que possuem ângulos iguais, os lados em torno de ângulos iguais são proporcionais, e os lados correspondentes são os que subentendem ângulos iguais" (Heath, 1956, vol. 2, p. 200). Tomando como exemplo os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A} = \widehat{M}$ do diagrama aqui mostrado (Fig. 1), a proposição de Euclides significa que $\overline{AB}$ está para $\overline{AC}$ como $\overline{MN}$ está para $\overline{MP}$.

Embora as razões não sejam números e sim comparações, elas são utilizadas às vezes como se fossem números, podendo ser multiplicadas entre si. Há uma definição no quinto livro dos *Elementos* que é considerada como espúria pela maioria dos historiadores, que afirma: "Diz-se que uma razão é uma composição de razões quando os tamanhos das razões são multiplicados entre si" (Heath, 1956, vol. 2, pp. 189-190). Euclides utiliza essa propriedade no sexto livro quando analisa, por exemplo, paralelogramos que possuem ângulos iguais (embora não precisem ser semelhantes): "Paralelogramos com ângulos iguais têm um para o outro a razão composta da razão de seus lados" (Fowler, 1979, pp. 813-814). Tomando como exemplo os lados adjacentes ao ângulo $\hat{B} = \hat{N}$ do diagrama aqui mostrado (Fig. 2), a proposição de Euclides significa que a área do paralelogramo *ABCD* está para a área do paralelogramo *MNPQ* como o produto da razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ pela razão entre $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$.

Como uma razão pode ser multiplicada por outra, pode-se também multiplicar uma razão por ela mesma, ou seja, encontrar o quadrado de uma dada razão. Euclides utiliza essa possibilidade para comparar as áreas de dois triângulos semelhantes, por exemplo, na proposição 19 do sexto livro: "Triângulos semelhantes estão um para o outro na razão dupla dos lados correspondentes" (Heath, 1956, vol. 2, p. 232), onde "na razão dupla" significa, em nossa linguagem, proporcional ao quadrado da razão entre os lados.

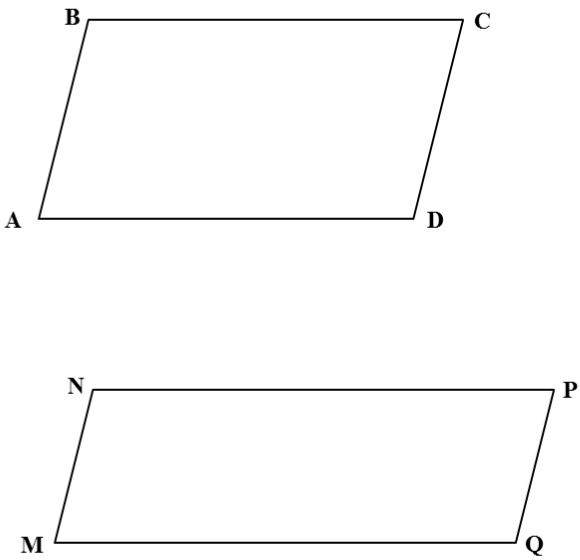


Figura 2. As áreas de dois paralelogramos podem ser comparadas através do produto das razões entre os lados correspondentes.

4. O USO DE PROPORÇÕES NA FÍSICA DE ARISTÓTELES

Aristóteles foi companheiro de Eudoxos, na escola de Platão. Possivelmente aprendeu a teoria de proporções de seu colega; pois ele a aplica em seus argumentos a respeito de movimentos e em outras situações (Heath, 1921, vol. 1, pp. 345-346). Há muitos pontos em que isso ocorre como, por exemplo, no seu tratado *Sobre o céu*: "[...] quanto menor e mais leve for um corpo, mais longe uma dada força o moverá. [...] pois a razão entre as velocidades de dois corpos será a razão inversa de seus respectivos tamanhos" (Aristóteles, *De caelo* III.2, 301^{b}4-12; Barnes, 1995, vol. 1, p. 494)[3]. Um outro caso, em que ele

[3] Seguindo o costume utilizado na história da filosofia e na história da ciência, indicaremos as passagens das obras de Aristóteles fornecendo os números do livro e do capítulo, bem como a paginação da edição grega de Bekker.

utilizou um exemplo numérico, é sua análise (atualmente considerada errada) das relações entre força e movimento:

> Se, então, *A* é aquilo que move, *B* a coisa movida, *C* a distância que ela é movida e *D* o tempo gasto, então *A* moverá a metade de *B* no dobro da distância *C* [no mesmo tempo *D*]; e [*A* moverá a metade de *B*] na distância *C* na metade do tempo *D*; pois assim serão observadas as regras da proporção. Além disso, se uma dada força move um dado objeto certa distância em um certo tempo e metade da distância em metade do tempo, a metade do poder motriz moverá metade do objeto à mesma distância no mesmo tempo. Seja *E* a metade da força motriz *A*; e *F* a metade de *B* [o corpo que é movido]; então, eles estão relacionados por semelhança e o poder motriz é proporcional ao peso, de modo que cada força fará com que a mesma distância seja atravessada no mesmo tempo. (Aristóteles, *Physica* VII.5, 249^{b}30-250^{a}9; Barnes, 1995, vol. 1, p. 417).

Independentemente de nossa aceitação ou rejeição das ideias apresentadas por Aristóteles, é notável que ele utilize em seus trabalhos uma abordagem matemática que havia sido desenvolvida muito recentemente – a teoria das razões e proporções. Note-se, também, que ele representa grandezas físicas por letras (obviamente, letras gregas α, β, γ, δ e não as romanas que foram utilizadas na tradução acima). Em muitos casos, análises como essa eram acompanhadas por diagramas explicativos nos manuscritos e em algumas edições antigas (Fig. 3), embora a maioria das atuais edições das obras de Aristóteles seja desprovida de figuras, mesmo em pontos nos quais a compreensão do texto se torna quase impossível sem elas, como na descrição geométrica que ele apresenta sobre o arco-íris (Aristóteles, *Meteorologica* III.5, 375^{b}20-376^{b}21; Barnes, 1995, vol. 1, pp. 604-605).

O uso da teoria das proporções aparece de forma ainda mais interessante na obra aristotélica ou pseudo-aristotélica chamada *Mechanica* (ou *Problemata Mechanica*). Esse é um tratado grego que, por sua linguagem e conteúdo, costuma ser atribuído a algum dos contemporâneos ou seguidores de Aristóteles. Teria sido escrito no século IV a.C., anteriormente aos *Elementos* de Euclides (Heath, 1921, vol. 1, p. 344; Laird & Roux, 2008, p. 3). Até o século XVIII praticamente todos os autores aceitavam que se tratava de uma obra autêntica de Aristóteles; depois, o consenso mudou para o extremo oposto, negando-se que ela pudesse ter sido escrita pelo filósofo de Estagira. Atualmente, discute-se muito sua autoria (Coxhead, 2012). Recentemente, foi novamente atribuída ao filósofo (Renn, Damerow & McLaughlin, 2003, p. 46). Não vamos nos posicionar aqui sobre esse ponto.


¶ QVINTI CAPITIS NOTE.
¶ Mouet/ mouet scdʒ locũ. ¶ Medictas mobilis: est mobile subduplũ. ¶ Nõ mouentiũ et mobiliũ moles quãte sint respiciẽde sunt: sed mouentiũ et mobiliũ potentie.
¶ Medium/ dimidium.
12 QVINTVM cap. cõtinet septẽ cõparationũ mouẽtiũ et mobiliũ regulas. ¶ Prima regula. Si aliquod mouẽs moueat aliqđ mobile aliquãto tp̃e et aliquãto spacio: idẽ mouẽs aut eq̃le mouebit mobilis medictatẽ p duplũ spaciũ i equali tp̃e. ¶ Sit a mouẽs, b mobil, c spaciũ, d tp̃s, manifestũ est q quicq̃d mouet aliquid: aliqua vi supãte mouet/ aliquãto tp̃e et spacio. vnde ex analogia: regula euadere potest vel q̃manifestissima. ¶ Secũda. Si potẽtia mouẽs moueat mobile aliquãto tp̃e ꝛ aliq̃to spacio: potẽtia eadẽ aut ei data eq̃lis mouebit mobilis medietatẽ p idẽ spaciũ i tp̃s medietate. ¶ Tertia. Si potẽtia mouẽs moueat mobile aliq̃to tp̃e et aliq̃to spacio: eadẽ potẽtia aut ei data equalis mouebit idẽ mobile p spacij medietatẽ in medio tp̃e. ¶ Quarta. Si virt⁹ mouẽs quodcũq; moueat mobile aliquãto tp̃e ꝛ aliq̃to spacio: media virt⁹ mobilis medietatẽ eodẽ spacio moue-
k. i.

Figura 3. Diagrama explicando o argumento do livro 7, capítulo 5, da *Física* de Aristóteles, em uma tradução latina do século XVI (Lefèvre d'Etaples, 1512, fol. 73 recto)

Essa obra é o mais antigo tratamento teórico sobre máquinas que conhecemos, no qual o autor procura explicar o funcionamento dos mecanismos a partir de um princípio teórico unificado, relacionando forças com deslocamentos e velocidades. Acredita-se que esse trabalho serviu de base, posteriormente, para o estudo sobre máquinas escrito por Heron de Alexandria (Martins, 2018).

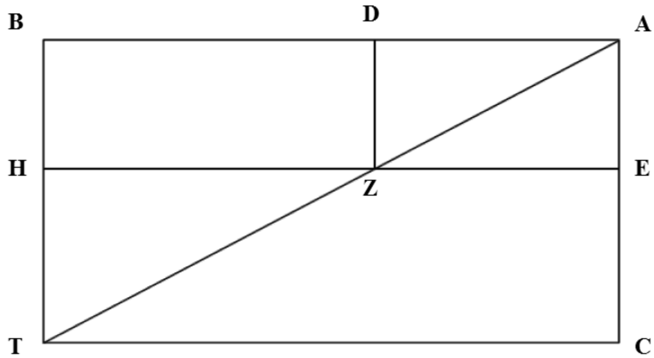


Figura 4. Diagrama da *Mechanica* atribuída a Aristóteles, explicando a regra de composição de movimentos.

Encontramos coisas notáveis nessa obra, como a demonstração da regra do paralelogramo (Fig. 4) para a composição de movimentos, com o uso de raciocínios de proporcionalidade:

> Ora, sempre que um corpo se move em duas direções em uma razão fixa, ele necessariamente se move em uma linha reta que é a diagonal da figura formada pelas linhas que são descritas nessa razão. Seja a razão de acordo com a qual o corpo se move ser representada pela razão de *AB* para *AC*. Suponhamos que *AC* se move para *B* enquanto *AB* se move para a posição *HE*; agora, consideremos que *A* se move para *D*, e que *AB* se move uma distância determinada pelo ponto *E*. Se a razão do movimento é como aquela de *AB* para *AC*, então a linha *AD* deve ter a mesma razão em relação a *AE*. Então, o pequeno quadrilátero tem a mesma proporção que o maior, de modo que a diagonal é a mesma, e o corpo se moverá para *Z*. Pode-se mostrar que ele se comportará desse

> modo qualquer que seja o instante do seu movimento que for considerado; sempre estará sobre a diagonal. [...] Mas se um corpo se move com dois movimentos que não possuem uma razão fixa nem tempo fixo, será impossível que ele se mova em uma linha reta. (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* I, 848^{b}11-28; Hett, 1955, pp. 337-339)

O caso em que os dois movimentos formam um ângulo agudo ou obtuso é tratado em outro ponto da obra (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 23, 854b16-855a27; Hett, 1955, pp. 381-387).

Muitas das questões estudadas nesse livro são acompanhadas de desenhos explicativos. Joyce van Leeuwen comparou os diagramas da *Mechanica* em todos os manuscritos conhecidos, mostrando sua importância e reconstruindo os desenhos que serviram de base para as cópias que chegaram até nós (Leeuwen, 2014; Leewen, 2016). Steffen Bogen estava completamento enganado, ao afirmar que não há figuras nos manuscritos da *Mechanica* (Bogen, 2013, p. 286).

O autor da obra se refere a dispositivos em que “o menor domina o maior, e coisas possuindo pequeno peso movem grandes pesos, e todos os aparelhos semelhantes que chamamos de mecânicos. [...] Entre os problemas incluídos nesse grupo estão os que se referem à alavanca. Pois é estranho que um grande peso possa ser movido por uma pequena força.” (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica*, 847a22-847b3; Hett, 1955, pp. 330). Para analisar este e outros dispositivos, o autor começa analisando o movimento de um círculo em torno do seu centro, para depois comparar tanto o movimento dos braços de uma balança quanto o movimento de uma alavanca com as características do movimento circular. “Os fatos sobre a balança dependem do círculo, e os sobre a alavanca [dependem] da balança, enquanto quase todos os outros problemas mecânicos de movimento dependem da alavanca. Ora, dois pontos sobre uma linha traçada como um raio do centro [do círculo] nunca têm a mesma rapidez, mas o que está mais distante do centro fixo se desloca mais rapidamente; é por causa disso que surgem muitas das propriedades notáveis do movimento dos círculos." (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 848a2-18; Hett, 1955, pp. 335).

Para nós, pode ser óbvio que a velocidade dos pontos de um círculo são diferentes; mas essa talvez não fosse uma propriedade bem conhecida na época, por isso o autor explica o motivo. Quando um raio de um círculo completa uma volta, todos os seus pontos retornam ao lugar de onde partiram. Cada um deles descreve uma circunferência diferente, e as circunferências são proporcionais aos seus raios. Como os tempos são iguais, as velocidades são proporcionais aos espaços percorridos e, portanto, são proporcionais aos raios. (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 848b1-9; Hett, 1955, pp. 337). Ou, analisando o diagrama detalhadamente (Fig. 5): *A* é o centro do círculo e os pontos *B* e *C* estão sobre o mesmo raio, a diferentes distâncias do centro.

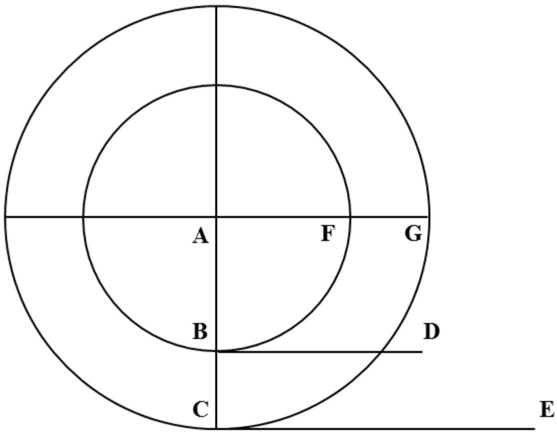


Figura 5. Adaptação de um diagrama da *Mechanica* atribuída a Aristóteles, explicando a proporcionalidade entre velocidade e distância ao centro de um círculo em rotação.

Quando esse círculo gira, o ponto *B* se desloca até *F* ao mesmo tempo que o ponto *C* se desloca até *G*. Mas os seus deslocamentos são os arcos *BF* e *CG* que são diferentes entre si. Suponhamos que o arco *BF* tem o mesmo comprimento que a reta *BD* e que o arco *CG* tem o mesmo comprimento que a reta *CE*. Então, e a razão de suas velocidades será igual à razão desses comprimentos percorridos; e como os arcos são proporcionais às distâncias ao centro, as velocidades também serão proporcionais a essas distâncias.

Em seguida, o autor adiciona um comentário de que na rotação de um círculo, *uma mesma força* faz com que o ponto mais distante do centro se mova mais rapidamente e tenha um deslocamento maior do que o ponto mais próximo do centro (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 1, 849b20-23; Hett, 1955, pp. 347). A introdução de forças, aqui, não fica muito clara; mas este é o ponto fundamental que vai ser aplicado na análise da alavanca, em seguida.

Podemos tentar compreender o raciocínio da obra recorrendo à sua versão árabe parcial, recentemente publicada por Mohammed Abbatouy:

> Também se pergunta por qual motivo as grandes balanças são mais certeiras e possuem mais precisão do que as balanças pequenas. O princípio da resposta com relação a essa questão é perguntar por que, no caso de uma linha longa que parte do centro de um círculo, de tal modo que a distância de sua extremidade até o centro é grande, o movimento de sua extremidade é mais rápido quando ambas as extremidades são movidas pela mesma força. De dois móveis, o mais rápido é aquele que se desloca uma grande distância no mesmo tempo; e o que está mais longe do centro atravessa uma maior distância ao longo de sua circunferência, e o mais próximo uma distância menor. Infere-se desse raciocínio que o fulcro da balança é um centro, pois é fixo, e que os dois braços da balança que estão de cada lado do fulcro correspondem às linhas que partem do centro. *Se o braço é mais longo, o movimento de sua extremidade, quando causado pelo mesmo peso, será mais forte do que o movimento que teria se fosse mais curto*. (Abattouy, 2001, p. 114; minha ênfase)

Aparentemente, o raciocínio aqui é o seguinte: a uma maior distância do centro, o mesmo peso é acompanhado por um movimento mais rápido e, portanto, seu efeito é maior. Ou seja: o efeito depende da força (peso) e da sua velocidade, sendo proporcional a ambos. No texto grego, essa ideia não é tão clara.

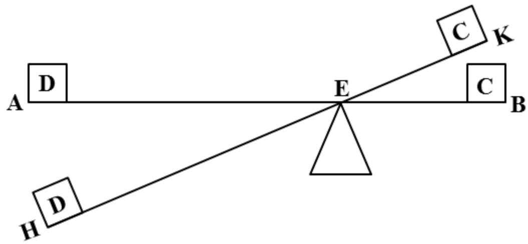


Figura 6. Diagrama da *Mechanica* atribuída a Aristóteles, utilizado para explicar a lei das alavancas.

O autor da *Mechanica* apresenta uma análise da alavanca, utilizando o princípio de que a razão entre as velocidades dos movimentos de suas extremidades é proporcional à razão entre suas distâncias ao fulcro sendo, por isso, inversamente proporcional à razão entre as forças. A argumentação apresentada é a seguinte:

> Por que pequenas forças conseguem mover grandes pesos por meio de uma alavanca, como foi dito no início deste tratado, já que ainda se adiciona o peso da alavanca? [...] Será a alavanca a causa, sendo equivalente a uma balança com sua corda presa abaixo e dividida em duas partes desiguais? Pois o fulcro atua como a corda [presa à balança], pois ambos permanecem estacionários e atuam como um centro. Sob o impulso do peso, o raio mais distante do centro se move mais rapidamente e há três elementos na alavanca: o fulcro, ou seja, o centro ou corda; e os dois pesos, aquele que causa o movimento e aquele que é movido. *Ora, a razão entre o peso movido e o peso que o move é a razão inversa das distâncias ao centro.* Quanto maior a distância ao fulcro, mais facilmente ele será movido. A razão já foi dada antes, pela qual o ponto mais distante do centro descreve o maior círculo, de modo que pelo uso da mesma força, quando a força motriz está mais distante do centro, ela causa um maior movimento. (Pseudo-

> Aristóteles, *Mechanica* 3, 850^a30-850^b7; Hett, 1955, pp. 353; itálico adicionado por mim)

O autor apresenta um diagrama que descreve desta maneira (Fig. 6): "Seja *AB* a barra, *C* o peso e *D* a força que o move, *E* o fulcro; e seja *H* o ponto para o qual a força movente se desloca e *K* o ponto para o qual o peso movido *C* se desloca" (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 3, 850^b7-11; Hett, 1955, pp. 353-355).

5. A ORIGEM DAS ALAVANCAS E DE SEU PRINCÍPIO

Devemos nos lembrar de que o princípio das alavancas, aqui apresentado, *não foi criado por Arquimedes*, como se costuma acreditar. Arquimedes é posterior a Euclides e viveu no século III a.C. (as datas de seu nascimento e morte são aproximadamente 287 a.C. e 212 a.C.); a *Mechanica* é do século anterior. Isso não significa que o pseudo-Aristóteles tenha sido o *inventor* da lei das alavancas; ele se refere ao funcionamento desses instrumentos como uma coisa bem conhecida. Seu objetivo não é apresentar uma nova lei e sim tentar explicar a teoria de seu funcionamento.

A invenção da alavanca ocorreu, certamente, no período pré-histórico de desenvolvimento das técnicas – ou seja, em uma fase da qual não temos registro escrito. A construção de imensos monumentos na Mesopotâmia e no Egito, mais de mil anos antes da era cristã, envolvendo a movimentação de blocos de pedra com dezenas de toneladas, certamente envolveu máquinas simples como rampas e alavancas, mas não há textos antigos descrevendo como essas construções foram realizadas (Shaw, 2013, p. 73). Há documentação, no entanto, mostrando que em torno de 1.500 a.C. já se usava no Egito um instrumento atualmente chamado *shaduf*, em árabe (Fig. 7), que usa uma alavanca para elevar água (Rossi, Russo & Russo, 2009, p. 100). O mesmo tipo de instrumento foi também utilizado na Grécia, sendo conhecido pelos nomes κήλων ou κηλώνειον (*kelon* ou *keloneion*). É um dos mecanismos discutidos na *Mechanica*

(Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 28, 857ª34-857ᵇ8; Hett, 1955, pp. 401-403).

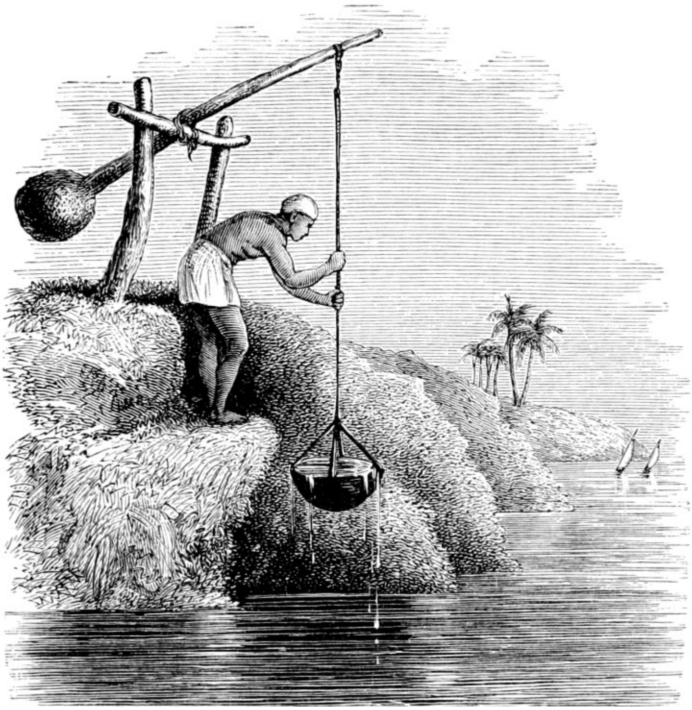


Figura 7. *Shaduf*, sistema com alavanca (contrapeso) para retirada de água de poços e rios, utilizado no Egito desde 1.500 a.C. (Edwards, 1890, p. 73).

Seria possível questionar essas evidências antigas, no seguinte sentido: para se utilizar na prática uma alavanca e outros instrumentos semelhantes, não é necessário conhecer *a lei matemática* que relaciona as forças com as distâncias. Basta saber que a força necessária é menor, quando a distância é maior, sem estabelecer uma relação matemática de proporcionalidade. É verdade. Porém, há um instrumento antigo (anterior a Aristóteles e Arquimedes) que mostra que essa relação matemática era conhecida. É a balança de braços desiguais, também conhecida como "balança romana" (Fig. 8). Nesse tipo de balança, o objeto que se quer pesar fica a uma distância fixa do ponto de suspensão; o contrapeso pode ser deslocado no outro braço da balança, que tem uma escala; a posição do contrapeso indica diretamente o peso do objeto. Para elaborar e construir esse tipo de balança é *necessário* saber que ocorre o equilíbrio quando os corpos estão a distâncias inversamente proporcionais aos seus pesos (Damerow *et al.*, 2002).

Figura 8. Uma antiga ilustração da "balança romana", com um diagrama inspirado na *Mechanica* para explicar seu princípio (Jordanus de Nemore, 1533, folha de rosto).

Apesar do seu nome, a "balança romana" foi inventada e utilizada anteriormente na Grécia. Seu nome em latim era *statera*, proveniente do grego στατήρ (*stater*) que significa balança. A palavra está associada ao verbo ἵστημι que significa "pesar". A existência da balança de braços desiguais na Grécia é documentada através de uma comédia de Aristófanes, um século antes de Aristóteles (Renn, Damerow & McLaughlin, 2003, p. 47). Além disso, ela era conhecida pelo autor da *Mechanica*, já que este explicou seu funcionamento (Pseudo-Aristóteles, *Mechanica* 20, 835^b25-854^a15; Hett, 1955, pp. 375-377). Os detalhes da balança de braços desiguais descrita na *Mechanica* são muito semelhantes aos de uma *statera* romana existente no *Metropolitan Art Museum* (Richter, 1915, pp. 445-

446), o que parece indicar que esse instrumento já havia atingido um desenvolvimento avançado, quando essa obra foi escrita.

6. UM SALTO ATÉ GALILEO

O objetivo deste artigo não é apresentar toda a história da mecânica até Galileo e sim enfatizar a importância do estudo de razões e proporções nesse desenvolvimento. Assim, não serão estudadas importantes contribuições, como as de Arquimedes, de Heron (Martins, 2018) e de tantos pensadores medievais do mundo islâmico e da Europa que estudaram estática e movimentos, sempre utilizando esse mesmo método matemático (Damerow *et al.*, 2004, pp. 12-13). Vamos abordar apenas alguns tópicos do trabalho de Galileo, onde a teoria de proporções de Eudoxos tem enorme importância (ver a introdução de Drake, em Galileo, 1989).

> A importância da teoria de proporções de Eudoxos para a ciência de Galileo não pode ser exagerada. Até a aplicação da álgebra à solução geral de problemas da geometria (como da aritmética), que só foi atingida após o completamente da obra de Galileo, uma conexão rigorosa da matemática com eventos físicos só era possível através de alguma teoria de proporcionalidade. (Drake, 1978, p. 4)

A cinemática de Galileo, desenvolvida nos *Discursos e demonstrações matemáticas sobre duas novas ciências relativas à mecânica e aos movimentos locais*, não utiliza as equações de movimento que estamos acostumados a utilizar e ensinar. Desde o início, sua formulação se baseia em razões e proporções. Após cada proposição, vamos representar a relação utilizando notação moderna, para facilitar a compreensão por parte de um estudante atual.

> Teorema 1. Proposição 1. Se um móvel se desloca uniformemente e percorre dois espaços com a mesma velocidade, os tempos de deslocamento estão entre si como os espaços percorridos.

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \Delta t_1 : \Delta t_2 :: \Delta s_1 : \Delta s_2$$

> Teorema 2. Proposição 2. Se um móvel percorre espaços em tempos iguais, os espaços estão entre si como as velocidades. E se os espaços forem como as velocidades, os tempos serão iguais.

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \Rightarrow \Delta s_1 : \Delta s_2 :: v_1 : v_2$$

> Teorema 3. Proposição 3. Velocidades desiguais com espaços percorridos iguais, os tempos correspondem inversamente às velocidades.

$$\Delta s_1 = \Delta s_2 \Rightarrow \Delta t_1 : \Delta t_2 :: v_2 : v_1$$

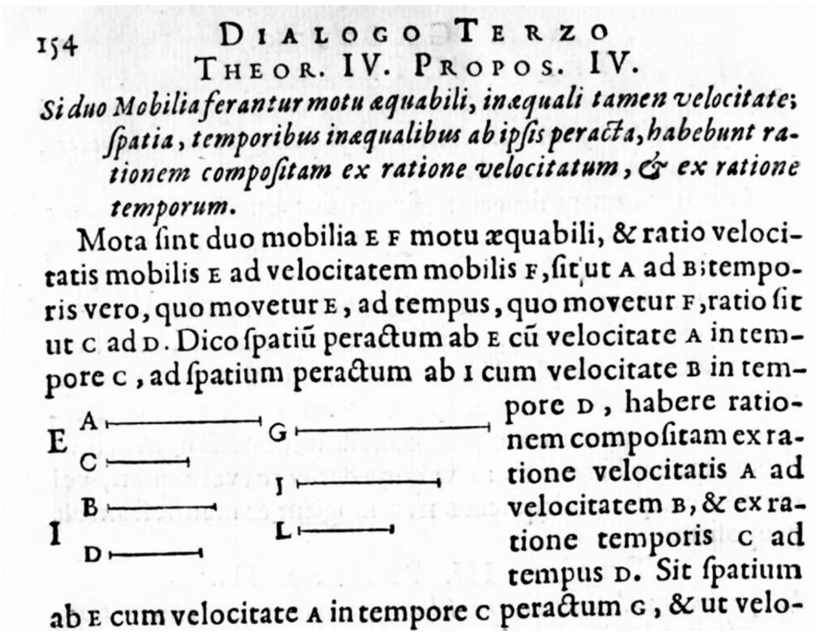
> Teorema 4. Proposição 4. Se dois móveis se deslocam uniformemente e suas velocidades são diferentes, os espaços percorridos por eles em tempos desiguais terão a razão composta da razão entre as velocidades e da razão entre os tempos. (Galileo, 1638, p. 151-154)

$$\Delta s_1 : \Delta s_2 :: (v_1 : v_2)(\Delta t_1 : \Delta t_2)$$

Na obra de Galileo, essas primeiras proposições não são consideradas óbvias; são provadas a partir da definição de movimento uniforme e de quatro axiomas. As demonstrações não são simples, pois levam em conta a teoria das proporções; seriam simples se pudessem utilizar relações algébricas como as que utilizamos hoje em dia. Para facilitar a compreensão por parte dos alunos, um professor de física atual que queira apresentar aos seus alunos o tipo de raciocínio empregado por Galileo poderia "traduzir" suas proporções por relações algébricas mais familiares atualmente e, depois, mostrar e explicar a notação efetivamente utilizada por Galileo.

Em suas demonstrações, Galileo representou cada grandeza (velocidade, deslocamento, intervalo de tempo) por letras e por segmentos de reta, desenvolvendo depois os raciocínios desejados (Fig. 9). Note que, pela necessidade de se referir sempre a razões e proporções, Galileo está sempre *comparando* os movimentos de dois móveis ou dois movimentos de um corpo e não descrevendo o movimento de um único corpo.

Na sua análise sobre movimentos uniformes, Galileo apresentou apenas seis teoremas. O último deles é: “Teorema 6. Proposição 6. Se dois móveis se deslocam uniformemente, a razão entre suas velocidades é composta da razão entre os espaços percorridos e da razão contrária entre os tempos gastos” (Galileo, 1638, p. 155). Em nenhum ponto Galileo escreve algo parecido com uma equação horária do movimento uniforme.



154 DIALOGO TERZO

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si duo Mobilia ferantur motu æquabili, inæquali tamen velocitate; ſpatia, temporibus inæqualibus ab ipſis peracta, habebunt rationem compoſitam ex ratione velocitatum, & ex ratione temporum.

Mota ſint duo mobilia E F motu æquabili, & ratio velocitatis mobilis E ad velocitatem mobilis F, ſit ut A ad B; temporis vero, quo movetur E, ad tempus, quo movetur F, ratio ſit ut C ad D. Dico ſpatiũ peractum ab E cũ velocitate A in tempore C, ad ſpatium peractum ab I cum velocitate B in tempore D, habere rationem compoſitam ex ratione velocitatis A ad velocitatem B, & ex ratione temporis C ad tempus D. Sit ſpatium ab E cum velocitate A in tempore C peractum G, & ut velo-

Figura 9. Uma parte da demonstração de Galileo, nas *Duas novas ciências*, onde se pode notar o uso de diagramas geométricos e a indicação de letras para representar cada grandeza (Galileo, 1638, p. 154).

A parte do seu livro em que trata sobre movimento uniformemente acelerado é muito mais complexa e interessante. As primeiras demonstrações se referem ao espaço percorrido por um corpo em queda, com aceleração constante, como por exemplo: “Teorema 2. Proposição 2. Se qualquer móvel desce a partir do repouso com movimento uniformemente acelerado, os espaços percorridos por ele em quaisquer tempos estão entre si na razão duplicada de seus tempos; ou seja, como os quadrados desses tempos" (Galileo, 1638, p. 171). É claro que não faz sentido falar sobre o quadrado de um tempo; em alguns pontos, como este, Galileo não seguiu rigorosamente a antiga teoria das razões e proporções.

Depois de estudar rapidamente a queda livre, Galileo começa a analisar o movimento em planos inclinados (Fig. 10).

> Teorema 3. Proposição 3. Se o mesmo móvel descer a partir do repouso por um plano inclinado ou na vertical, dos quais a altura é a mesma, os tempos de percurso estarão entre si como os comprimentos do próprio plano e da vertical. (Galileo, 1638, p. 177)

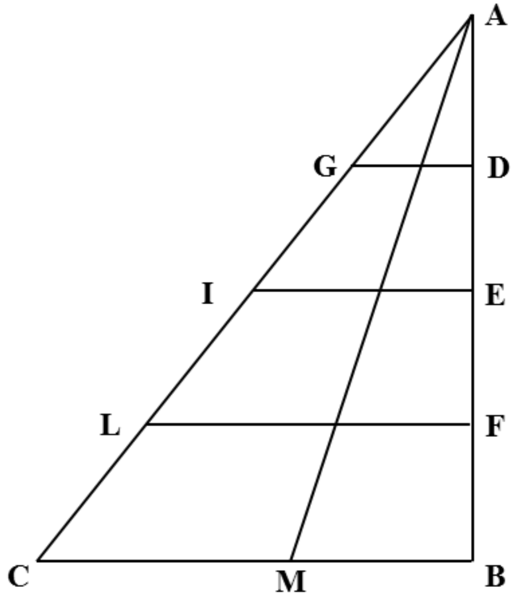


Figura 10. Diagrama utilizado por Galileo na comparação dos tempos de descida na vertical (AB) e em um plano inclinado de mesma altura (AC ou AM) (Galileo, 1638, p. 177).

Todos os livros didáticos atuais utilizam trigonometria para o estudo de planos inclinados. Galileo utiliza comparações geométricas, sem fazer qualquer uso da trigonometria, embora ela fosse bem conhecida desde a Antiguidade, quando foi desenvolvida para utilização na astronomia. O teorema de Galileo contém, essencialmente, a relação que escrevemos como $a = g \sin \alpha$, onde a é a aceleração no plano inclinado, g é a aceleração da gravidade e α é o ângulo que o plano inclinado forma com a horizontal. Porém, nem Galileo nem seus contemporâneos utilizava o conceito de *aceleração* como uma grandeza física mensurável; todas as relações que ele empregava envolvem apenas velocidade, tempo e deslocamento. O conceito de aceleração está presente na obra de Newton, porém sem a notação que utilizamos. O formalismo que utilizamos é, essencialmente, o que foi popularizado no século XVIII por Euler.

Geralmente, os estudantes (e também seus professores) não estão familiarizados com o conhecimento historiográfico e nem são dão conta do anacronismo cometido quando são feitas descrições das contribuições deste e de outros pesquisadores como se fossem idênticas àquilo que se ensina hoje em dia. Conhecer essas diferenças não é desmerecer esses famosos autores; é mostrar as dificuldades que eles enfrentaram, permitindo compreender seus trabalhos de forma adequada, no contexto histórico em que foram desenvolvidos.

As únicas situações que Galileo analisa são de movimento sem atrito e sem resistência do ar. Em seus experimentos com planos inclinados, ele utilizava uma prancha de madeira na qual havia sido escavada uma canaleta fina ("um pouco mais de um dedo de espessura"), que foi tornada bem lisa e revestida com pergaminho, também liso e polido. Nessa canaleta descia uma bolinha de bronze (Galileo, 1638, p. 175). Esse arranjo reduzia bastante o atrito.

No entanto, havia um aspecto que ele nunca levou em conta: a bola de bronze *girava* enquanto descia. Uma esfera que desce um plano inclinado girando sempre terá uma aceleração menor do que se escorregasse pelo plano inclinado sem girar – e a diferença pode ser grande. De fato, no caso de uma esfera descendo um plano inclinado e girando ao mesmo tempo, *mesmo supondo que o atrito era muito pequeno*, o efeito de rotação reduz a aceleração para $a = (5/7)g \sin \alpha$ (Crawford, 1996). A diferença pode ser ainda maior se o plano inclinado for uma canaleta (para impedir que as esferas caiam para fora do plano inclinado) – e Galileo de fato utilizou um plano inclinado com canaleta, em seus experimentos. Nesse caso, o cálculo é bem mais complicado e depende dos detalhes geométricos do dispositivo, como a relação entre a largura da canaleta e o raio da bola (Shaw & Wunderlich, 1984). Em qualquer caso, a aceleração real será $a < (5/7)g \sin \alpha$.

Esses fatos não eram conhecidos, na época. Por causa desses efeitos, nenhum dos teoremas deduzidos por Galileo para planos inclinados podia ser aplicado à situação experimental que ele utilizou: esferas descendo planos inclinados e girando ao mesmo tempo. Assim, todas as conclusões a respeito do movimento de queda livre que Galileo tirou a partir do estudo do movimento em planos inclinados fornecem valores errados. Evidentemente, o uso de geometria e da teoria das proporções permite obter muitos resultados interessantes; mas se houver premissas erradas, a conclusão pode ser totalmente equivocada.

No caso, não foi a metodologia matemática que causou a limitação nas conclusões de Galileo; foi não perceber que os movimentos de translação e rotação simultâneos das esferas exigiam uma análise dinâmica muito mais complexa. Isso só foi percebido no século seguinte.

Na sequência, Galileo apresenta resultados interessantes, incluindo teoremas que não fazem parte dos livros didáticos atuais, como por exemplo:

> Teorema 5, proposição 5. A razão entre os tempos de descida em planos que possuem inclinações, comprimentos e alturas diferentes, é composta pela razão entre os comprimentos dos mesmos planos e do inverso da razão subdupla [raiz quadrada] de suas alturas. (Galileo, 1638, p. 179)

$$\Delta t_1 : \Delta t_2 :: (L_1 : L_2)\sqrt{h_2 : h_1}$$

A partir desse resultado, Galileo prova geometricamente um resultado inesperado (Fig. 11):

> Teorema 6. Proposição 6. Se do ponto mais alto ou mais baixo de um círculo vertical forem traçados quaisquer planos inclinados até a circunferência, os tempos de descida por eles serão iguais. (Galileo, 1638, p. 180)

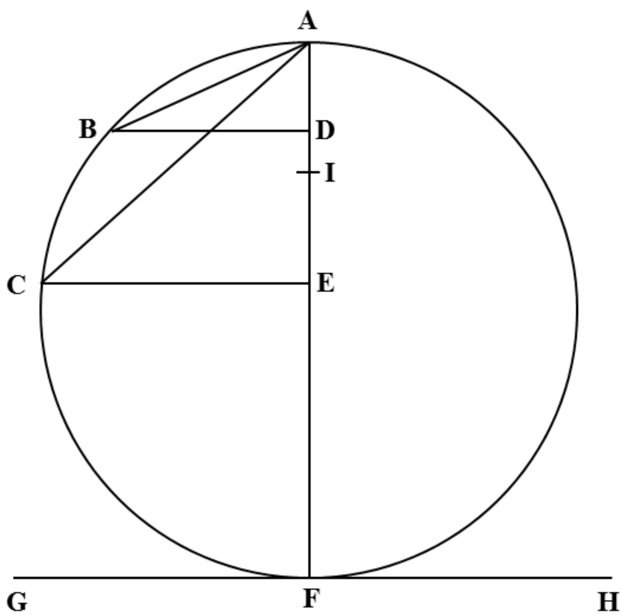


Figura 11. Galileo demonstra que os tempos de descida por planos inclinados representados por AB e AC são iguais (Galileo, 1638, p. 181).

Estudantes atuais de física, utilizando trigonometria e as equações que costumamos ensinar, terão dificuldade em reproduzir este e outros resultados obtidos por Galileo em sua obra. É interessante notar que, no restante de sua análise de movimentos acelerados, ele obtém teoremas bastante complicados, mas de pequena importância prática.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As técnicas matemáticas modernas podem ajudar muito no desenvolvimento da física e no seu ensino, mas devemos perceber que elas são apenas um *instrumento*. Um marceneiro, alguns séculos atrás, não dispunha das ferramentas elétricas atuais, como furadeira, serra, parafusadeira etc. Ele empregava instrumentos manuais que exigiam força muscular e habilidade, que atualmente consideramos muito pouco práticos. No entanto, um bom marceneiro era capaz de produzir móveis de altíssima qualidade. Na física, podemos considerar que ocorre algo semelhante. Galileo era capaz de deduzir, utilizando a teoria de razões e proporções juntamente com uma análise geométrica, resultados de alta complexidade. Pode ser útil introduzir no ensino atual de física um pouco desse estilo de raciocínio, que pode ajudar a desenvolver novos processos mentais em nossos estudantes. Para isso, podem ser utilizadas traduções dos textos originais, acompanhadas pela sua representação utilizando o formalismo moderno correspondente.

Um artigo futuro abordará as técnicas matemáticas de Newton, que eram semelhantes às de Galileo em muitos aspectos. Também será analisada a passagem do método de proporções e de análise geométrica para o formalismo algébrico das equações da mecânica, que atingiu sua expressão madura no trabalho de Leonhard Euler.[4]

AGRADECIMENTOS

O autor agradece o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), sem o qual teria sido impossível desenvolver este trabalho.

---

[4] Ver o artigo seguinte deste volume: MARTINS, Roberto de Andrade. O desenvolvimento do formalismo da mecânica clássica, de Christiaan Huygens e Isaac Newton até Leonhard Euler

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBATOUY, Mohammed. Nutaf min al-Hiyal: a partial Arabic version of Pseudo-Aristotle's "Problemata Mechanica". *Early Science and Medicine*, 6 (2): 96-122, 2001.

BARNES, Jonathan (ed.). *The complete works of Aristotle*. The revised Oxford translation. Princeton: Princeton University Press, 1995. 2 vols.

BOGEN, Steffen. Diagrammatic reasoning: the foundations of mechanics. Pp. 279-298, *in*: ASPER, Markus; KANTHAK, Anna-Maria (eds.). *Writing science: medical and mathematical authorship in ancient Greece*. Berlin: De Gruyter, 2013.

BOYER, Carl B. *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1968.

COXHEAD, Michael A. A close examination of the pseudo-Aristotelian Mechanical Problems: The homology between mechanics and poetry as techne. *Studies in History and Philosophy of Science*, **43**: 300–306, 2012.

CRAWFORD, Frank S. Rolling and slipping down Galileo's inclined plane: rhythms of the spheres. *American Journal of Physics*, **64**: 541-546, 1996.

DAMEROW, Peter; FREUDENTHAL, Gideon; MCLAUGHLIN, Peter; RENN, Jürgen. *Exploring the limits of preclassical mechanics. a study of conceptual development in early modem science: free fall and compounded motion in the work of Descartes, Galileo, and Beeckman*. Second Edition. New York: Springer, 2004.

DAMEROW, Peter; RENN, Jürgen; RIEGER, Simone; WEINIG, Paul. Mechanical knowledge and Pompeian balances. Pp. 93-108, *in*: RENN, Jürgen; CASTAGNETTI, Giulio (eds.). *Homo faber: studies on nature, technology, and science at the time of Pompeii*. Roma: Bretschneider, 2002.

DRAKE, Stillman. *Galileo at work: his scientific biography*. Chicago: The University of Chicago Press, 1978.

EDWARDS, Amelia B. *A thousand miles up the Nile*. London: George Routledge and Sons, 1890.

FOWLER, David Herbert. Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **1** (6): 807-846, 1979.

GALILEI, Galileo. *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali*. Leida: appresso gli Elsevirii, 1638.

GALILEI, Galileo. *Two new sciences*. Trad. Stillman Drake. 2a edição. Madison: University of Wisconsin Press, 1989.

HEATH, Thomas Little. *A history of Greek mathematics*. Oxford: The Clarendon Press, 1921. 2 vols.

HEATH, Thomas Little. *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover, 1956. 3 vols.

JORDANUS DE NEMORE. *Liber Iordani Nemorarii viri clarissimi, de ponderibus propositiones XIII*. Norimbergae: per Io. Petreium, 1533.

LAIRD, Walter Roy; ROUX, Sophie. Introduction. Pp. 1-13, *in*: LAIRD, Walter Roy; ROUX, Sophie (eds.). *Mechanics and natural philosophy before the scientific revolution*. Dordrecht: Springer, 2008.

LEEUWEN, Joyce van. Thinking and learning from diagrams in the Aristotelian *Mechanics*. *Nuncius*, **29**: 53–87, 2014.

LEEUWEN, Joyce van. *The Aristotelian Mechanics. Text and diagrams.* Dordrecht: Springer, 2016.

LEFÈVRE D'ÉTAPLES, Jacques. *In hoc opere continentur totius phylosophiae naturalis paraphrases*. Paris: Henricum Stephanum, 1512.

MARTINS, Roberto de Andrade. Atividades para estudo individual autônomo. *Revista Brasileira de Física* **2** (vol. esp.): 702-14, 1976 (a).

MARTINS, Roberto de Andrade. Esquemas auxiliares para resolução de problemas. *Revista Brasileira de Física* **2** (vol. esp.): 715-32, 1976 (b).

MARTINS, Roberto de Andrade. As máquinas simples na "Mecânica" de Heron de Alexandria. Vol. 2, pp. 15-30, *in*:

SILVA, Ana Paula Bispo; SILVEIRA, Alessandro Frederico da (eds.). *História da ciência e ensino: fontes primárias*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

RENN, Jürgen; DAMEROW, Peter; MCLAUGHLIN, Peter. Aristotle, Archimedes, Euclid, and the origin of mechanics: the perspective of historical epistemology. Pp. 43-60, *in*: SIRERA, José Luis Montesinos (ed.). *Symposium Arquimedes*. Preprint 239. Berlin: Max Planck Institute for the History of Science, 2003.

RICHTER, Gisela Marie Augusta. *Greek, Etruscan and Roman bronzes*. New York: The Metropolitan Museum of Art, 1915.

ROSSI, Cesare. RUSSO, Flavio; RUSSO, Ferruccio. *Ancient engineers' inventions – precursors of the present*. New York: Springer, 2009.

SHAW, D. E.; WUNDERLICH, F. J. Study of the slipping of a rolling sphere. *American Journal of Physics*, **52**, 997-1000 (1984).

SHAW, Ian. *Ancient Egyptian technology and innovation. Transformation in Pharaonic material culture*. London: Bloomsbury, 2013.

SHERMAN, Paul D. Galileo and the inclined plane controversy. *The Physics Teacher*, **12**: 343-348, 1974.

SMITH, David Eugene. *A history of mathematics*. 2 vols. New York: Dover, 1951.

Scientiarum Historia et Theoria Studia, volume 4

Roberto de Andrade Martins

Ensaios sobre História e Filosofia das Ciências I

Extrema: Quamcumque Editum, 2021

Sumário

Prólogo 1

O *Tratado da Esfera* de André do Avelar (1593) 5

O surgimento da mecânica quântica – uma ou duas teorias? 41

Ibn Al-Haytham e a revolução medieval na Óptica 125

O formalismo da mecânica clássica, de Aristóteles a Galileo 165

O desenvolvimento do formalismo da mecânica clássica, de Christiaan Huygens e Isaac Newton até Leonhard Euler 195

Paperback edition: ISBN 978-65-996890-6-2
Kindle edition: ISBN 978-65-996890-7-9

Available at:
https://www.amazon.com/dp/659968906X